PC RESUME PO4 : ondes méthodes

A) INVENTAIRE DES ONDES UTILES

Les ondes suivantes sont des modèles mathématiques simples permettant d'obtenir le comportement réel du milieu. Leur réalité physique sera discutée avec la notion de paquet d'onde (cf.PO9).

1°) Ondes progressives planes (OPP)

Un phénomène physique associé à la grandeur écrite $\mathbf{s(x-ct), s(x+ct), s(t-\frac{x}{c})}$ ou $\mathbf{s(t+\frac{x}{c})}$ est une **onde progressive se propageant dans la direction Ox.**

1. Le caractère progressif est associé à l'existence d'un retard
2. Les ondes ci-dessus se propagent **sans atténuation.**
3. Si $s(x,t) = \frac{1}{x} f(x-ct)$ ou $s(x,t) = Ae^{-ax} f(x-ct)$ la propagation s'accompagne **d'une atténuation**

2°) Ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

On utilise leur forme complexe est : $\underline{s(M,t)} = Ae^{j\omega t} e^{-j\vec{k}.\vec{OM}+j\Phi}$

On rappelle que $s(M,t) = Re(\underline{s(M,t)})$.

1. $\vec{k} = k\vec{u}$ est le vecteur d'onde. Sa direction et son sens sont connus **mais sa coordonnée k réelle sur $\vec{u}$ est à priori inconnue.**
2. On cherche justement une condition sur k pour que $\underline{s(M,t)}$ soit solution. Cette relation fixe k en fonction de ω. **Elle est appelée relation de dispersion**.
3. Si la propagation se fait selon Ox : $s(M,t) = Ae^{j\omega t} e^{-jkx}$
4. Pour ces ondes on définit une vitesse de phase $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$
5. Si la vitesse de phase dépend de la pulsation, **le milieu est dit dispersif**.
6. Ces OPPM décrivent un phénomène se propageant sans atténuation.

3°) Pseudo-ondes planes progressives monochromatiques (POPPM) (Par la suite on ne les différenciera pas des OPPM.)

Leur forme complexe est : $\underline{s(M,t)} = Ae^{j\omega t} e^{-j\vec{k}.\vec{OM}+j\Phi}$ avec toujours $s(M,t) = Re(\underline{s(M,t)})$.

Seule différence avec les OPPM : $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ a une coordonnée $\underline{k}$ complexe.

1. On cherche encore une condition sur $\underline{k}$ pour que s(M,t) soit solution (**la relation de dispersion)**.
2. **Si $\underline{k}$ a une partie imaginaire, elle traduit l'atténuation de l'onde**.

(Le vérifier si la propagation se fait selon Ox avec $s(M,t) = Ae^{j\omega t} e^{-jkx}$ et $\underline{k}$ = k' +j k'')

3. On définit alors la vitesse de phase par $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{k})}}$
4. Si la vitesse de phase dépend de la pulsation, **le milieu est dit dispersif**.
5. La partie imaginaire de k est responsable de l'atténuation dont une longueur caractéristique est : $\boxed{\delta = \dfrac{1}{|\mathrm{Im}(\underline{k})|}}$

4°) Ondes planes stationnaires (OPS)

Une onde est stationnaire si **les variables d'espace et de temps sont découplées**. Elle a donc la, forme **y(x,t) = F(x) G(t).**

Cas particulier : $s(x,t) = A\exp(k''x)\cos(\omega t)$ est une onde stationnaire amortie appelée souvent **onde évanescente**. C'est aussi une P OPPM où k est imaginaire pur.

B) QUELQUES EQUATIONS D'ONDE

I) EQUATION DE D'ALEMBERT : l'indispensable

1°) Forme générale de l'équation d'onde de D'Alembert

- **pour une onde scalaire (pression, déplacement, vitesse)**

$\boxed{\Delta s - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$ où l'opérateur Δ est défini par: $\Delta s = \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2}$

- **pour un champ vectoriel (champ électrique, magnétique)**

$\boxed{\Delta\vec{\mathbf{L}} - \dfrac{1}{\mathbf{c}^2}\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{t}^2} = 0}$ **où** $\boxed{\Delta\vec{L}(\Delta L_x, \Delta L_y, \Delta L_z)}$ **et vérifie** $\boxed{\Delta\vec{\mathbf{L}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{L}} - \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\mathbf{L}}}$

2°) Forme unidimensionnelle $\boxed{\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0}$

c a les dimensions d'une vitesse : elle est appelée célérité des ondes.

3°) Ses solutions

a) OP
b) OPPM ou POPPM
c) OPS

Les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sont sinusoïdales de la forme :

$\boxed{y(x,t) = a\sin(k.x + \varphi_1)\sin(\omega.t + \varphi_2)}$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Ces solutions se mettent sous la forme d'une somme de deux OPPM se propageant en sens opposé. La longueur d'onde de l'OPS est celle des OPPM qui la constituent.

4°) Théorème de D'Alembert (il justifie l'intérêt des OPP)

Les ondes, solutions de l'équation de D'Alembert unidimensionnelle, peuvent s'écrire, **de façon générale,** sous la forme d'une superposition des deux OPP précédentes $s(x,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

II) EQUATION D'ONDE DE KLEIN GORDON : discrète mais souvent présente (sans dire son nom !)

Elle ressemble un peu à l'équation de D'Alembert. Elle intervient lorsqu'on a **une dissipation d'énergie dans le milieu.**

1°) Forme de l'équation

a) Exemple d'une corde vibrante avec frottement (dissipation)

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial s}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0}$$

b) Exemple (à faire) d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique (dissipation due à l'effet Joule)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - c^2 \Delta \vec{B} = \vec{0}} \ \textbf{avec} \ \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

2°) Propriétés

1. Les OP réelles ne sont pas solutions car la dissipation entraîne une atténuation.
2. Il faut donc tester des POPPM.
3. La relation de dispersion est de la forme $c^2k^2 = \omega^2 - j\frac{\omega}{\tau}$

C) ARCHITECTURE D'UN PROBLEME SUR LES ONDES

La plupart des problèmes sur les ondes ont la progression suivante ;

1. On établit une équation d'onde à l'aide de lois de physique appropriées (mécanique, électromagnétisme…)
2. On passe sur les complexes et on teste une pseudo OPPM
3. On établit une relation de dispersion
4. On regarde si k est réel ou complexe
5. On en déduit la forme de la solution
6. On examine s'il y a atténuation ou dispersion
7. On écrit les solutions
8. On interprète physiquement le résultat
9. On envisage les conditions limites
   - Si le milieu est illimité : la solution est de type Pseudo OOPM
   - S'il y a des conditions limites : la solution est de type OPS