

01. Symétries du champ électrique.
02. Champ électrique en régime stationnaire.
03. Condensateur.

Champ électrique. Régime stationnaire.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux propriétés topographiques du champ électrique en régime stationnaire avec, pour objectif, de déterminer l'expression du champ dans des situations de haute symétrie. En régime stationnaire, le champ électrique étant créé par la présence de charges électriques, nous commençons par une étude des distributions de charge.

1 Charge électrique

1.1 Distribution de charges

→ Distribution volumique

L'approximation des milieux continus permet de définir une **densité volumique de charge** ou **charge volumique** telle que :

$$\rho = \frac{\delta q}{d\tau} \text{ en } C \cdot m^{-3}$$

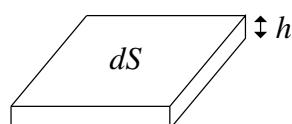
avec $d\tau$ un volume « petit » à l'échelle macroscopique et « grand » à l'échelle microscopique et δq la charge électrique contenue dans ce volume $d\tau$.

→ Distribution surfacique

Si une des dimensions est négligeable devant les deux autres, on définit une **densité surfacique de charge** ou **charge surfacique** telle que :

$$\sigma = \frac{\delta q}{dS} \text{ en } C \cdot m^{-2}$$

Justification :



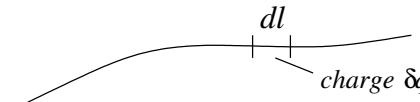
$$\delta q = \rho d\tau = \rho(h dS) = (\rho h) dS = \sigma dS$$

Le modèle surfacique correspond au cas limite pour lequel $h \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow \infty$ avec $\sigma = \rho h = \text{cste.}$

→ Distribution linéique

Si deux des dimensions sont négligeables devant la troisième, on définit une **densité linéique de charge** ou **charge linéique** telle que :

$$\lambda = \frac{\delta q}{dl} \text{ en } C \cdot m^{-1}$$

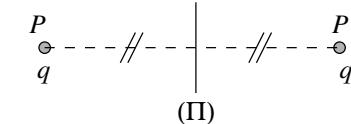


1.2 Symétries et invariances

Symétrie plane

Une distribution de charges admet un plan de symétrie Π , si la distribution de charges, obtenue par symétrie par rapport à Π , lui est en tout point identique.

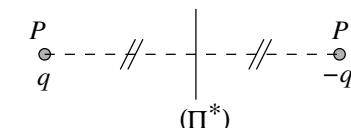
Exemple :



Antisymétrie plane

Une distribution de charges admet un plan d'antisymétrie Π^* , si la distribution de charges, obtenue par symétrie par rapport à Π^* , lui est en tout point opposée (charges de signe opposé).

Exemple :



1.3 Invariance par translation

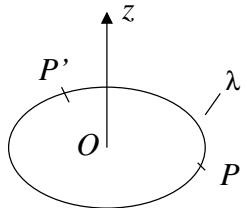
Une distribution de charges est invariante par translation selon un axe Δ si elle reste inchangée par toute translation le long de cet axe.

Remarque : une telle distribution est d'extension infinie selon l'axe Δ .

1.4 Invariance par rotation

Une distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe Δ si elle reste identique lors d'une rotation quelconque autour de cet axe.

Exemple : une spire d'axe Oz portant une charge linéique uniformément répartie.

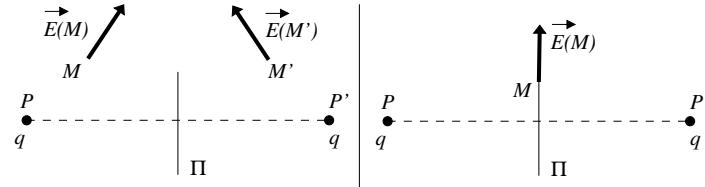


Généralisation :

Soit Π un plan de symétrie de la distribution de charges :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi}(\vec{E}(M)) \quad \text{avec} \quad M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$$

Conséquence importante : en un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges, le champ électrique est contenu dans ce plan.



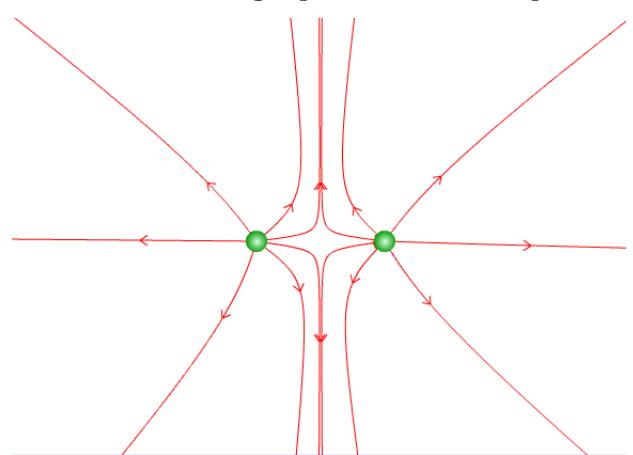
2 Symétrie du champ électrostatique

2.1 Principe de Curie

Le principe de symétrie de Pierre Curie affirme que « lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ». Dit autrement les effets sont au moins aussi symétriques que les causes qui les ont engendrés.

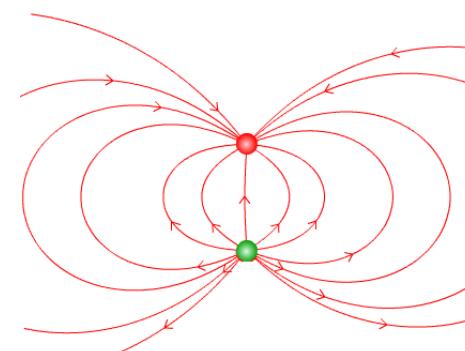
2.2 Symétrie plane

Exemple : la carte de champs ci-dessous représente les lignes de champ électrique créées par un doublet de deux charges positives et identiques.



2.3 Antisymétrie plane

Exemple : la carte de champs ci-dessous représente les lignes de champ électrique créées par un doublet de deux charges de valeur opposée.

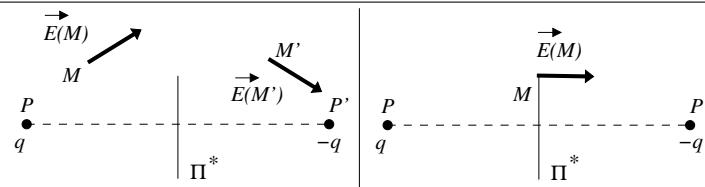


Généralisation :

Soit Π^* un plan d'antisymétrie de la distribution de charges :

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi^*}(\vec{E}(M)) \quad \text{avec} \quad M' = \text{sym}_{\Pi^*}(M)$$

Conséquence importante : en un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charges, le champ électrique est normal à ce plan.



2.4 Invariance par translation selon un axe

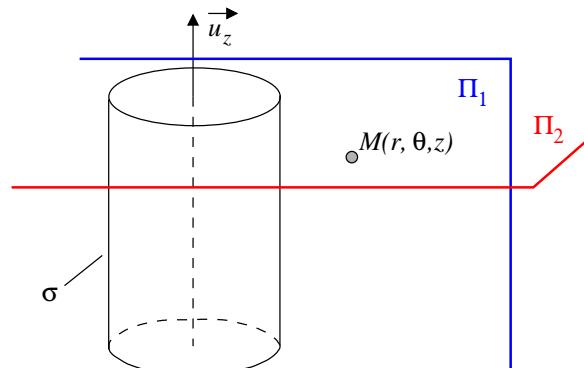
Pour une distribution de charges invariante par translation selon un axe Δ , le champ électrique en un point quelconque M de l'espace est indépendant de la coordonnée associée à l'axe Δ .

2.5 Invariance par rotation autour d'un axe

Pour une distribution de charges invariante par rotation autour d'un axe Δ , la norme du champ électrique en un point quelconque M de l'espace est indépendante de la coordonnée angulaire associée à la rotation autour de l'axe Δ .

2.6 Exemple : cylindre uniformément chargé en surface

On considère un cylindre creux infini d'axe Oz et de rayon R possédant une charge surfacique σ uniforme sur toute la surface.



→ Direction du champ électrique :

$\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces deux plans et donc dans leur intersection :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

→ Dépendance des composantes en fonction des coordonnées d'espace :

La distribution est invariante par translation selon Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz . La **composante** du champ électrique est donc indépendante de z et θ :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$$

3 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell régissent l'évolution locale du champ électromagnétique.

3.1 Énoncé (postulat)

★ Équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

★ Équation de Maxwell-Thomson (M-T) : $\text{div} \vec{B} = 0$

★ Équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

★ Équation de Maxwell-Ampère (M-A) : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

avec ε_0 la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité du vide vérifiant $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, c étant la célérité de la lumière dans le vide.

Remarques :

★ Les équations de Maxwell sont équivalentes à un système de huit équations locales scalaires ; ce sont des équations aux dérivées partielles **linéaires** et **couplées**.

★ Les équations (M-G) et (M-A) relient le champ électromagnétique à ses sources ρ et \vec{j} .

★ Les équations (M-T) et (M-F) expriment les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique.

3.2 Les équations de l'électrostatique

En régime stationnaire, les équations se découpent, on peut donc étudier séparément les caractéristiques des champs électrique et magnétique. En particulier pour le champ électrique :

★ Équation de Maxwell-Gauss (M-G) : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

★ Équation de Maxwell-Faraday (M-F) : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$

Dans toute la suite, nous allons étudier la signification de ces deux équations et les conséquences sur les caractéristiques du champ électrique en régime stationnaire.

4 Caractéristique du champ électrostatique

4.1 Potentiel scalaire électrique

* Comme $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$, il existe V , appelé **potentiel (scalaire) électrostatique** et défini à une constante près, tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

* La circulation du champ électrique s'exprime alors comme une différence de potentiel électrique :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

Justification :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

Conséquence :

En régime stationnaire, une ligne de champ électrique ne peut pas se refermer sur elle-même.

Justification : imaginons un contour \mathcal{C} fermé allant de A à A et **supposons** que ce contour soit une ligne de champ. Si une telle ligne de champ existe, par définition, le champ \vec{E} et le vecteur élémentaire $d\vec{l}$ dirigeant le contour, sont, en tout point, parallèles et de même sens. Le théorème de positivité assure :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

En contradiction évidente avec le fait que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_A = 0$. L'hypothèse est réfutée.

4.2 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Définitions

Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points M vérifiant $V(M) = \text{cste.}$

Les lignes de champ sont les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point et orientées par ce champ.

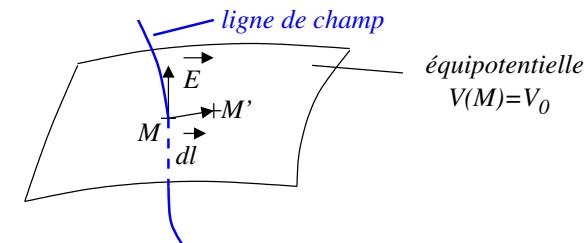
Propriétés

→ Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper en un point où le champ électrostatique a une valeur finie non nulle.

→ Pour que deux lignes de champ se coupent en un point, il faut soit que le champ électrostatique soit nul en ce point soit qu'il ne soit pas défini (présence d'une charge).

→ Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

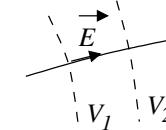
Démonstration : considérons deux points M et M' infiniment voisins appartenant à une même équipotentielle $V(M) = V(M') = V_0$



$$V(M') - V(M) = dV = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

or $V(M') = V(M) \Rightarrow \forall d\vec{l} \in \text{à la surface équipotentielle}, \vec{E} \perp d\vec{l}$

Considérons une ligne de champ rencontrant deux surfaces équipotentielles :



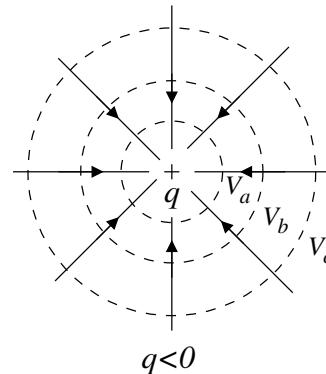
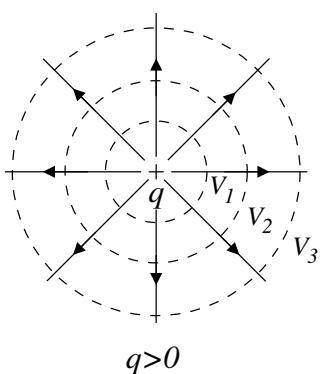
Le long de la ligne de champ $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$ (car $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$)

or $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 dV = V_1 - V_2$ donc $V_1 > V_2$

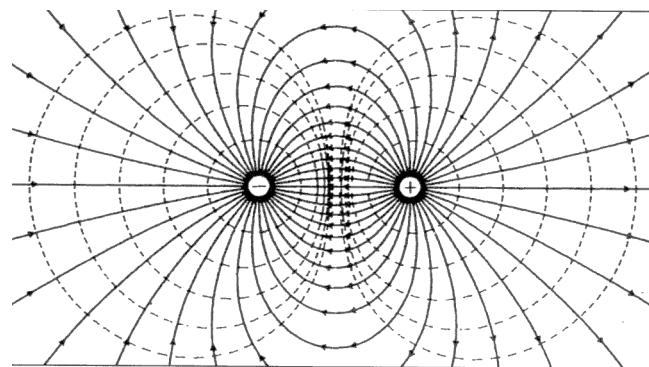
Premier exemple : considérons les lignes de champ et équipotentielles créées par une charge ponctuelle (Cf. page suivante).

→ Au voisinage d'une charge positive, toutes les lignes de champ « sortent » ; au voisinage d'une charge négative, toutes les lignes de champ « entrent ».

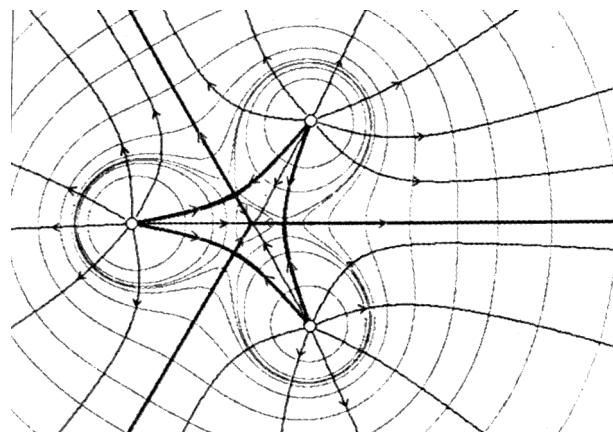
→ Au voisinage d'un point de champ nul, les deux types de lignes de champ sont présentes (Cf. troisième exemple).



Deuxième exemple : équipotentielles et lignes de champ d'un doublet $\{-q, +q\}$.



Troisième exemple : équipotentielles et lignes de champ de trois charges identiques placées au sommet d'un triangle équilatéral.



4.3 Équation de Poisson

Le potentiel électrostatique vérifie l'**équation de Poisson** :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

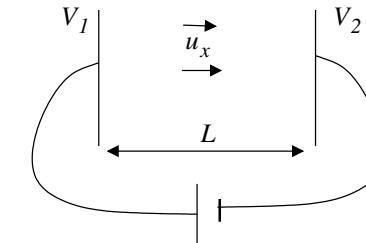
Dans le vide, cette équation se simplifie selon $\Delta V = 0$ (**équation de Laplace**).

Démonstration : on combine l'équation de Maxwell-Gauss avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \vec{E} = \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}}V \right) = -\Delta V$$

Exemple d'application :

→ On considère un condensateur constitué de deux plaques parallèles dont les dimensions latérales sont très grandes vis à vis de l'espacement entre les plaques.



→ Le système est invariant par translation selon les axes Oy et Oz , en conséquence $V(x, y, z) = V(x)$.

→ Les plaques portent des charges électriques à leur surface, en revanche les charges sont absentes dans le volume entre les armatures :

$$\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]0, L[, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Compte tenu des conditions aux limites, $V(0) = V_1$ et $V(L) = V_2$, on en déduit :

$$V(x) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{L}x$$

On peut alors déterminer le champ électrique entre les armatures :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{L} \vec{u}_x$$

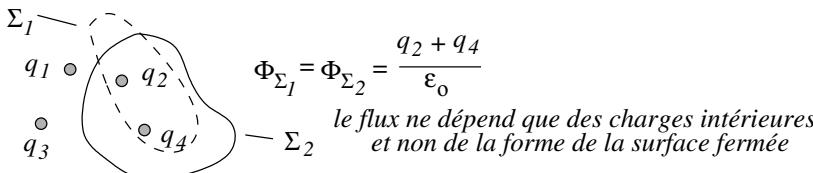
5 Théorème de Gauss

5.1 Énoncé

Le flux du champ électrostatique à travers une surface (Σ) **fermée et orientée vers l'extérieur** est égal à la charge totale Q_{int} contenue dans le volume intérieur à cette surface divisée par ε_0 :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

→ Signification :



→ Justification :

Le théorème de Gauss est l'expression intégrale de la loi locale de Maxwell-Gauss :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} dv = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

5.2 Application au calcul d'un champ électrostatique

Le théorème de Gauss est **toujours** vrai ; il n'est adapté au calcul du champ électrostatique que si la distribution de charges possède une symétrie élevée.

Méthode

* Étude des symétries et invariances : déterminer la direction du champ et la dépendance du champ vis à vis des coordonnées.

* Choix de la surface de Gauss : choisir une surface Σ permettant un calcul élémentaire du flux du champ électrique.

* Appliquer le théorème de Gauss et obtenir ainsi \vec{E} .

Ex. 1 : champ créé par une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle q située à l'origine du système de coordonnées.

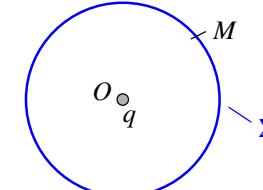
→ Étude des symétries et invariances :

* Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_{\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution ; $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces deux plans et donc dans leur intersection :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

* La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angles θ et φ , la composante du champ électrique ne dépend que de la coordonnée r :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$$



→ Choix de la surface de Gauss :

En choisissant une sphère de rayon r centrée sur l'origine, la norme du champ électrique est uniforme sur la sphère, de plus le champ et le vecteur surface sont colinéaires.

→ Application du théorème de Gauss :

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E_r(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = E_r(r) \iint_{\Sigma} dS = E_r(r) 4\pi r^2$$

La charge contenue dans toute sphère centrée sur O est égale à q , on en déduit :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

→ Potentiel électrique scalaire :

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\nabla V \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Pour obtenir la dernière expression, on a fait le choix habituel d'un potentiel nul à l'infini pour une distribution d'extension finie.

Avec un choix de potentiel nul à l'infini, le champ électrique et le potentiel créés par une charge q à l'origine du système de coordonnées ont pour expression :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ex. 2 : boule uniformément chargée en volume (symétrie sphérique)

On considère une boule de centre O et de rayon R uniformément chargée en volume, charge volumique ρ , soit une charge totale $Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$.

→ Étude des symétries et invariances ; surface de Gauss :

Les symétries et invariances sont identiques à celles de la charge ponctuelle, par conséquent :

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$$

et on retient comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur l'origine

→ Application du théorème de Gauss :

$$\Phi_{\Sigma} = E_r(r) \times 4\pi r^2$$

Il reste à déterminer la charge contenue dans la sphère de rayon r ; deux cas se présentent :

* Pour $r > R$, $Q_{int} = Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Tout se passe comme si toute la charge étant concentrée au centre !

* Pour $r < R$, $Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

On constate que le champ est continu en $r = R$. Ceci est toujours vrai dans le cas d'une distribution volumique de charge.

→ Potentiel électrostatique :

* Pour $r > R$: (avec le choix d'un potentiel nul à l'infini)

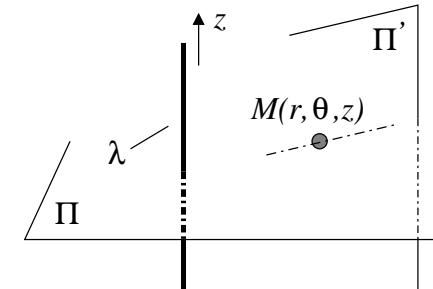
$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \forall r > R, V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

* Pour $r < R$: (avec la continuité du potentiel en $r = R$)

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \forall r \in [0, R], V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Ex. 3 : fil infini uniformément chargé (symétrie cylindrique)

On considère un fil infini d'axe (Oz) portant une charge linéique λ uniforme.



★ Étude des symétries et invariances :

Les plans $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$ et $\Pi' = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ en M est contenu dans ces deux plans et il est donc dirigé selon \vec{u}_r :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angle θ et par toute translation selon (Oz) :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r = E_r(r) \vec{u}_r$$

* Choix de la surface de Gauss : on considère la surface Σ d'un cylindre d'axe vertical Oz , de hauteur h et de rayon r , les surfaces inférieure et supérieure sont nommées S_1 et S_2 , la surface latérale S_l .

* Application du théorème de Gauss :

Calculons le flux à travers cette surface Σ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \Phi_{S_l} + \underbrace{\Phi_{S_1}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{S_2}}_{=0} = \iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi_{\Sigma} &= \iint_{S_l} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E_r(r) \iint_{S_l} dS = E_r(r) 2\pi rh \end{aligned}$$

La charge contenue dans le cylindre vaut $Q_{int} = \lambda h$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

* Potentiel électrique scalaire

Sachant que $\vec{E} = -\nabla V$:

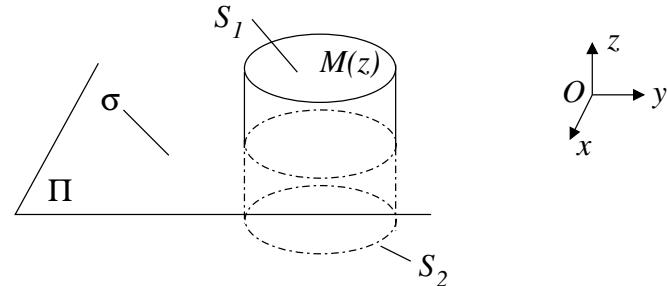
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} ; E_{\theta} = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} ; E_z = 0 = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{donc} \quad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + V_0 \quad (V(R) = V_0)$$

La distribution de charge étant d'extension infinie, le potentiel n'est pas nécessairement nul à l'infini, on impose alors une constante V_0 arbitraire pour $r = R$.

Plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini $\Pi = (xOy)$ portant une charge surfacique σ .



* Étude des symétries et invariances :

Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution. Le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans leur intersection :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = E_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

La distribution de charges est invariante par toute translation selon (Ox) et (Oy) :

$$\vec{E}(M) = E_z(x, y, z)\vec{u}_z = E_z(z)\vec{u}_z$$

Le plan $\Pi = (xOy)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges donc $E_z(z) = -E_z(-z)$.

* Choix de la surface de Gauss : on considère la surface Σ d'un cylindre d'axe vertical, les surfaces inférieure et supérieure ont une aire S et sont équidistantes du plan Π .

* Application du théorème de Gauss :

Calculons le flux à travers cette surface :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \underbrace{\Phi_{\text{latéral}}}_{=0} + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi_{\Sigma} &= 2 \iint_{S_1} E_z(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = 2E_z(z)S \end{aligned}$$

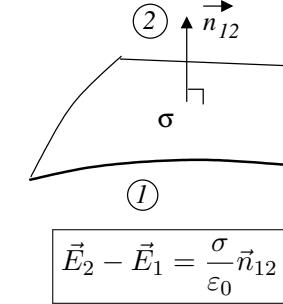
La charge contenue dans le cylindre vaut $Q_{\text{int}} = \sigma S$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad (z > 0) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad (z < 0)$$

Remarque : on observe une discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface chargée.

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Ce résultat est général pour une distribution surfacique de charge.



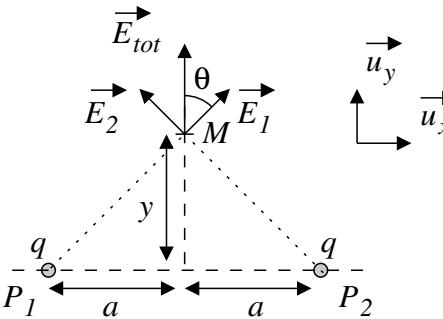
6 Principe de superposition

Les équations de Maxwell étant linéaires, le champ \vec{E}_{tot} créé par un ensemble de distributions de charges est la somme des champs créés par chacune des distributions prise isolément.

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Exemple :

On considère le champ électrique créé par la présence de deux charges ponctuelles :



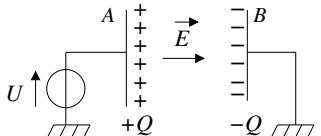
$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{u}_{P_1 M}}{P_1 M^2} + \frac{\vec{u}_{P_2 M}}{P_2 M^2} \right) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)} \cos\theta \vec{u}_y \\ &\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + y^2)^{3/2}} \vec{u}_y \end{aligned}$$

7 Applications

7.1 Condensateur plan

Présentation

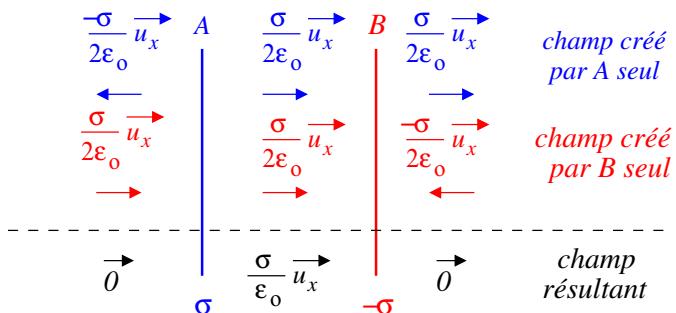
On considère deux armatures planes en regard, l'ensemble est soumis à une différence de potentiel U , les armatures portent des charges électriques opposées.



Expression du champ électrique

→ Modélisation : les armatures ont une aire S et sont distantes de e . On suppose que les dimensions latérales sont grandes devant l'espacement entre les plaques, on peut alors faire l'approximation de plaques infinies et définir des densités surfaciques $\sigma = Q/S$ et $-\sigma$ uniformes. Cette modélisation revient à « négliger les effets de bord ».

→ Méthode de calcul : connaissant le champ créé par une plaque infinie chargée uniformément, on en déduit le champ créé par l'ensemble des deux plaques en utilisant le principe de superposition :



On obtient donc un champ uniforme $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ au sein du condensateur et nul en dehors.

En calculant la circulation du champ électrique entre les deux plaques, on en déduit :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \times e \Rightarrow U = E \times e = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

Capacité du condensateur plan

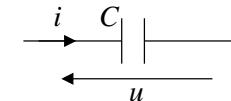
Très généralement la capacité du condensateur désigne son aptitude à stocker des charges pour une tension donnée à ses bornes :

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{en farad (F)}$$

Dans le cas du condensateur plan :

$$C = \frac{\sigma S}{\sigma e / \epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Énergie electrostatique



Le condensateur reçoit une puissance électrique :

$$p = ui = u \frac{dq}{dt} = u \times C \frac{du}{dt} = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$$

On peut donc définir une énergie contenue dans le condensateur :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} Cu^2$$

Cette énergie, de nature electrostatique, est associée à la présence d'un champ électrique non nul au sein du condensateur. On peut en donner une expression volumique :

$$\omega_E = \frac{\mathcal{E}_c}{S \times e} = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 S}{e} \times (Ee)^2 \times \frac{1}{Se} \Rightarrow \omega_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

En un point où existe un champ électrique, la densité volumique d'énergie électrique vaut :

$$\omega_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Rôle des isolants

→ En insérant un isolant entre les armatures d'un condensateur, on augmente sa capacité.

→ En présence d'un matériau isolant, nommé diélectrique, de permittivité relative ϵ_r , à la place du vide entre les armatures, la capacité du condensateur devient :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$$

Matériaux	Paraffine	Plexiglas	Air sec
ε_r	2,2	3,3	1

7.2 Énergie potentielle électrique d'une charge

Expression

L'énergie potentielle électrique d'une charge q soumis à un potentiel $V(M)$ vaut :

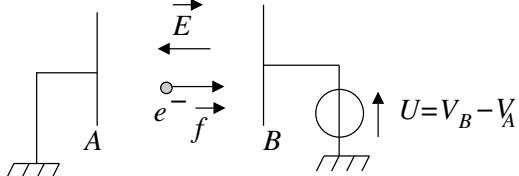
$$\mathcal{E}_p = qV(M)$$

Justification : en présence d'un champ électrique, la charge q est soumise à une force :

$$\vec{f} = q\vec{E} = -q \times \overrightarrow{\text{grad}}V = -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$$

Application

On s'intéresse à une particule chargée et accélérée en présence d'un champ électrique. Par exemple un électron dans l'exemple ci-dessous :



La seule force présente est la force électrique qui dérive d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique de la particule se conserve.

$$\mathcal{E}_{cB} + \mathcal{E}_{pB} = \mathcal{E}_{cA} + \mathcal{E}_{pA} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + q(V_A - V_B)$$

avec $q(V_A - V_B) = -qU = eU$ et une vitesse en A nulle, on en déduit :

$$v_B = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

7.3 Théorème de Gauss gravitationnel

Énoncé

Considérons la force d'interaction gravitationnelle entre deux masses et la force électrostatique entre deux charges. Ces forces sont tout à fait similaires dans leur forme :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

\longleftrightarrow

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^g = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On peut donc, par analogie avec le cas électrique, définir un champ de gravitation et formuler un théorème de Gauss gravitationnel.

$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$

\longleftrightarrow

$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^g = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$

$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^e = q_2 \vec{E}_1(M_2)$

\longleftrightarrow

$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}^g = m_2 \vec{g}_1(M_2)$

$\vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{12}$

\longleftrightarrow

$\vec{g}_1(M_2) = -\frac{G m_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$

q_1

\longleftrightarrow

m_1

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

\longleftrightarrow

$-G$

$\frac{1}{\varepsilon_0}$

\longleftrightarrow

$-4\pi G$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

\longleftrightarrow

$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

Application : corps à symétrie sphérique

Soit un corps sphérique (Terre, Soleil, Lune,...) de masse M , de centre O , de rayon R et de masse volumique $\rho(r)$ ne dépendant que de la distance r au centre O (pour simplifier on traite le cas $\rho = cste$).

→ Étude des symétries et invariances : $\vec{g} = \vec{g}_r(r)\vec{u}_r$

→ Choix de la surface de Gauss : on considère la surface Σ d'une sphère de rayon r et de centre O .

* Application du théorème de Gauss :

Calculons le flux à travers cette surface :

$$\Phi_\Sigma = \vec{g}_r(r) 4\pi r^2$$

→ Pour $r > R$, $M_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = M$; l'application du théorème de Gauss

conduit à :

$$\vec{g}(r) = \frac{-4\pi GM}{4\pi r^2} \vec{u}_r = \frac{-GM}{r^2} \vec{u}_r$$

Pour une distribution de masse à symétrie sphérique, le champ de gravitation à l'extérieur de la distribution est le même que si toute la masse était concentrée au centre.

* Pour $r < R$, $M_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{g}(r) = -\frac{4\pi G\rho r}{3} \vec{u}_r$$

On constate que le champ de gravitation est continu en $r = R$.

Capacités exigibles :

→ Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges et de courants pour en déduire les propriétés de \vec{E} .

→ Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday. Particulariser ces équations au régime stationnaire.

→ Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel de \vec{E} . Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.

→ Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme de E en dehors des sources. Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.

→ Établir l'équation locale du deuxième ordre reliant le potentiel à la densité de charge (Équation de Poisson).

→ Énoncer et appliquer le théorème de Gauss.

Établir le champ électrique et le potentiel créés par :

- une charge ponctuelle,
- une distribution de charge à symétrie sphérique.
- une distribution de charge à symétrie cylindrique.

Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge dans le cas d'une distribution volumique d'épaisseur faible devant l'échelle de description. Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

→ Exploiter le théorème de superposition.

→ Établir la relation $\mathcal{E}_p = qV$. Appliquer la loi de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.

→ Établir un tableau d'analogies entre les champs électrique et gravitationnel.

→ Décrire qualitativement le phénomène d'influence.

Exprimer le champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord. En déduire l'expression de la capacité.

Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.

→ Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

Retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de la relation $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$.