

## *La terre, la mer et un peu de vent....*

### **Problème 1 : Subduction et rebond post glaciaire**

On se propose de modéliser le comportement dynamique de la partie la plus déformable du manteau terrestre que l'on appelle l'asthénosphère. Les deux parties du problème sont indépendantes et conduisent à deux estimations de la viscosité de l'asthénosphère.

Dans tout le problème, l'asthénosphère est assimilable à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ .

La courbure terrestre est négligée et les écoulements supposés bidimensionnels dans le plan  $xOz$ . L'axe  $Oz$  est orienté vers le haut, le milieu est infini dans la direction  $Oy$ . L'accélération  $\vec{g}$  de la pesanteur est uniforme et donc dirigée dans le sens des  $z$  décroissants.



Plage relevée dans la région de Børselv en norvège par rebond post glaciaire

### **A Equilibre d'une plaque tectonique**

On se place dans toute cette partie en régime permanent

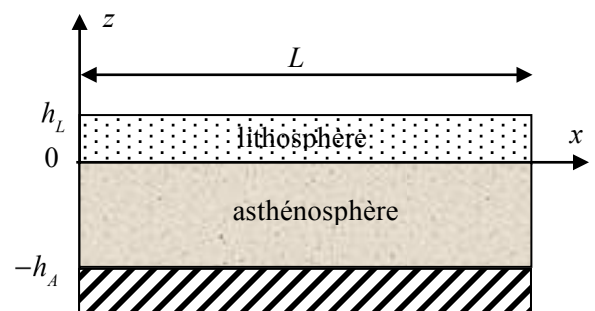
On considère une plaque tectonique solide, appelée plaque lithosphérique, de longueur  $L$ , de largeur  $l$  (selon  $Oy$ ) et d'épaisseur  $h_L$ , se déplaçant suivant l'axe  $Ox$  à la vitesse constante et uniforme  $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ .

Les densités de la lithosphère et de l'asthénosphère sont ici supposées égales. Cette plaque repose sur une plaque d'asthénosphère, de même largeur et d'épaisseur  $h_A$ .

On prend l'origine des ordonnées sous la plaque, à la surface de l'asthénosphère. On admet que  $L$  est très supérieur à  $h_A$  et

$h_L$  et que la vitesse dans l'asthénosphère est de la forme  $\vec{v} = v_x(z) \vec{u}_x$ .

Au fond de l'asthénosphère, en  $z = -h_A$ , la vitesse est nulle. On note  $P(x, z)$  la pression dans l'asthénosphère.



- 1) a) Faire un bilan des forces exercées sur une particule fluide élémentaire de l'asthénosphère.

On suppose pour les questions 1) et 2) que la pression n'est fonction que de  $z$ .

Déduire, compte-tenu des hypothèses du problème, les deux équations différentielles scalaires vérifiées par le champ de pression et de vitesse.

On rappelle l'expression de la densité volumique de forces de viscosité :  $\frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \Delta \vec{v}$ .

- b) En déduire en fonction de  $v_0$ ,  $h_A$  et  $\eta$  la loi de vitesse  $v(z)$  dans l'asthénosphère et la contrainte de cisaillement  $\vec{\tau}$  exercée dans l'asthénosphère et donc sur la face inférieure de la lithosphère.

- 2) Exprimer en fonction de  $v_0$ ,  $h_A$ ,  $h_L$  et  $l$  le débit volumique  $D_v$  de matière associé au déplacement de l'asthénosphère et de la lithosphère.

- 3) On observe expérimentalement que le débit volumique de l'ensemble {lithosphère + asthénosphère} est nul. Or, le débit calculé en 2) ne peut pas s'annuler. Pour lever cette contradiction, on suppose maintenant

l'existence d'un gradient de pression horizontal constant  $\frac{\partial P}{\partial x} = k \neq 0$ , ce qui permet l'existence dans une partie de l'asthénosphère d'un flux de retour et l'obtention d'un débit volumique global nul.

En corrigeant l'une des équations de la question 1), établir la nouvelle loi de vitesse  $v(z)$  dans l'asthénosphère en fonction de  $v_0, h_A, \eta$  et  $k$ . En déduire que la valeur du gradient de pression horizontal

est  $\frac{\partial P}{\partial x} = 12\eta \frac{v_0}{h_A^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{h_L}{h_A} \right)$ , puis exprimer la loi de vitesse  $v(z)$  en fonction de  $v_0, h_A$  et  $A = 6 \left( \frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right)$

- 4) Déterminer en fonction de  $v_0$  et  $A$  la profondeur à laquelle la vitesse s'annule dans l'asthénosphère, ainsi que la vitesse de retour maximale, ie la plus petite valeur de  $v_x$ .

Tracer l'allure de  $\frac{v(z)}{v_0}$  en fonction de  $\frac{z}{h_A}$  pour  $A = 4$

- 5) Déterminer l'expression de la contrainte de cisaillement dans l'asthénosphère.

En déduire celle s'exerçant sur la plaque en mouvement en fonction de  $v_0, h_A, h_L$  et  $\eta$ .

Quelle différence présente-elle avec celle obtenue à la question 1) ?

- 6) a) Déterminer l'expression du champ de pression  $P(x, z)$  à une constante d'intégration près.

b) Justifier simplement que la lithosphère repose sur une surface isobare.

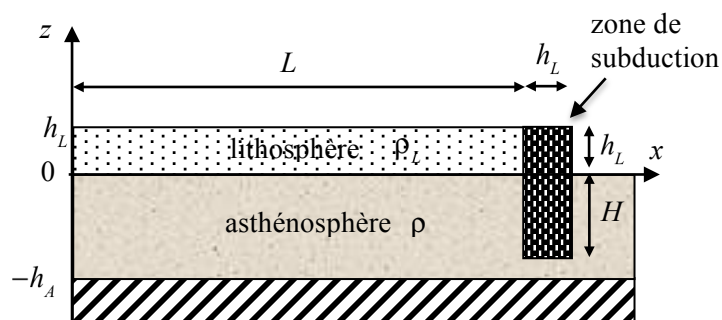
c) Montrer que l'existence du gradient de pression horizontal doit conduire à une inclinaison de la plaque lithosphérique, puis exprimer la différence de hauteur  $\Delta h$  entre les deux extrémités de la plaque distantes de  $L$ . On admet que cet inclinaison est suffisamment faible pour que la vitesse d'écoulement dans l'asthénosphère reste horizontal.

- 7) La lithosphère est constituée du même matériau que l'asthénosphère, et n'en diffère que par une température inférieure de  $\Delta T$ .

Les masses volumiques de la lithosphère et de l'asthénosphère jusqu'ici considérées comme égales sont en fait légèrement différentes et seront notées respectivement  $\rho_L$  et  $\rho$ .

On considère une zone de subduction modélisée par un plongement de la plaque lithosphérique (représentée en sombre à droite) qui s'enfonce

verticalement dans l'asthénosphère sur une profondeur  $H$ . La plaque en subduction conserve son épaisseur  $h_L$  et sa température, qui reste donc inférieure de  $\Delta T$  à celle de l'asthénosphère environnante.



Le coefficient d'expansion thermique de la plaque est  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ , avec  $\alpha$  constant. Quel est le poids

apparent  $\vec{F}$ , résultante du poids et de la poussée d'Archimède, de la zone en subduction ?

On remarquera que la "petite" valeur de  $\alpha$  permet d'écrire  $\Delta \rho = -\rho \alpha \Delta T$  pour exprimer simplement  $\rho_L$  en fonction de  $\rho, \alpha$ , et  $\Delta T$ . On effectuera les applications numériques avec :

$$\rho = 3200 \text{ kg.m}^{-3}, g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}, \alpha = 2.10^{-5} \text{ K}^{-1}, h_L = 100 \text{ km}, H = 300 \text{ km}, \Delta T = 800 \text{ K}$$

- 8) On admet que les seules forces en appliquées à la plaque sont une traction horizontale et la friction visqueuse calculée en 5) due à l'entraînement de l'asthénosphère. On admet également que la force de traction est due à la zone de subduction, et a pour module le poids apparent  $F$  de cette zone.

Exprimer la viscosité de l'asthénosphère en fonction de  $F, h_L, L, x = \frac{h_A}{h_L}$  et  $v_0$ .

- 9) Exprimer la différence de hauteur  $\Delta h$  entre les deux extrémités de la plaque en fonction de  $F, h_L, \rho, g$  et  $x$ .

10) Déterminer un ordre de grandeur de la viscosité  $\eta$  et du nombre de Reynolds pour  $h_A \approx 1000$  m.

On donne  $L = 6000$  km,  $l = 1$  m et  $v_0 = 5$  cm/an.

Comment qualifie-t-on de tels écoulements ?

## B Rebond post glaciaire

On considère un écoulement bidimensionnel, qui peut dépendre du temps, d'un fluide newtonien incompressible où le champ des vitesses est donné par :  $\vec{v} = v_x(x, z, t)\vec{u}_x + v_z(x, z, t)\vec{u}_z$  et le champ de pression  $P(x, z)$ .

11) Ecrire l'équation de Navier Stokes et en déduire les deux relations différentielles scalaires reliant les composantes de la vitesse et le champ de pression.

12) On modélise le manteau terrestre par un demi espace visqueux newtonien incompressible qui vérifie donc les équations de la question précédente. Contrairement à la première partie, on néglige l'existence de la lithosphère et on admet que l'asthénosphère s'étend jusqu'à une profondeur infinie.

On applique sur cette surface une pression variant sinusoïdalement  $P_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . Sous cette pression,

la surface se déforme et présente une topographie  $h = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ . On notera  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et on admet que

cette topographie reste faible c'est à dire que  $kh_0 \ll 1$ . Les quantités  $P_0$  et  $h_0$  sont indépendantes de  $x$  et  $z$ , mais pourront dépendre du temps.

Tenant compte de la très forte viscosité obtenue en 10) justifier qualitativement pourquoi on peut négliger les termes d'accélération, même en régime dépendant du temps, et simplifier les deux relations de 11).

13) On cherche une solution de l'écoulement induit par une pression sinusoïdale de surface sous la forme

$$v_x(x, z) = U(z) \sin(kx) \quad v_z(x, z) = V(z) \cos(kx) \quad P(x, z) = -\rho g z + P_m(z) \cos(kx)$$

a) Ecrire le système des trois équations différentielles vérifiées par  $U(z)$ ,  $V(z)$  et  $P_m(z)$ .

b) En déduire que  $V(z)$  vérifie l'équation différentielle  $\frac{d^4 V(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 V(z)}{dz^2} + k^4 V(z) = 0$

14) On peut vérifier facilement (mais ce n'est pas demandé) que

$$v_x(x, z) = -\frac{Ak + B + Bkz}{k} \exp(kz) \sin(kx) \quad v_z(x, z) = (A + Bz) \exp(kz) \cos(kx)$$

$$\text{et } P(x, z) = -\rho g z + 2k\eta B \exp(kz) \cos(kx)$$

sont des solutions générales du problème avec  $A$  et  $B$  indépendants de  $x$  et  $z$ .

Les conditions aux limites sur la surface déformée sont telles que la vitesse horizontale est nulle sur la surface déformée et que la force surfacique verticale est égale à la pression appliquée soit

$$v_x(x, h_0 \cos(kx)) = 0 \quad P(x, h_0 \cos(kx)) - \tau_z(x, h_0 \cos(kx)) = P_0 \cos(kx)$$

avec  $\tau_z(x, z) = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}$  contrainte visqueuse (expression que l'on ne demande pas d'établir)

En se plaçant toujours dans le cas  $kh_0 \ll 1$ , établir que les constantes  $A$  et  $B$  s'expriment comme

$$A = -\frac{B}{k} \quad \text{avec } B = \frac{P_0 + \rho g h_0}{2\eta}.$$

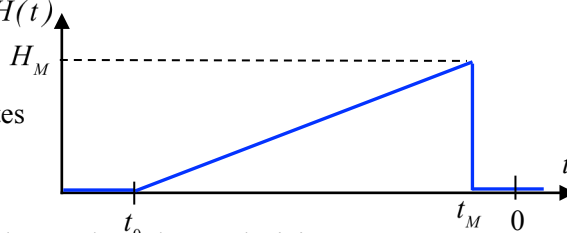
15) En identifiant la vitesse verticale en surface à  $\frac{dh}{dt}$ , montrer que l'amplitude de la topographie vérifie :

$$\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -\beta P_0 \quad \text{avec } \alpha = \frac{2\eta k}{\rho g} \quad \text{et } \beta = \frac{1}{\rho g}$$

Quelle est la dimension et la signification physique de  $\alpha$  ? Que représente cette équation en régime permanent ?

16) A la date  $t_0 = -100000$  ans, commença la dernière glaciation.  $H(t)$

A cette époque, un refroidissement de climat conduisit à la formation de vastes calottes de glace sur l'Amérique du nord et la Scandinavie. On admet que la quantité de glace des calottes a cru linéairement jusqu'à la date  $t_M = -10000$  ans atteignant une épaisseur maximale  $H_M$ .



Un brusque réchauffement climatique fit alors fondre très rapidement les calottes glaciaires.

On est actuellement au temps  $t = 0$ , c'est à dire 10000 ans après la fonte des calottes. On suppose que le modèle plan et bidimensionnel développé précédemment s'applique. On admet aussi que la hauteur de glace  $h_g(x, t)$  a vérifié :  $h_g(x, t) = H(t)(1 + \cos(kx))$  où  $H(t)$  est donné par le graphe ci contre.

a) Interpréter ou dessiner l'allure d'une calotte glaciaire suggéré par l'énoncé du problème, et expliciter la loi  $H(t)$ .

b) En déduire la pression  $P_0(t)$  exercée par la calotte de glace d'épaisseur  $H(t)$ .

c) Au temps  $t = t_0$ , la surface de la terre était sans déformation. La densité de la glace vaut  $\rho_g = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Montrer que  $h_0(t)$  est solution de l'équation  $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -K(t - t_0)$  avec  $K$  une constante positive faisant intervenir les paramètres du problème, puis résoudre cette équation.

La solution particulière pourra être cherché sous la forme :  $h_0^{SP}(t) = B(t - t_0) + C$

d) En déduire l'enfoncement du niveau du sol  $h_M$  sous le poids de la glace à  $t = t_M$  en fonction de  $\rho_g$ ,  $\rho$ ,  $H_M$ ,  $t_M$ ,  $t_0$  et  $\alpha$ .

17) Calculer la vitesse maximale du soulèvement *actuel* et la profondeur actuelle des régions qui furent couvertes de glace en fonction de  $h_M$ ,  $\alpha$  et  $T_M$ .

18) Une étude géologique des paléo-rivages de la mer baltique permet de mesurer la valeur du paramètre  $\alpha$  avec une bonne précision. On observe que  $\alpha = 4500$  ans.

a) En admettant que la calotte scandinave avait une taille caractéristique  $\lambda = 3000 \text{ km}$ , quelle est la valeur numérique de la viscosité du manteau terrestre ? Comparer avec la valeur trouvée en 10)

b) La calotte scandinave avait une épaisseur maximale de 3 km. Quelle est la vitesse actuelle de surrection de la Scandinavie ?

*La surrection est le phénomène de formation d'un relief par élévation du manteau terrestre.*

c) Quelle est l'amplitude actuelle de la dépression qui demeure au dessous des zones précédemment glacées de Scandinavie ? La baie d'Hudson et la mer Baltique correspondent à des dépressions post glaciaires. La mer Baltique est couverte de 80 m d'eau. Le modèle développé permet-il de prévoir son avenir ?



## Problème 2 : Etude d'un phénomène de surcote à Dunkerque

Le passage de la tempête *Xaver* les 5 et 6 décembre 2013 en mer du Nord a provoqué un phénomène de surcote c'est à dire une surélévation importante du niveau de la mer dans plusieurs pays européens.

Ce phénomène est la conséquence de plusieurs facteurs : un coefficient de marée important, une forte dépression atmosphérique et un vent fort.

Le but de cette étude est d'analyser ces différents facteurs et de confronter les résultats obtenus aux relevés des organismes de météorologie sur le site de Dunkerque.



Digue de Dukerque sumergée par une surcote

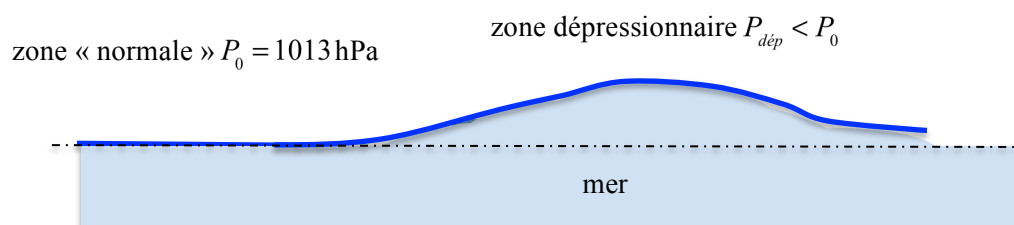
Les applications numériques seront faites en utilisant les données fournies par les différents documents.

- 1) Rappeler rapidement l'origine du phénomène de marées. Pourquoi leurs amplitudes varient-elles suivant les jours ?

Application à *Xaver*

Commenter l'influence de la marée lors de la tempête *Xaver*

- 2) Le schéma ci dessous représente l'état de la surface de la mer au repos, c'est à dire en l'absence de vent. En notant  $\rho_{\text{eau}}$  la masse volumique de l'eau, exprimer l'élévation  $h_0$  du niveau de la mer au centre de la zone dépressionnaire.



Application à *Xaver*

Calculer  $h_0$  au centre de la dépression le 5 décembre 2013.

- 3) On considère maintenant la mer soumise à un vent de vitesse caractéristique  $V_0$ . En notant  $L$  la longueur typique des rides à la surface de l'eau, montrer que l'épaisseur de la couche limite de l'air au dessus de la mer a pour ordre de grandeur  $\delta = \sqrt{\frac{\eta_{\text{air}} L}{\rho_{\text{air}} V_0}}$  où  $\rho_{\text{air}}$  est la masse volumique de l'air et  $\eta_{\text{air}}$  sa viscosité dynamique.

On pourra admettre que dans la couche limite, les termes diffusifs et convectifs de quantité de mouvement dans l'air sont du même ordre de grandeur.

Application à *Xaver*

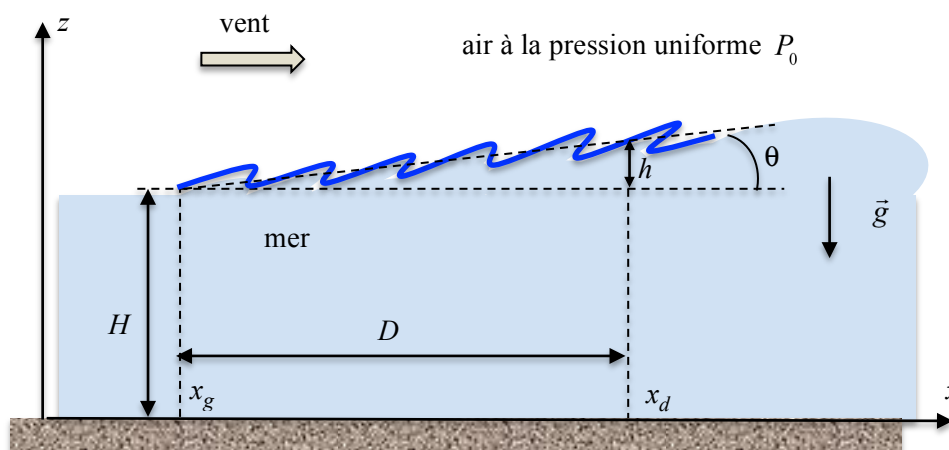
On donne :  $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$   $\eta_{\text{air}} = 1,8.10^{-5} \text{ Pl}$   $L = 10 \text{ cm}$

Estimer la valeur de  $\delta$ . Commenter.

- 4) Justifier l'ordre de grandeur  $\frac{dF}{dS} \approx \eta_{\text{air}} \frac{V_0}{\delta}$  de la force tangentielle par unité de surface qu'exerce le vent sur la mer.

5) Un vent important peut incliner la surface de la mer comme l'indique le schéma suivant :

On négligera la houle et les courants marins. On admettra aussi que l'inclinaison  $\theta$  de la surface de la mer avec l'horizontale est très faible.



- Déterminer les lois de pression  $P_g(z)$  et  $P_d(z)$  dans la mer respectivement en  $x_g$  et  $x_d$  à la gauche et à la droite du domaine de largeur  $D$ . On admettra que les lois de l'hydrostatique s'appliquent.
- Enoncer qualitativement les forces s'exerçant sur le domaine de mer de longueur  $D$  et de largeur  $l$  (selon  $Oy$  la direction normale au plan de la figure).
- Déterminer les expressions des différentes forces contenues dans le plan  $xOz$ , en se rappelant que  $\theta$  est « très petit ».
- Compte tenu des hypothèses choisies, que peut on dire simplement de la résultante de ces forces selon la direction horizontale ?

Etablir alors la relation  $\eta_{air} \frac{V_0}{\delta} D = \frac{1}{2} \rho_{eau} g \left( (H+h)^2 - H^2 \right) + P_0 h$

puis en déduire l'expression de  $h$ .

Pour éviter de lourds calculs, on pourra faire une hypothèse sur l'ordre de grandeur de  $h$ , que l'on vérifiera a posteriori avec l'application numérique...

#### Application à Xavier

La mer du Nord a une profondeur de l'ordre de 40 m entre la France et l'Angleterre.

On considérera que l'inclinaison de la mer s'est effectuée sur toute la distance séparant Dunkerque de la pointe la plus à l'est de la cote anglaise.

Justifier le rôle du vent dans la surcote de Dunkerque, puis calculer l'augmentation de hauteur de la mer engendrée par le vent.

- 6) On se propose maintenant de vérifier l'ordre de grandeur de la vitesse du vent produite par la dépression en mer du Nord.

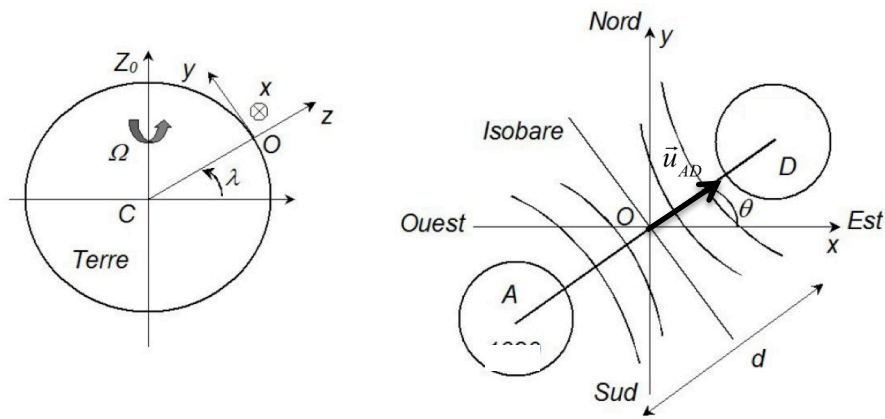
On considère un point  $M$  de l'atmosphère terrestre repéré par ses coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère local  $(O, x, y, z)$ , dont l'origine  $O$  se trouve dans un plan méridien à la latitude  $\lambda$ , de l'hémisphère Nord.

L'axe  $Ox$  est dirigé vers l'Est, l'axe  $Oy$  vers le Nord et l'axe  $Oz$  suivant le rayon terrestre.

On considère la situation météorologique schématisée sur la figure, dans laquelle l'axe anticyclone-dépression repéré par le vecteur unitaire  $\vec{u}_{AD}$  fait un angle  $\theta$  avec la direction  $Ox$ .

La distance entre les points de pression  $P_A$  et  $P_D$  est notée  $d$ . On supposera le gradient de pression uniforme et horizontal sur l'axe  $(AD)$ , de norme notée  $k$  :  $\|\overrightarrow{\text{grad}P}\| = k$ .

Au niveau de l'axe  $(AD)$ , les isobares sont perpendiculaires à cet axe et sont localement assimilables à des segments de droite.



Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, on se place dans le référentiel terrestre.

a) Écrire, en négligeant les forces de frottements, le principe fondamental de la dynamique pour une particule d'air dans le référentiel terrestre.  
Que devient cette équation dans le cas de l'équilibre géostrophique où l'accélération de la particule d'air est négligée ?

b) Exprimer les composantes selon  $Ox$  et  $Oy$  du gradient de pression le long de l'axe  $(AD)$ , en fonction de  $k$ ,  $\rho_{air}$  et  $\theta$

c) Déterminer les composantes  $v_x$  et  $v_y$  de la vitesse  $\vec{v}$  supposée contenue dans le plan  $xOy$ , en se limitant au déplacement de l'air à altitude fixe avec  $v_z \approx 0$ .

En déduire que l'air s'écoule au niveau de l'axe  $(AD)$  suivant une direction et un sens que l'on précisera.  
Comment modifier ces conclusions dans l'hémisphère Sud ?

#### Application à Xaver

En exploitant le document 3 déterminer le gradient de pression entre les points repérés par les extrémités de la flèche.

En déduire la direction et le sens du vent et ainsi qu'une estimation de son intensité vers le nord de la France.

On donne la latitude de Dunkerque :  $51^\circ$  Nord

Comparer aux données relevées et conclure.

#### 7) Conclusion

En prenant en compte les différentes causes, comparer la hauteur de la surcote relevée et celle estimée par les calculs.

Commenter, critiquer, proposer des améliorations de la modélisation...



### Document 1 : Coefficients de marée

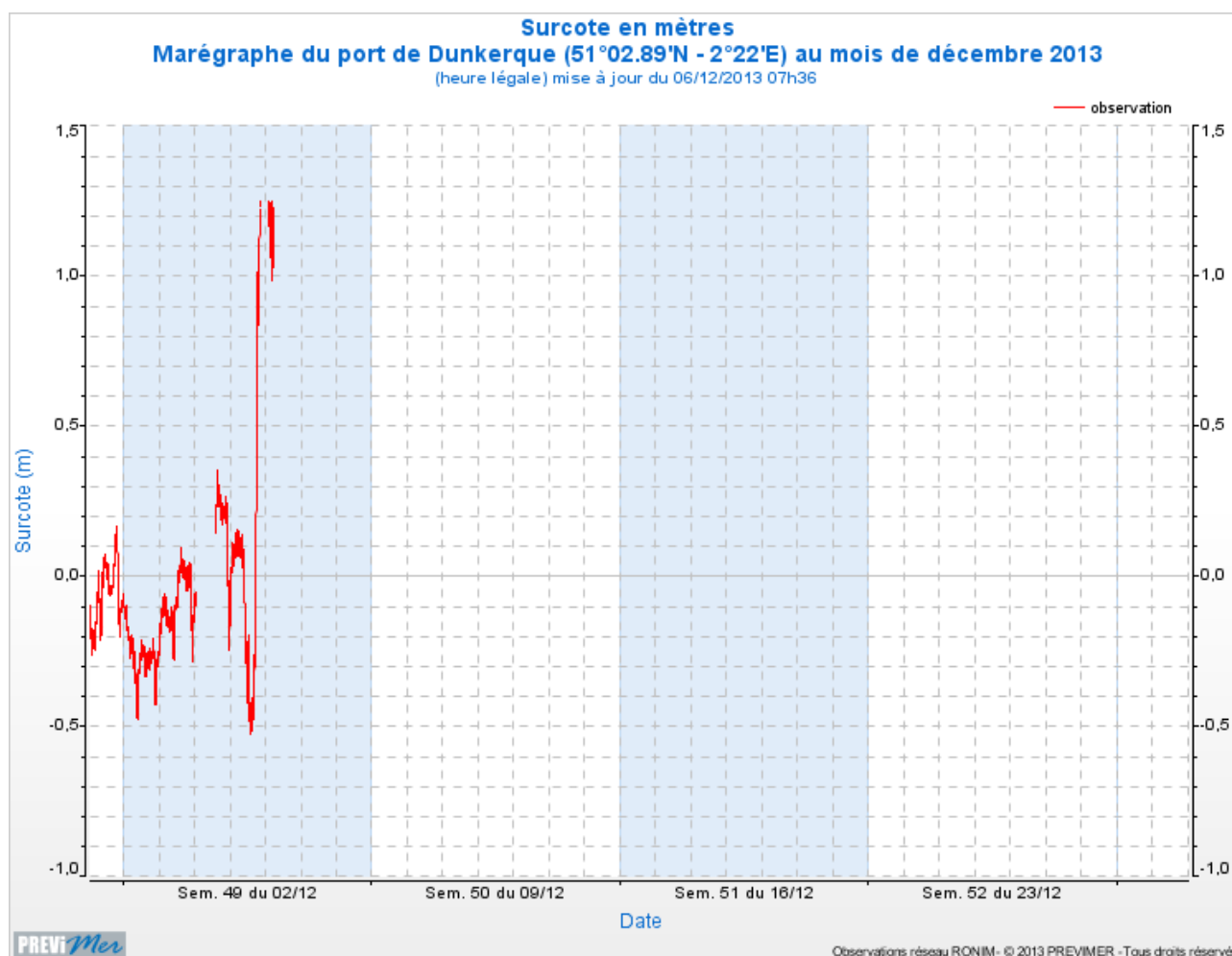
51°03' N  
2°22' E **Dunkerque**

◀ Novembre 2013    **Décembre 2013**    Janvier 2014 ▶

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
25	26	27	28	29	30	1
15 47	39 59	26 30	32 47	52 56	65 71	77 84
2	3	4	5	6	7	8
89	94 98	101 102	103 102	100 98	94 89	84 78
9	10	11	12	13	14	15
72 67	62 58	55 54	54 55	58 60	64 67	70 72
16	17	18	19	20	21	22
75	77 78	79 80	80 79	78 77	75 73	71 68
23	24	25	26	27	28	29
65 61	58 54	51 48	45 44	43 45	48 52	57 64
30	31	1	2	3	4	5
70 77	84 90					

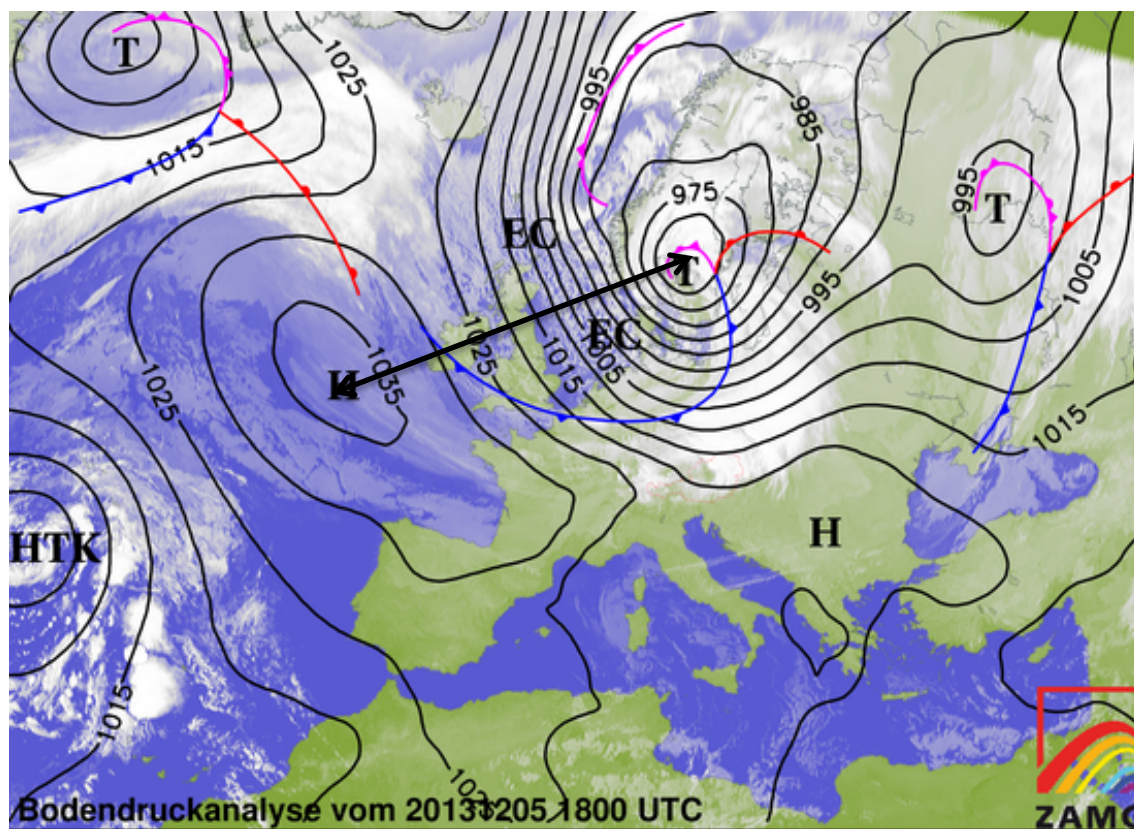
Les coefficients de marée sont des nombres sans dimensions variant entre 20 plus les marées les plus faibles et 120 pour les plus importantes.

### Document 2 : Marégraphe du port de Dunkerque



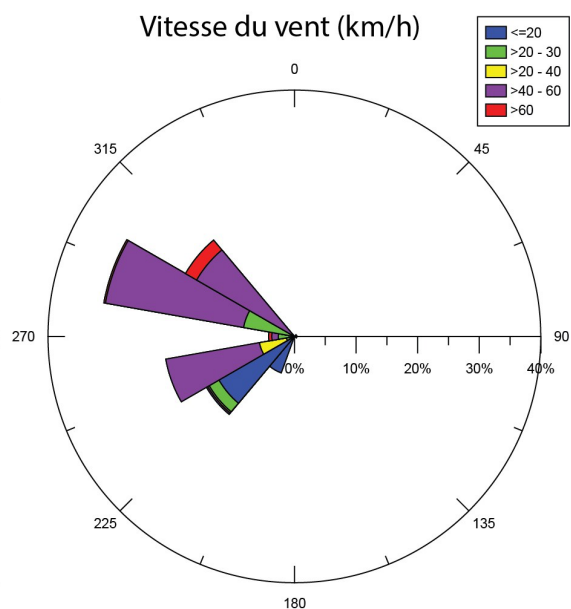
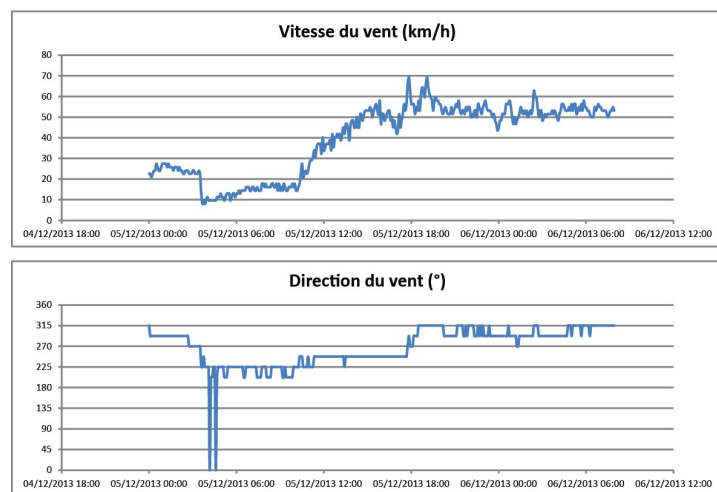
### Document 3 : carte météo





Echelle : 1 cm représente 350 km

#### Document 4 : Relevés anémométriques



Par direction du vent, comprendre : origine du vent !

**Document 5 : Carte géographique**