Énoncé du DS commun de physique n°8
Ondes électromagnétiques

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.

Ce sujet est constitué de deux problèmes complètement indépendants ; le formulaire, commun aux deux problèmes, est donné en dernière section ; les données spécifiques se trouvent dans chaque énoncé.

On donne :
la vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m$\cdot$ s^{-1}
la charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C
la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1}
la constante de Bolzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
le nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
la permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}

1 Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma

On s'intéresse dans ce problème à la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma et à ses applications dans le domaine des communications, qui font intervenir l'ionosphère terrestre. L'ionosphère, couche de l'atmosphère située entre 80 et 800 km d'altitude, peut-être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé qui contient des électrons libres (densité volumique n_0) et des cations de charge $+e$ en même densité volumique que les électrons ; l'ensemble est donc globalement neutre. On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes électromagnétiques dont le champ électrique est de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{u_y}$$

où E_0 et ω sont des réels positifs et k est un nombre complexe. On étudiera ensuite la réflexion et la transmission d'une onde à l'interface vide/plasma. Enfin, on déterminera quelques ordres de grandeurs relatifs aux communications terrestres ou satellitaires.

Données

Masse volumique du cuivre : $\rho_{Cu} = 8,92 \times 10^3$ kg.m^{-3}
Masse molaire de l'élément cuivre : $M_{Cu} = 63,5$ g.m^{-1}
Masse molaire de l'air : $M_a = 3,0 \times 10$ g.m^{-1}
Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
Masse d'un proton : $m_P = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Rayon terrestre : $R_T = 6,4 \times 10^3$ km
Accélération de la pesanteur à la surface de la terre : $g = 9,8$ m.s^{-1}

Préliminaires

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. En déduire les équations de propagation des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

2. a) On considère une onde de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{u_y}$$

où E_0, ω et k sont des réels positifs. Qualifier cette onde.

b) À quelle condition cette onde est-elle solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on la relation trouvée entre k et ω ? Le vide est-il un milieu dispersif ?

c) Déterminer $\underline{\overrightarrow{B}}$.

d) L'onde considérée est-elle réalisable expérimentalement ? Justifier votre réponse.

3. a) Exprimer et calculer numériquement la densité volumique d'électrons libres dans un métal conducteur comme le cuivre en admettant que chaque atome libère un électron libre de conduction.

b) Comparer cette valeur à la densité volumique n_0 d'électrons libres dans l'ionosphère, qui est comprise entre $n_1 = 10^{10}$ m^{-3} et $n_2 = 10^{12}$ m^{-3}, selon la couche d'ionosphère considérée.

c) Quelle force, exercée sur les électrons libres, dont on tient compte dans un conducteur métallique, peut-on négliger dans l'ionosphère ?

1.1 Équations du champ électromagnétique dans un plasma

On admet que la densité volumique de charge reste nulle en présence de l'onde électromagnétique. On cherche à calculer le vecteur densité de courant dans le milieu.

4. a) Écrire l'équation vérifiée par le champ des vitesses $\overrightarrow{v_e}(M,t)$ des électrons, supposés non relativistes.
b) De même, écrire l'équation vérifiée par le champ des vitesses $\overrightarrow{v_c}(M,t)$ des cations.
c) En déduire le vecteur densité de courant $\underline{\overrightarrow{j}}$ en fonction du champ électrique de l'onde. Justifier que le terme dû aux cations est négligeable devant celui dû aux électrons.
d) En déduire la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du plasma. Quelle est la principale différence avec la conductivité d'un métal lorsqu'on se place à basse fréquence ?

5. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons. Expliquer ce résultat.

6. a) Établir l'équation de propagation vérifiée par $\underline{\overrightarrow{E}}$ dans le plasma.
b) En déduire la relation entre k et ω.
c) Définir la pulsation plasma ω_P et calculer numériquement sa valeur pour chacune des densités électroniques n_1 et n_2.

7. On se place dans le cas où le plasma occupe le demi-espace $x > 0$, et $\omega < \omega_P$.
a) Calculer k, et l'indice $\underline{n}$ du milieu.
b) En déduire les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en notation réelle.
c) Qualifier l'onde obtenue. Comment appelle-t-on le domaine de pulsations considéré ?
d) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

8. On se place toujours dans le cas où le plasma occupe le demi-espace $x > 0$, et $\omega > \omega_P$.
a) Calculer k, et l'indice $\underline{n}$ du milieu.
b) En déduire les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en notation réelle.
c) Qualifier l'onde obtenue. Comment appelle-t-on le domaine de pulsations considéré ?
d) Calculer la vitesse de phase v_ϕ. Le milieu est-il dispersif ?
e) Calculer la vitesse de groupe v_g. Quelle est sa signification ?
f) Que se passe-t-il pour $\omega \gg \omega_P$?

1.2 Réflexion et transmission à l'interface vide/plasma

L'onde de la question 2 est l'onde incidente, qui se propage dans le vide sous incidence normale en direction de l'interface vide-plasma située dans le plan $x = 0$. On admet que le champ électromagnétique est continu à l'interface.

9. a) Calculer le coefficient de réflexion r_E et le coefficient de transmission t_E pour le champ électrique, en fonction de $\underline{n}$.
b) Pour $\omega < \omega_P$, calculer r_E en fonction de ω et montrer qu'il peut se mettre sous la forme $r_E = e^{j\alpha}$, où α est un angle dont on déterminera l'expression et les limites pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \omega_P$. En déduire l'expression du champ électrique réfléchi, puis du champ magnétique réfléchi. Commenter ce résultat.
c) Pour $\omega > \omega_P$, calculer r_E et t_E en fonction de ω. En déduire l'expression du champ électrique réfléchi et du champ électrique transmis, puis des champs magnétiques réfléchi et transmis. Commenter ces résultats.

1.3 Application aux communications

On applique les résultats précédents à l'ionosphère présentée plus haut.

10. Comparer l'altitude de l'ionosphère à l'altitude de l'atmosphère estimée dans un modèle d'atmosphère isotherme où l'air, de masse molaire moyenne M_a, est assimilé à un gaz parfait.

11. La première liaison radio intercontinentale fut réalisée en 1901 par Marconi en utilisant des ondes électromagnétiques de quelques centaines de kHz. Expliquez le rôle de l'ionosphère en vous appuyant sur l'étude précédente. Pour quelles valeurs de fréquences cette communication est-elle possible ?

12. De nos jours, les communications s'effectuent principalement par l'intermédiaire de satellites, en particulier pour les liaisons internet.
a) Pour quelles valeurs de fréquences est-ce possible ?
b) On envisage le cas d'un satellite géostationnaire. Déterminer les caractéristiques de son orbite, en particulier son altitude h, dans l'hypothèse d'une terre sphérique de rayon R_T.

c) Quelles sont les latitudes joignables par l'intermédiaire d'un satellite géostationnaire ?

d) À l'heure actuelle, on utilise des ondes de la bande Ku (12 à 18 GHz) pour ces communications ; la bande Ka (27-40 GHz) tend à être de plus en plus utilisée. Quel est l'intérêt de faire appel à des fréquences aussi élevées ?

e) Moyennant des hypothèses raisonnables, déterminer la durée minimale d'un aller-retour sol-satellite.

2 Propagation de l'influx nerveux

Dans ce problème, on étudie la propagation de l'influx nerveux le long des axones, fibres qui permettent de relier électriquement entre elles des régions éloignées de l'organisme. On se limite au cas simple des invertébrés : un axone est alors constitué d'un filament cylindrique, appelé axoplasme, entouré d'une membrane très fine constituée d'une double couche lipidique qui le sépare du milieu extérieur. On étudie successivement l'onde électromagnétique dans l'axoplasme, le rôle de la membrane et la forme du signal.

Données numériques relatives à l'axone

Rayon de l'axone : $a = 5\ \mu$m
Épaisseur de la membrane : $\delta = 7$ nm
Conductivité de l'axone : $\sigma_a = 2$ S.m^{-1}
Conductivité surfacique de la membrane : $g_m = 9$ S.m^{-2}
Permittivité électrique de la membrane : $\varepsilon_m = 8\varepsilon_0$
Différence de potentiel transmembranaire au repos : $V_E = -70$ mV

2.1 Propagation d'un signal électromagnétique dans l'axoplasme

Dans cette partie, l'axoplasme est modélisé par un cylindre homogène infini d'axe Oz et de rayon a ; une membrane d'épaisseur négligeable le sépare du milieu extérieur, qui est homogène et s'étend jusqu'à l'infini. L'axoplasme (milieu 1) et le milieu extérieur (milieu 2) sont des milieux conducteurs et diélectriques, homogènes et isotropes, non magnétiques ; ils obéissent à la loi d'Ohm locale. On note σ_1 et σ_2 leurs conductivités électriques respectives, ε_1 et ε_2 leurs permittivités électriques respectives. Compte-tenu des propriétés de ces milieux, les permittivités électriques remplacent, dans les équations de Maxwell, la permittivité électrique du vide ε_0. On repère la position d'un point par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

13. Écrire la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell dans le milieu i ($i = 1$ ou 2).

14. Lors de la propagation de l'influx nerveux, les pulsations observées sont de l'ordre de 10^3 rad.s^{-1}. À ces fréquences, les conductivités mises en jeu sont de l'ordre de 2 S.m^{-1} et les permittivités électriques valent à peu près celle de l'eau, c'est-à-dire 80 ε_0. Montrer que, dans ces conditions, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est valable. Quelle est la conséquence de cette approximation sur les équations de Maxwell ?

15. Établir, en éliminant $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$, l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{B}$ dans l'axoplasme et dans le milieu extérieur.

16. On s'intéresse aux ondes progressives transverses magnétiques de la forme $\overrightarrow{B}(M,t) = B_\theta(r,z,t)\overrightarrow{e_\theta}$, où $B_\theta(r,z,t)$ s'écrit en notation complexe :

$$\underline{B}_\theta(r,\theta,z) = \underline{B}(r)e^{i(\omega t - kz)}$$

L'axoplasme est alors parcouru par un courant dont l'intensité **totale** dans la direction Oz est :

$$i_a = i_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

a) Écrire l'équation vérifiée par $\underline{B}(r)$. On posera $k_i'^2 = k^2 + i\mu_0\sigma_i\omega$.

b) Les longueurs d'onde typiques de l'influx sont de l'ordre de 1 mm. Montrez qu'alors $k_i' \approx k$. On utilisera cette approximation *dans toute la suite du problème*.

c) Quelle est la conséquence de cette approximations sur les équations de Maxwell ? Quel phénomène physique associé néglige-t-on alors ?

d) Établir les expressions de $\underline{B}(r)$ dans l'axoplasme et dans le milieu extérieur à l'aide des fonctions de Bessel I_1 et K_1 données en fin de sujet, et en fonction de i_0 et a. Pour cela, on utilisera en particulier les limites des fonctions de Bessel pour $r \to 0$ ou $r \to +\infty$, et la continuité de $\overrightarrow{B}$ à l'interface entre les deux milieux.

17. On cherche à compléter la description de l'onde précédente en examinant les courants et le champ électrique.

a) Calculer le courant enlacé par un contour circulaire centré sur Oz de rayon $r > a$.

b) En déduire que, à l'extérieur de l'axoplasme, circule un courant total exactement opposé à celui circulant à l'intérieur.

c) Calculer les composantes non nulles $\underline{j}_r$ et $\underline{j}_z$ de la densité de courants volumiques $\underline{\overrightarrow{j}}$ à l'intérieur et à l'extérieur de l'axone.

d) En déduire les composantes du champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}}$ et montrer que $\underline{\overrightarrow{E}}$ dérive d'un potentiel scalaire $\underline{\psi}$.

18. Soit $v(z,t)$ la différence de potentiel $\psi_{int} - \psi_{ext}$ entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane à sa surface ($r = a$).

a) En considérant cette différence de potentiel en z et en $z + dz$, obtenir une relation entre $\frac{\partial v}{\partial z}(z,t)$ et les composantes du champ électrique $E_{1z}(a,z,t)$ juste à l'intérieur de la membrane et $E_{2z}(a,z,t)$ juste à l'extérieur de celle-ci.

b) Montrer que la composante longitudinale de $\overrightarrow{E}$ de part et d'autre de la membrane, en $r = a$, se met sous la forme $E_{1z}(a,z,t) = Z_1 i(z,t)$ dans l'axoplasme et $E_{2z}(a,z,t) = -Z_2 i(z,t)$ dans le milieu extérieur. Donner les expressions de Z_1 et Z_2.

c) Le rayon d'un axone est de l'ordre de 5 μm. En déduire des expressions approchées de Z_1 et Z_2, montrer que $Z_2 \ll Z_1$ et donner une évaluation numérique de Z_1.

d) Montrer que $\frac{\partial v}{\partial z}$ se met sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -r_a i(z,t)$$

où r_a est une grandeur que l'on exprimera en fonction de a et de σ_1.

e) Ce résultat a été obtenu pour des ondes planes sinusoïdales ; montrer qu'il se généralise à un signal en forme d'onde plane quelconque se propageant dans la direction Oz moyennant certaines conditions que l'on précisera.

2.2 Rôle et modélisation électrique de la membrane

On considère maintenant le rôle de la membrane dans la propagation de l'influx nerveux. Son épaisseur δ est très petite devant le rayon a de l'axoplasme, ce qui permet d'utiliser pour son étude une géométrie localement plane, et donc un modèle unidimensionnel. On notera x la coordonnée dans la direction perpendiculaire au plan de la membrane, avec $x = 0$ à l'interface axoplasme-membrane et $x = \delta$ à l'interface membrane-milieu extérieur.

19. L'axoplasme et son extérieur contiennent des ions dont les concentrations sont différentes de part et d'autre de la membrane. Exprimer le vecteur densité de courant électrique $\overrightarrow{j_D}$ associé à la diffusion d'un type d'ion de charge Ze à travers la membrane, en faisant intervenir le coefficient de diffusion D et le nombre $n(x)$ d'ions par unité de volume.

20. Placé dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$, un ion de charge Ze acquiert, à la température T, une vitesse limite :

$$\overrightarrow{v_{lim}} = \frac{DZe}{k_B T}\overrightarrow{E}$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann. Soit $\overrightarrow{E}(x)$ un champ électrique perpendiculaire à la membrane ; quelle est l'expression du vecteur densité de courant électrique de conduction $\overrightarrow{j}_E$ pour le type d'ion de la question précédente ?

21. On suppose l'équilibre réalisé pour ce type d'ion.

a) Montrer alors que $V_i = (\psi_{int} - \psi_{ext})_{eq}$, différence de potentiel entre l'axoplasme et le liquide extérieur, se met sous la forme :

$$V_i = \frac{k_B T}{Ze}\ln\left(\frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)$$

où n_{int} et n_{ext} sont les nombres d'ions par unité de volume de part et d'autre de la membrane.

b) Le rapport n_{ext}/n_{int} vaut 10 pour les ions Na^+ et $0,04$ pour les ions K^+ à 25 °C. Calculer les différences de potentiel à l'équilibre V_{Na+} et V_{K+} qui leur sont associées.

22. On considère maintenant le régime stationnaire où toutes les concentrations $n_i(x)$ sont indépendantes du temps.

a) Montrer que pour l'ion de type (i), le vecteur densité total de courant électrique $\overrightarrow{j_i} = j_i \overrightarrow{e_x}$ est indépendant de x.

b) Montrer que j_i est relié à la différence de potentiel v à travers la membrane par une relation de la forme $j_i = g_i(v - V_i)$ où g_i est la conductance de la membrane par unité de surface pour l'ion considéré et V_i la différence de potentiel transmembranaire de l'ion à l'équilibre ; on montrera que g_i se met sous la forme :

$$g_i = \frac{\alpha}{\int_0^\delta \frac{dx}{n_i(x)}}$$

et l'on donnera l'expression de α.

c) En déduire un schéma électrique équivalent à l'ensemble membrane, ion.

d) Déterminer l'expression de la densité de courant électrique totale j à travers une membrane séparant N espèces ioniques. Définir le potentiel à l'équilibre V_E et la conductance équivalente g_m de la membrane.

e) On observe que la différence de potentiel à l'équilibre entre l'axoplasme et le liquide extérieur vaut $V_E = -70$ mV . En utilisant les données numériques de la question 21.b), déterminer laquelle des deux espèces ioniques en présence transportera le plus de courant au voisinage du potentiel d'équilibre.

23. La membrane est constituée d'un matériau diélectrique de permittivité électrique ϵ_m. Son modèle doit aussi comporter un condensateur de capacité surfacique c_m.

a) Donner l'expression de c_m et de j_c, densité de courant associée à cet effet capacitif. Quel est maintenant le schéma électrique équivalent à l'ensemble membrane, ion ?

b) Calculer c_m pour une membrane d'épaisseur 7 nm et de permittivité diélectrique $8\epsilon_0$.

2.3 Étude de la forme du signal, "potentiel d'action"

On considère le tronçon d'axone compris entre z et $z + dz$.

24. En effectuant un bilan de charge électrique pour ce tronçon, établir la relation entre la densité de courant électrique totale à travers la membrane et l'intensité du courant parcourant l'axoplasme $i(z,t)$.

25. Donner le schéma électrique équivalent à la tranche d'axone de longueur dz.

26. À partir de deux équations différentielles couplées reliant $i(z,t)$ et $v(z,t)$,montrer que la différence de potentiel transmembranaire $v(z,t)$ obéit à l'équation :

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \tau \frac{\partial v}{\partial t} - (v - V_E) = 0$$

où λ et τ sont deux paramètres dont on donnera les expressions.

27. a) Déterminer les solutions indépendantes du temps de l'équation précédente ; déterminer de même les solutions indépendantes de z.

b) En déduire une interprétation physique des paramètres λ et τ. Les calculer numériquement à l'aide des données antérieures.

Expérimentalement, on constate que lorsque l'axone est excité avec une tension supérieure de 20 mV au potentiel d'équilibre, un signal se propage appelé "potentiel d'action". En un point, la différence de potentiel v varie, au cours du temps, de sa valeur au repos ($V_E = -70$ mV) à $+40$ mV avec retour rapide à l'équilibre. La vitesse u de propagation et la forme du signal sont indépendantes de la tension d'excitation. On dit que la propagation du signal est un phénomène de tout-ou-rien : pas de réponse en-dessous du seuil, une réponse normalisée au-dessus et ce, quelle que soit la tension excitatrice.

Pour expliquer ce phénomène, il faut supposer que la conductance de la membrane passe d'une valeur basse en-dessous du seuil à une valeur beaucoup plus grande au-dessus. Si l'on ne s'intéresse qu'à la propagation du front de montée du signal, la relation donnant la densité de courant électrique à travers la membrane (hors effets capacitifs) prend la forme :

$$j(V) = \begin{cases} g_m V \text{ si } V < V_1 \\ g(V - V_2) \text{ si } V > V_1 \end{cases}$$

où $V = v - V_E$. Dans la suite, on négligera g_m car $g_m \ll g$.

28. Écrire l'équation différentielle qui lie V et j. En déduire l'équation vérifiée par V.

29. Le front de montée se propage sans déformation à la vitesse u constante, avec $u > 0$; V ne doit donc dépendre que de la variable $s = z - ut$.

a) Réécrire l'équation précédente en variable s pour les deux états $V < V_1$ et $V > V_1$. Montrer que le premierde ces états correspond à $s > 0$ et le second à $s < 0$.

b) Montrer qu'alors $V(s)$ est de la forme :

$$A_1 \exp(-\gamma_1 s) + B_1 \text{ si } V < V_1$$

$$A_2 \exp(+\gamma_2 s) + B_2 \text{ si } V > V_1$$

Donner les expressions des constantes A_1, B_1, A_2, B_2, γ_1 et γ_2 en prenant comme conditions aux limites $V = V_1$ pour $s = 0$, et $V \to 0$ lorsque $z \to +\infty$ à t fixé.

30. L'intensité dans l'axone $i(s)$ doit être continue en $s = 0$. Quelle relation cela impose-t-il entre γ_1 et γ_2 ?

31. En déduire que la vitesse de propagation du front de montée du signal est donnée par :

$$u^2 = \left(\frac{g}{2\pi a r_a c_m^2} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2} \right)$$

Comment la vitesse de propagation du front de montée du "potentiel d'action" dépend-t- elle du rayon a de l'axone ?

32. Application numérique : la conductance g de l'état actif de la membrane vaut environ 200 $\mathrm{Sm^{-2}}$. On observe expérimentalement que $V_1 = +20$ mV et $V_2 = V_{\mathrm{Na+}} - V_E$. En utilisant les données numériques des parties précédentes, calculer la vitesse de propagation u. Quelle vitesse maximale peut-on atteindre dans un axone géant d'invertébré ayant $0,2$ mm de rayon ?

Formulaire

Pour tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\overrightarrow{A}\right) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A}$$

Pour tout champ vectoriel $\overrightarrow{A}$, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\overrightarrow{e_\theta} + \Delta A_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Pour tout champ scalaire f, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

L'équation différentielle linéaire :

$$x^2 y'' + x y' - \left(x^2 + n^2\right) y = 0$$

où n est entier, admet comme solution générale une combinaison linéaires des deux solutions linéairement indépendantes $I_n(x)$ et $K_n(x)$, appelées fonctions de Bessel modifiées, qui ont les propriétés suivantes :

1/ Si $x \to 0^+$,

$$I_n(x) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \; ; K_n(x) \sim \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } K_0(x) \sim -\ln x$$

2/ Si $x \to +\infty$,

$$I_n(x) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\right) e^x \text{ et } K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

3/ Pour les fonctions I_0, I_1, K_0 et K_1,

$$\frac{dI_0}{dx} = I_1 \; ; \frac{dK_0}{dx} = -K_1 \; ; \frac{1}{x}\frac{d(xI_1}{dx} = I_0 \; ; \frac{1}{x}\frac{d(xK_1}{dx} = -K_0$$