Enoncé du DS commun de physique n°5 - Ondes scalaires

de l'instrument à corde au nerf auditif

Document — L'oreille

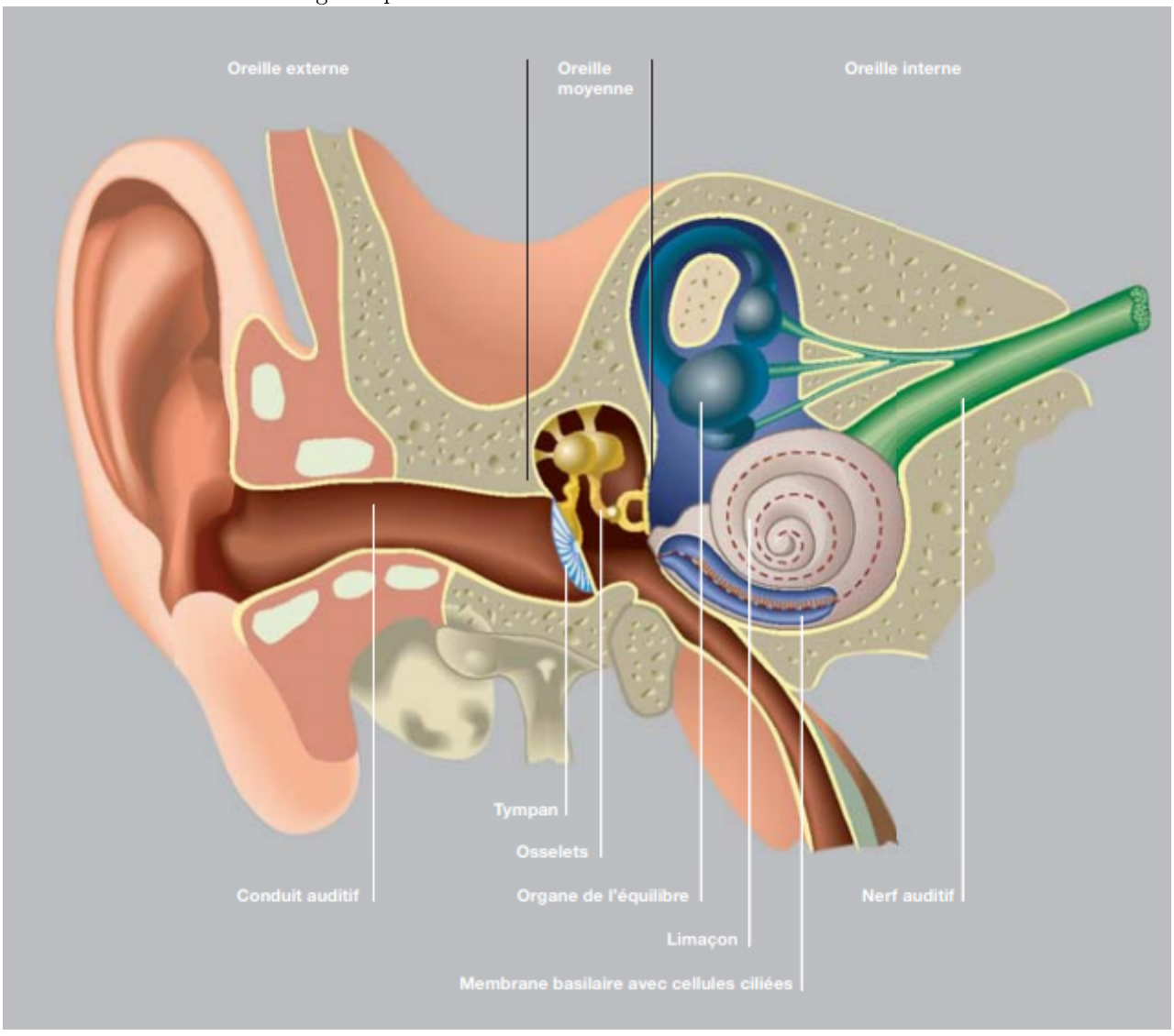
Suva -Musique et troubles de l'ouïe
http://www.suva.ch

un organe fragile et complexe

Oreille externe
Elle se compose du pavillon de l'oreille (qui aide à localiser les sources sonores) et du conduit auditif. Ce dernier se termine par le tympan, qui réagit aux variations de pression comme la membrane d'un microphone.

Oreille moyenne
Les vibrations du tympan sont amplifiées dans l'oreille moyenne, puis transmises à l'oreille interne par trois osselets (le marteau, l'enclume et l'étrier), les plus petits du squelette humain. Le marteau est relié au tympan et l'étrier à la platine de l'étrier qui transmet la vibration au liquide de la cochlée.

Oreille interne
L'oreille interne abrite le limaçon (cochlée), de la taille d'un petit pois. Rempli d'un liquide, celui-ci est partagé en deux dans le sens de la longueur par la membrane basilaire.



Cellules ciliées

Les sons font vibrer la membrane basilaire de manière sélective : les plus aigus sont captés sur la partie antérieure, tandis que les graves pénètrent au fond du limaçon. Ce mode de fonctionnement est comparable à celui d'un analyseur de fréquence. La membrane basilaire est tapissée d'environ 5000 cellules ciliées, des capteurs qui transforment les vibrations sonores en impulsions électriques transmises aux nerfs auditifs. Les 20 000 cellules ciliées externes jouent également un rôle important : véritables amplificateurs, elles permettent d'adapter la réaction de la membrane en fonction du signal à traiter.

La parfaite coordination de ces éléments autorise des performances extraordinaires :

- l'intensité acoustique correspondant au seuil d'audition est $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, celle correspondant au seuil de la douleur $I_s = 1\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$;
- la gamme de fréquence allant de 20 Hz à 10 ou 20 kHz (selon l'âge) recouvre trois décades. À cela s'ajoute une excellente capacité de résolution, l'oreille distingue des signaux qui restent confus pour un analyseur sophistiqué, tels que la mélodie d'un instrument au sein d'un orchestre ;
- l'ouïe dispose également d'une capacité de localisation très développée, qui lui permet d'identifier la provenance d'un cliquetis dans l'air à 3° près.

Axones

Les cils des cellules ciliées qui se trouvent sur la membrane basilaire s'inclinent de quelques millièmes de degré et déclenchent des signaux électriques que les nerfs transmettent au cerveau.

Les axones (ou fibres nerveuses) les plus simples sont formés d'une membrane lipidique enfermant un liquide physiologique riche en ions (l'axoplasme) et baignant dans un liquide cellulaire également riche en ions.

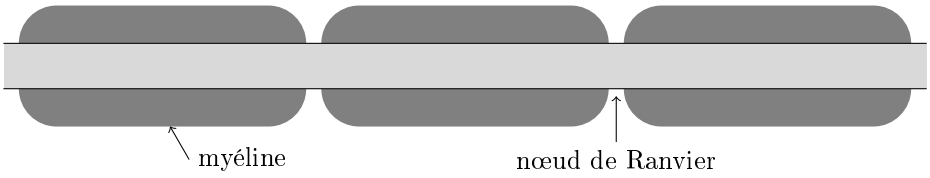
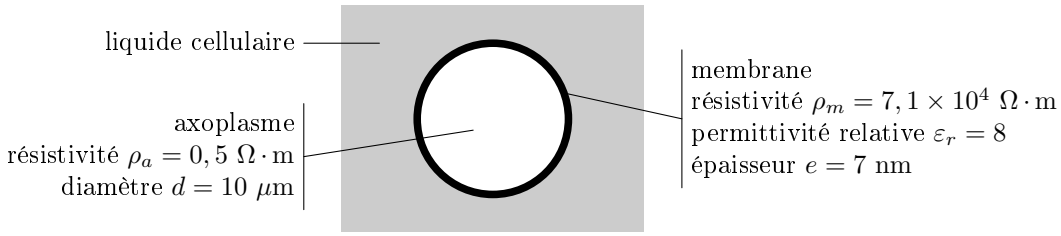


Schéma d'un axone myélinisé



Vue en coupe schématisée d'un axone

Données

Formule d'analyse vectorielle : $div\,(f\,\vec{v}) = f\,div\,(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad f}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Masse molaire de l'air : $M_{\mathrm{air}} = 28,8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$
Masse volumique de l'eau : $\rho_{\mathrm{eau}} = 1,00 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Rapport des capacités thermiques massiques isobare et isochore de l'air : $\gamma = C_p/C_v = 1,40$

Présentation du sujet

Ce sujet, inspiré du problème PC 2015 du concours Centrale -Supélec, est composé de parties indépendantes. Il s'intéresse à différents types d'ondes scalaires mises en jeu lors de l'écoute d'un instrument de musique à cordes.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.

I- Onde sur une corde

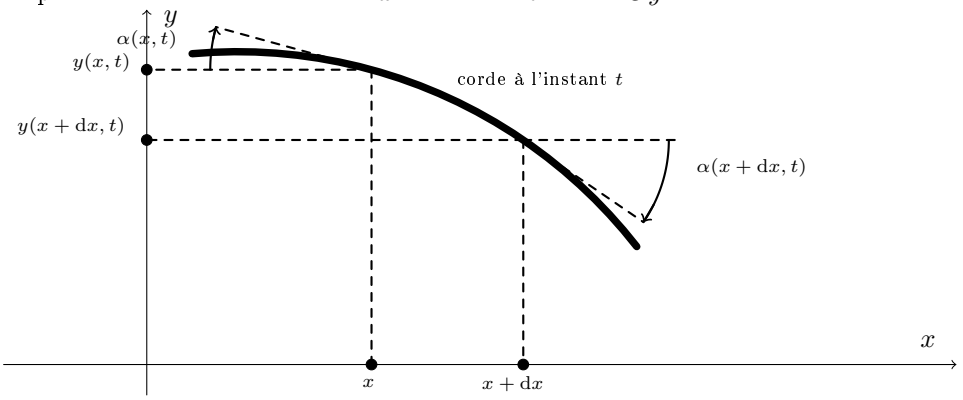
Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L. Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

I.A - Equation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

1) Mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.



On note $T(x,t)$ la norme de la tension de la corde en mouvement et on fait les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox, ce qui entraîne : $|\frac{\partial y}{\partial x}| \ll 1$; ce déplacements sont tellement petits que la tension de la corde en mouvement est : $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ avec $|T_1(x,t)| \ll T_0$ et $\frac{|T_1(x,t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $|\frac{\partial y}{\partial x}|$; pour la même raison, on ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x,t)$ et en ses dérivées ;
- On néglige les effets de la pesanteur ;
- La corde est inextensible et parfaitement flexible (sans raideur).

1.a) On considère l'élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde. En déduire que l'ébranlement $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles (1) : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ.

1.b) Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

1.c) Calculer c pour :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3,0\ \mathrm{g \cdot m^{-1}}$, tension $T_0 = 103$ N ;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, tension $T_0 = 850$ N, diamètre $\phi = 1,2$ mm.

I.B - Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$.

2) Modes propres, fréquences propres

2.a) On cherche des solutions de l'équation (1) sous la forme : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(k x + \psi)$ avec ω et k deux constantes positives. Quelle est la relation entre ω et k ?

2.b) Montrer que seulement certaines fréquences sont possibles, qu'on appellera fréquences propres de la corde. On en donnera leurs expressions, ainsi que celle de leur mode propre associé, c'est à dire de l'élongation pour une fréquence propre.

2.c) Définir les ventres et les nœuds de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ? On donnera le résultat à l'aide de la longueur d'onde λ.

2.d) Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2.e) Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

2.f) On considère les cordes de guitare et de piano dont on a donné les caractéristiques précédemment. La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré$_2$). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

II- Ondes acoustiques

II.A - Propagation d'ondes acoustiques dans l'air

Les vibrations de la corde de l'instrument se transmettent à l'air.

3) On s'intéresse donc à la propagation unidimensionnelle (selon Ox) d'ondes sonores dans un fluide. Un fluide, supposé parfait et soumis aux seules forces de pression, est caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes P_0 de la pression et ρ_0 de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_s. Le passage d'une onde sonore crée une perturbation et le fluide se déplace en de petits mouvements autour de l'équilibre, les champs de pression et de masse volumique devenant : $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ et $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$. La vitesse est $\vec{v}(x,t)$.

3.a) Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Écrire et linéariser les équations locales de la mécanique des fluides et l'équation traduisant l'hypothèse thermodynamique effectuée. Établir l'équation de propagation des ondes acoustiques pour la surpression. En déduire l'expression de la célérité c de ces ondes.

3.b) Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Calculer c dans l'air à la température de 290 K. La célérité des ondes acoustiques dans l'eau est de l'ordre de $1500\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Qu'est ce qui peut expliquer cette différence par rapport à celle trouvée dans l'air ?

3.c) À partir des équations précédentes, établir l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0\, v^2 + \frac{1}{2}\chi_s\, p^2\right) + div\,(p\,\vec{v}) = 0$$

Donner la signification physique de cette équation : identifier et interpréter chacun de ses termes.

4) On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω : $\underline{p}(x,t) = p_0\, \mathrm{e}^{j(\omega t - k x)}$. On définit l'impédance acoustique liée à une telle onde comme le quotient $Z = p/v$.

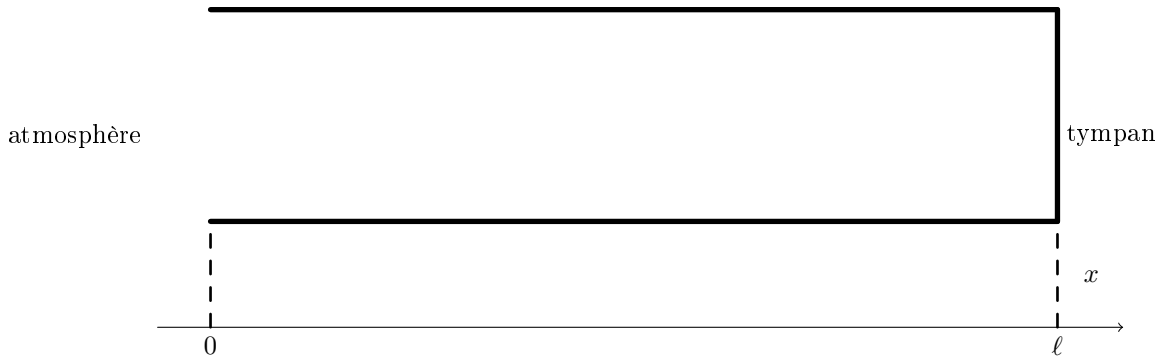
4.a) Dans un fluide illimité, montrer que cette impédance ne dépend que des caractéristiques du fluide et l'exprimer en fonction de la masse volumique ρ_0 et de la célérité c. Calculer Z pour l'air et pour l'eau dans les conditions des questions précédentes.

4.b) Exprimer l'intensité I de cette onde en fonction de p_0 et Z.

4.c) Calculer les amplitudes la surpression et de de la vitesse du fluide dans le cas d'une telle onde sonore au seuil d'audition puis au seuil de la douleur. Conclure sur la validité de l'approximation acoustique.

II.B - Le conduit auditif de l'oreille externe

5) On modélise le conduit auditif de l'oreille externe comme un tuyau cylindrique d'axe Ox, de longueur $\ell = 3,0$ cm, rempli d'air. Ce tuyau est en contact avec l'atmosphère en $x = 0$, avec le tympan en $x = \ell$.



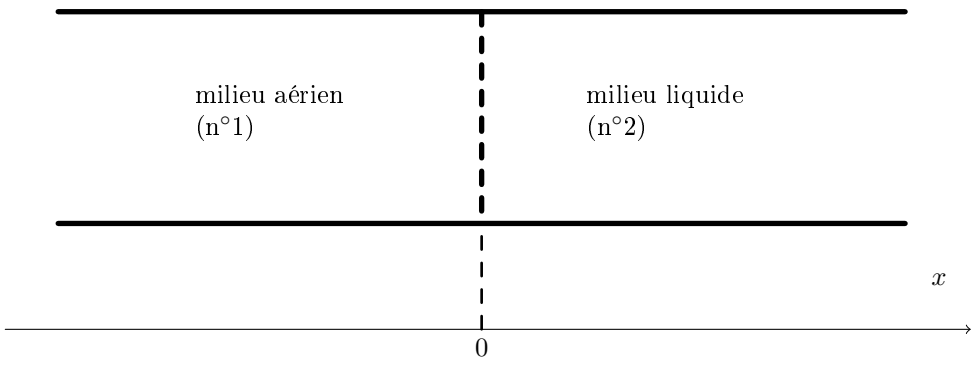
5.a) Décrire ce que ces conditions aux limites imposent aux ondes acoustiques stationnaires dans le conduit auditif.

5.b) En déduire littéralement et numériquement les fréquences des sons qui sont particulièrement amplifiés dans le conduit auditif.

II.C - Le rôle de l'oreille moyenne

L'oreille moyenne transfère le son du milieu aérien de l'oreille externe au milieu liquide de l'oreille interne.

6) On suppose dans cette question que la chaîne d'osselets de l'oreille moyenne n'existe pas, afin d'en comprendre l'utilité. Ainsi, on imagine que le contact entre milieu aérien et milieu liquide se fait sans intermédiaire :



Une onde acoustique incidente plane progressive harmonique se propage dans la direction de l'axe Ox d'un tuyau cylindrique. Une surface plane de masse négligeable sépare l'espace en deux régions occupées par deux fluides parfaits. Le fluide 1 occupe l'espace s'étendant de $-\infty$ à $x = 0$ et le fluide 2 l'espace s'étendant de $x = 0$ à $+\infty$. Les impédances acoustiques seront notées Z_1 et Z_2 et la célérité des ondes acoustiques s'y propageant, c_1 et c_2. Une partie de l'onde acoustique incidente est réfléchie à l'interface entre les deux milieux alors qu'une autre est transmise.

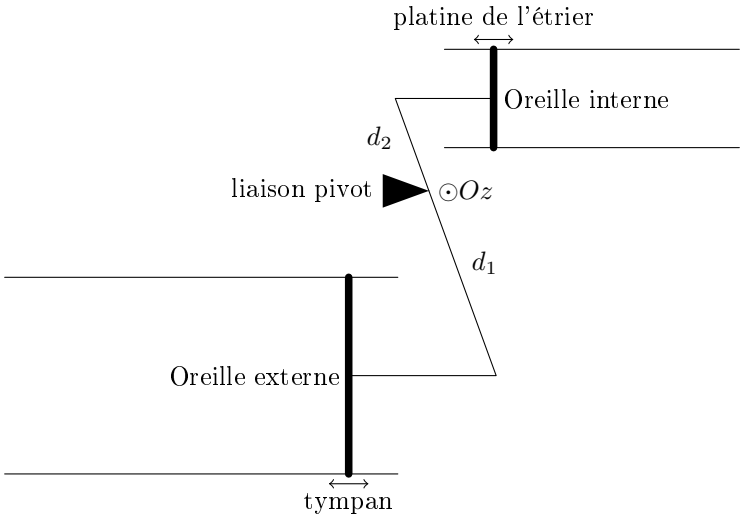
6.a) Quelles relations les grandeurs liées aux ondes acoustiques présentes dans les deux milieux vérifient-elles à la traversée de l'interface ?

6.b) Déterminer les coefficients complexes de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ pour la surpression de l'onde acoustique incidente en fonction de Z_1 et Z_2.

6.c) Déterminer R et T, coefficients de réflexion et de transmission relatifs à l'intensité sonore I en fonction de Z_1 et Z_2.

6.d) Calculer T au passage de l'air à l'eau. Quelle est la chute de niveau sonore correspondant au passage de l'air à l'eau ?

7) L'étrier (de moment d'inertie quasi-nul) peut tourner autour d'un axe Oz (fixe dans le référentiel de l'oreille, supposé galiléen) grâce à une liaison pivot (correspondant à l'ancrage de l'enclume) supposée parfaite. Les longueurs d_1 et d_2 des bras de levier diffèrent du fait des longueurs inégales des osselets et sont telles que $d_1/d_2 \approx 1,3$.



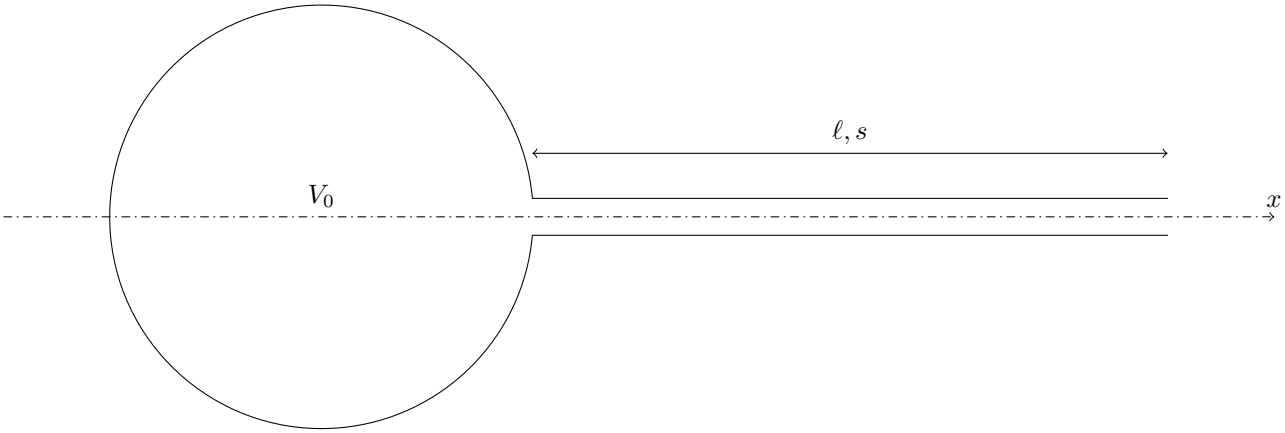
7.a) Sachant que la surface de la platine de l'étrier est environ 20 fois inférieure à celle du tympan, déterminer l'amplification de pression théorique correspondant.

7.b) À quel gain cela correspond-t-il pour le niveau d'intensité acoustique ? Conclure sur l'utilité de la chaine d'osselets.

II.D - L'oreille interne

La platine de l'étrier communique les vibrations au fluide contenu dans la cochlée. Au milieu du XIX^{e} siècle, Ludwig von Helmholtz émit l'hypothèse que des résonateurs accordés aux différentes fréquences audibles étaient répartis le long de la membrane basilaire. On se propose dans ce qui suit d'étudier ce modèle de résonateurs.

8) On considère une cavité sphérique de volume V_0 ouverte sur l'extérieur par un tube de longueur ℓ et de section s. Le volume V_0 est supposé très grand devant le volume du tube. Le fluide dans la cavité, dans le tube et à l'extérieur, est de l'eau de masse volumique ρ_0 et de coefficient de compressibilité isentropique χ_s.



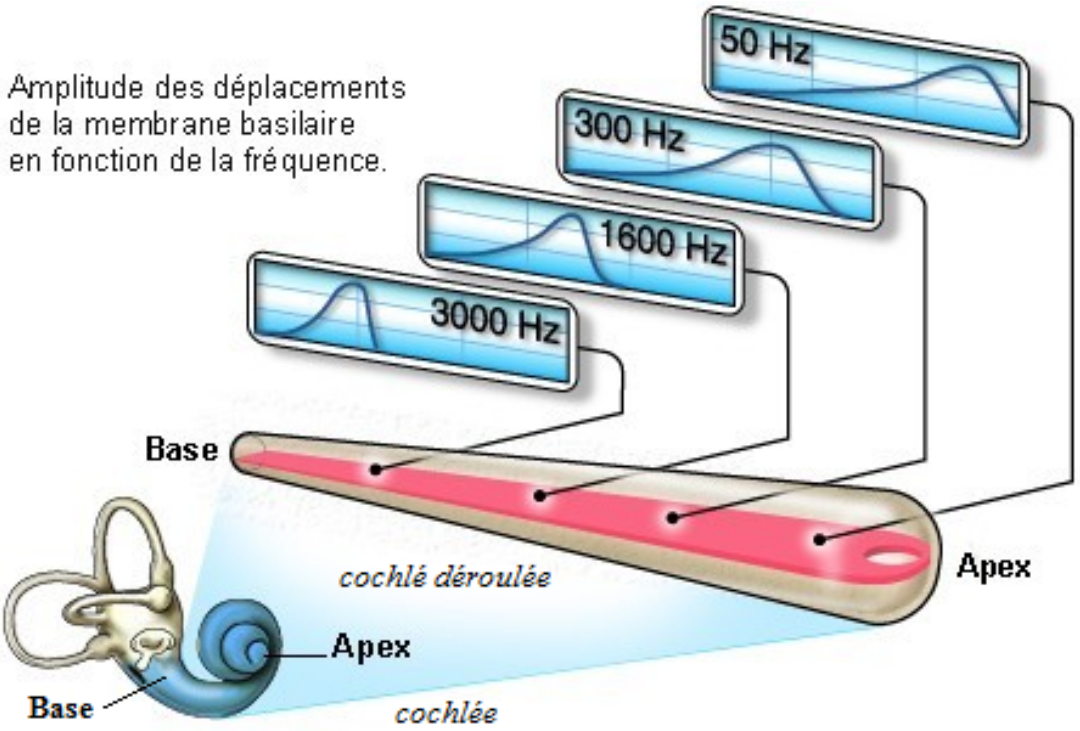
A l'équilibre, la pression est partout P_0 et on repère la position de la masse $m = \rho_0\, s\, \ell$ de fluide dans le tube par l'abscisse $x = 0$. Sous l'effet d'une onde acoustique de pression $P_{ext}(t) = P_0 + p_m \cos(\omega\, t)$ à l'extérieur du dispositif, la masse m de fluide dans le tube (repérée par $x(t)$) oscille en bloc et la pression dans la cavité $P_{int}(t)$ varie de façon isentropique.

8.a) Montrer que $P_{int}(t) = P_0 - \frac{s\, x(t)}{V_0\, \chi_s}$.

8.b) Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la masse m de fluide dans le tube en supposant que cette masse vibre en bloc à la vitesse $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x$. Montrer que $x(t)$ suit l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de c, s, ℓ et V_0, où c est la célérité des ondes acoustiques dans le fluide.

8.c) Montrer en quoi il s'agit d'un résonateur.

9) Dans le cadre du modèle de Helmholtz de "tonotopie passive", proposer un schéma avec quatre résonateurs de Helmholtz le long de la membrane basilaire, de façon à expliquer que les hautes fréquences excitent la base de la membrane alors que les fréquences basses en excitent l'extrémité (l'apex).

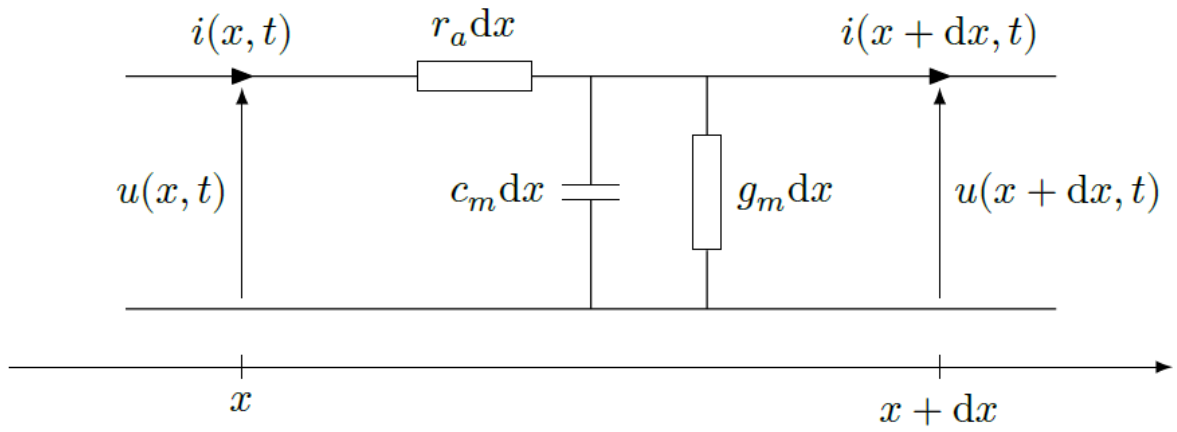


III- Ondes électriques

Les cils des cellules ciliées qui se trouvent sur la membrane basilaire s'inclinent de quelques millièmes de degré et déclenchent des signaux électriques que les nerfs transmettent au cerveau par les axones (ou fibres nerveuses).

III.A - Modélisation électrique de l'axone myélinisé

10) Chaque longueur élémentaire de longueur dx de la fibre nerveuse est modélisée par le schéma suivant :



avec $r_a = 6,4\times10^{9}\ \Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $c_m = 0,32\times10^{-6}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, et $g_m = 0,3\times10^{-3}\ \mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

10.a) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.

10.b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

III.B - Propagation de l'onde électrique le long d'un axone myélinisé

11) On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique telle que $\underline{u}(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t-k\,x)}$.

11.a) À quelle condition l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en

$$(3)\quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a\,c_m\frac{\partial u}{\partial t}$$

11.b) À quelles fréquences cela correspond-il ? Conclure.

12) On supposera que l'équation de propagation suivie par l'onde électrique est l'équation (3).

12.a) Quel est le phénomène décrit par cette équation ? Citer d'autres exemples analogues.

12.b) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Ecrire les solutions $u(x,t)$.

12.c) Montrer que le milieu est dispersif. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

12.d) Montrer que le milieu est absorbant. Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.

— FIN —