Enoncé du DS commun de physique n°2 - Thermodynamique

Doc 1 - Histoire de l'âge de la Terre

extraits de "Images de la physique" 2011, disponible à l'adresse http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/IdP2011/03_Krivine.pdf

Hubert Krivine, Laboratoire de physique théorique et modèles statistiques, UMR 8626, CNRS / Univ. Paris-Sud, Orsay

La Terre a un âge et cet âge a une histoire peu banale. Calculé à 4000 ans avant J.-C. à la Renaissance, il sera estimé à quelques dizaines de millions d'années à la fin du XIXe siècle. Il est maintenant fixé à 4,55 milliards d'années. Comment notre planète a-t-elle pu vieillir de plus de 4 milliards d'années en 400 ans ?

L'âge biblique

Pour Aristote, la Terre a toujours existé, tandis que les grandes religions monothéistes (juive, chrétienne et musulmane) introduisirent une création du monde. Notons qu'à la différence de la chronologie moderne, il s'agissait de l'apparition quasi-simultanée de l'Univers, de la Terre, des plantes, des animaux, du genre humain. Pour les savants de la Renaissance, le récit biblique, incontestable, était la seule base de calcul possible.

Donnons quelques dates de naissance établies sur cette base : 3993 av. J.-C., selon Johannes Kepler (1571-1630), 3998 av. J.-C., selon Isaac Newton (1643-1727), 4004 av. J.-C., selon l'archevêque anglican James Ussher, et plus précisément encore le 23 octobre.

Les temps de stratification et d'érosion

La datation par stratigraphie reposait sur les suppositions hasardeuses de la règle de trois : s'il faut cent ans pour déposer un millimètre d'argile et si la couche mesure un mètre, alors le temps de dépôt est de 100 000 ans. Les temps d'érosion, de creusement de vallées ou de canyons ont été étudiés avec cette même méthode. On peut considérer le Danois Niels Stensen (1638-1686), convaincu de la nature biologique des fossiles – ce qui n'était pas évident à l'époque –, comme l'un des pères fondateurs de la stratigraphie.

Edmund Halley (l'homme de la comète, 1656-1742) explique que la salinité de la mer a été apportée par l'eau douce des rivières. Ce n'est pas un paradoxe. L'eau réputée douce des rivières contient en réalité quelques sels provenant des roches qu'elle érode. Elle fournit continûment ces sels à l'océan qui, en permanence, évapore de l'eau douce ; le bilan est donc simple : l'eau de l'océan se charge petit à petit en sels des rivières. À l'appui de cette thèse, les lacs qui ont un déversoir ne sont pas salés, mais le deviennent dès qu'ils sont isolés. Ainsi, en estimant la quantité de sels des océans et le débit total des fleuves (en tonnes de sel par année), on peut déduire le temps nécessaire à leur apport. Halley n'a pas donné d'estimation, mais pensait que son modèle prouverait que la Terre était beaucoup plus vieille qu'on ne le croyait. Plus d'un siècle plus tard, cette idée fut, indépendamment, exploitée par John Joly (1857- 1933). Il estime l'âge de la formation des océans, soit 90 millions d'années. Celui de la Terre est évidemment supérieur. Ce modèle d'apport de sodium par les seules rivières et sans perte est très simple mais erroné : il y a des processus de perte de sels (vents, dépositions).

Georges Louis Leclerc, (comte de) Buffon (1707-1788) s'intéressa aussi aux temps de sédimentation. Impressionné par l'épaisseur des couches sédimentaires des Alpes et la lenteur des dépôts formés par les océans, il aboutit à un âge de quelques millions d'années à près de trois milliards. Prudemment, il ne publia pas ces résultats.

Les temps de refroidissement

Buffon utilise aussi un autre modèle : la Terre actuelle serait le résultat du refroidissement d'une planète composée initialement de roches en fusion. Son hypothèse est celle d'une sphère incandescente (ce qui définit le temps 0) qui se refroidit. On peut à partir de là conduire une expérience. Dans ses forges de Montbard, il chauffe au rouge des sphères de rayons différents et composées de matériaux variés, puis en mesure les temps de refroidissement jusqu'à la température ambiante. Il extrapole ses résultats à une sphère aux dimensions terrestres. Mais il ne dispose d'aucune théorie pour le faire et son extrapolation – linéaire – menée à partir de boulets de dimensions comprises entre 1/2 pouce et 5 pouces, jusqu'au rayon terrestre de 6 400 km, est fausse.

Arrive alors le « secours » de la théorie en la personne de William Thomson (1824-1907) qui deviendra Lord Kelvin. En s'appuyant sur l'équation de la chaleur, il donne d'abord une fourchette de 20-400 millions d'années en 1862, puis la réduit à 20-40 millions en 1897. Kelvin part du même modèle que Buffon : ce qu'il appelle « début de la Terre » (conditions initiales) est une boule à la température uniforme de la roche en fusion, évaluée à 3 900 °C. Très rapidement la température de sa surface, en contact avec le vide extérieur (ce qu'on appelle

les conditions aux limites), se stabilise à un niveau raisonnable, de l'ordre de 20 °C. On le sait parce que la vie s'est développée depuis fort longtemps et exige une température stable de ce niveau. Au centre de la Terre par contre, la température, par inertie thermique, conserve grosso modo sa valeur initiale. Donc, entre la surface de la Terre et son intérieur, il y aura un continuum de température qui va de 20 °C à 3 900 °C. On constate aujourd'hui que lorsqu'on s'enfonce sous la Terre on gagne en moyenne de l'ordre de 3 °C tous les 100 mètres. À la naissance de la Terre, ce gradient était beaucoup plus élevé, presque infini : on passait très rapidement – c'est-à-dire sur une très courte distance – de la température (basse) de surface à la température (élevée) du cœur ; puis le froid, petit à petit, gagne les profondeurs et le gradient diminue, pour atteindre sa valeur actuelle. La façon dont ce gradient diminue avec le temps peut être déterminée théoriquement grâce à l'équation de Fourier : si on connaît les conditions initiales et les conditions aux limites, on en déduit le temps nécessaire pour faire baisser le gradient de température jusqu'à sa valeur actuelle.

Il faut mentionner l'objection qu'avait finalement osé formuler en 1895 John Perry (1850-1920) disciple de Kelvin. Sans introduire de façon complète la convection, il avait supposé que la conduction n'opérait que sur une épaisseur de surface de 100 km, et qu'à l'intérieur régnait une haute « quasi-conductivité ». La figure E1 montre comment les deux théories, utilisant les mêmes données expérimentales, c'est-à-dire le même gradient de température, fournissent des âges totalement différents. La fonction $T(z)$ est schématisée au bout de $t = 0$, puis 20 millions et 2 milliards d'années selon la théorie de Kelvin et celle de Perry. T_0 est la température initiale. La zone en grisé représente la croûte terrestre et la flèche à l'origine, le gradient de température moyen mesuré en surface. En effet, sur des durées géologiques, il y a transport de matériaux dans le manteau terrestre et le refroidissement par convection n'obéit pas à l'équation de la chaleur. Il homogénéise beaucoup plus efficacement la température que le refroidissement par conduction.

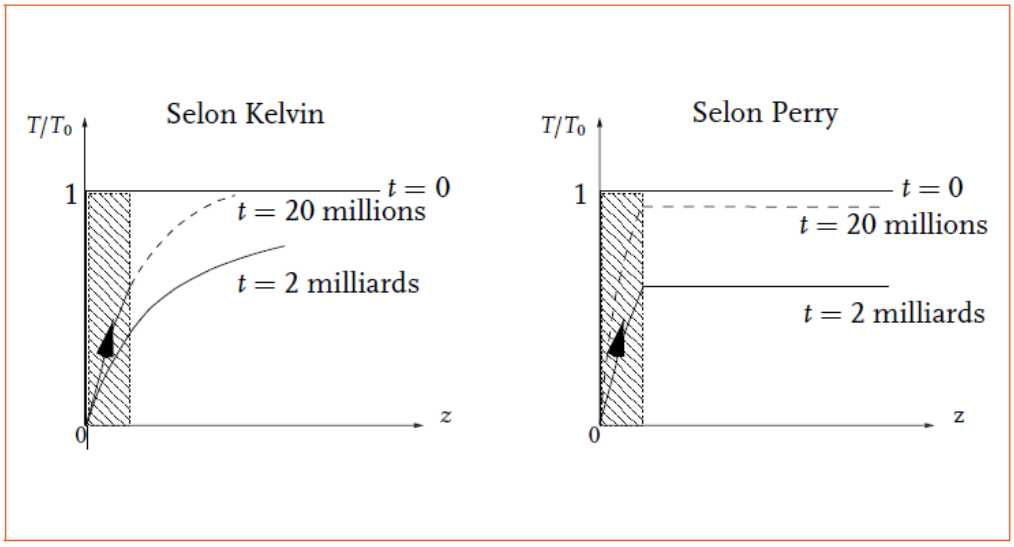


Figure E1 – Courbes schématiques de température de la Terre T/T_0 en fonction de la profondeur z.

T_0 est la température initiale. La zone en grisé représente la croûte terrestre et la flèche à l'origine, le gradient de température moyen mesuré en surface.

La radioactivité

La découverte de la radioactivité, à la fin du XIXe siècle, généra un sous-produit totalement inattendu : une horloge capable de donner un âge absolu à la Terre, âge aujourd'hui fixé à 4,55 milliards d'années. Mieux encore, elle expliquera comment ce phénomène nouveau invalidait les calculs des physiciens du siècle précédent.

En 1902, Ernest Rutherford (1871-1937) et Frederick Soddy (1877-1956) établissent la notion de période d'un élément radioactif. Pour caractériser la radioactivité d'un élément, ils en mesurent l'activité, c'est-à-dire le nombre de désintégrations qu'il subit par unité de temps. Ils s'aperçoivent que le temps qu'il faut pour que l'activité d'un élément radioactif diminue de moitié est une constante qui ne dépend que du noyau étudié. Ce temps, appelé période T de l'élément radioactif, est caractéristique parce qu'il ne dépend pas non plus de la quantité initiale de noyaux radioactifs : à chaque intervalle de temps T, la quantité de noyaux radioactifs restante est divisée par deux. Il en résulte que la radioactivité est exponentiellement décroissante. C'est cette régularité qui fait de la radioactivité une horloge utilisable. Actuellement, la datation s'estime généralement en utilisant plusieurs chaînes de désintégration : potassium-argon, thorium-plomb, uranium-plomb, rubidium-strontium.

La désintégration des minerais radioactifs contenus dans la Terre est une source de chaleur : son existence invalide l'hypothèse de Kelvin d'une Terre se refroidissant en permanence (encore Joly, en 1903).

Doc 2 - Structure de la Terre

Flux géothermique et transfert de chaleur (extraits) - Résumé d'une intervention à la séance technique du 20 octobre 2016 du Comité Français de Mécanique des Roches disponible à l'adresse http://www.cfms-sols.org/sites/default/files/CFMR-2016-10-20.pdf
Guy Vasseur, Université Pierre et Marie Curie

À l'échelle de la planète, le dégagement de chaleur utilise essentiellement deux modes de transfert : la conduction et la convection.

Dans la lithosphère (couche superficielle intégrant la croûte et une partie du manteau supérieur), la conduction verticale est généralement le processus dominant.

Dans le manteau sub-lithosphérique jusqu'à 2900 km de profondeur assimilé à un fluide visqueux, c'est la convection qui est la plus efficace. Le géotherme mantellique correspond à un gradient vertical très faible (environ 3×10^{-2} K · m^{-1}).

Le noyau externe lui est surtout constitué de fer liquide. Une vigoureuse convection y engendre le champ magnétique terrestre. Le noyau interne lui est solide et la convection éventuelle beaucoup moins importante.

La tectonique des plaques apparaît comme un résultat de la convection mantellique où la Terre fonctionne comme une machine thermique fournissant, grâce à sa chaleur interne, un travail mécanique avec un rendement compatible avec la thermodynamique.

Données

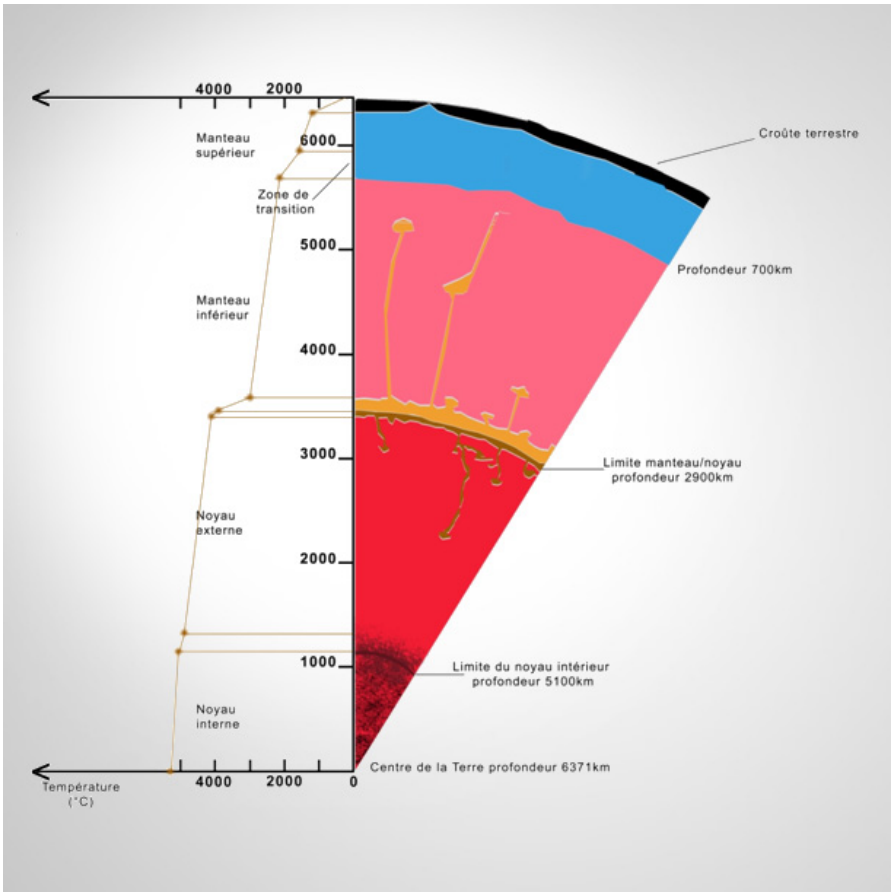


Figure E2 - Structure de la Terre et évolution de la température en fonction de la distance au centre.

- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \times 10^6$ m ;
- masse volumique du granit : $\mu = 3 \times 10^3$ kg · m^{-3} ;
- capacité thermique massique du granit : $c = 0,8 \times 10^3$ J · K^{-1} · kg^{-1} ;
- conductivité thermique du granit : $\kappa = 2$ W · m^{-1} · K^{-1}.

I- Estimation de l'âge de la Terre grâce aux sédiments

I.A - Etude de la chute de particules dans un fluide

1) On s'intéresse à une particule de volume V, de masse volumique μ_0 dans un fluide globalement au repos de masse volumique $\mu < \mu_0$ soumise à la pesanteur de champ $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Les frottements exercés par le fluide sur cette particule de vitesse $\vec{v}$ sont modélisables par une force de frottement fluide $\vec{f_f} = -\lambda\,\vec{v}$, avec $\lambda > 0$.

1.a) En faisant une étude mécanique pour une particule, montrer que la vitesse de cette particule suit l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{g}$$

On donnera l'expression de τ.

1.b) Donner la forme de la solution de cette équation différentielle.

1.c) Montrer qu'après une durée qu'on estimera, la vitesse de la particule tend vers $\vec{v} = -v_{lim}\,\vec{u}_z$. Donner l'expression de v_{lim} et vérifier que les particules se déplacent vers le bas.

On note $n^*(z,t)$ la densité (en m^{-3}) des particules à l'altitude z et à la date t. On se place désormais dans le cas où $\vec{v} = -v_{lim}\,\vec{u}_z$.

1.d) Déduire de ce qui précède l'expression de la densité de flux de particules $\vec{j}_c(z,t)$ due à la chute des particules.

I.B - Diffusion des particules

2)

2.a) Expliquer pourquoi il existe aussi un courant ascendant de densité de flux $\vec{j}_a(z,t) = -D^*\frac{\partial n^*}{\partial z}\vec{u}_z$. Donner l'unité de D^*.

2.b) En faisant un bilan sur les particules pour un cylindre de section S d'altitude comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que $n^*(z,t)$ vérifie

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D^*\frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_{lim}\frac{\partial n^*}{\partial z}$$

I.C - Utilisation des sédiments pour l'estimation de l'âge de la Terre

3) Le tableau 1 présente des données utilisées historiquement pour l'estimation de l'age de la Terre.

Date	Auteur	épaisseur des sédiments (km)	taux de sédimentation (10^{-2} cm/an)	âge des sédiments (millions d'années)
1860	Phillips	22	2,29	
1890	De Lapparent	46	5,11	
1892	Geike	30	0,4 à 4,4	
1893	Mc Gee	80	0,5	
1893	Upham	80	8	
1909	Sollas	102	12,7	

TABLE 1 – Des données utilisées historiquement pour l'estimation de l'age de la Terre

3.a) Dire sur quelle hypothèse relative à la sédimentation repose la méthode de datation par stratigraphie présentée dans le document 1.

3.b) Reproduire le tableau 1 en remplissant la dernière colonne.

3.c) Commenter la méthode de datation par les sédiments.

II- Estimation de l'âge de la Terre par refroidissement

II.A - Equation de diffusion dans une sphère homogène

4) On assimile la Terre à une sphère solide homogène de centre O, de rayon R_T qui se refroidit par conduction uniquement. Il n'y a pas de sources locales de chaleur. La masse volumique de la Terre est notée μ, la capacité thermique massique c et la conductivité thermique κ. Selon l'hypothèse de Buffon, la Terre est initialement (à la date $t = 0$) une sphère incandescente en fusion.

4.a) Expliquer pourquoi la température $T(r, t)$ ne dépend que de r (dans un repère sphérique de centre O) et de la date t.

4.b) En faisant un bilan énergétique pour le volume compris entre les sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$, montrer que $T(r, t)$ vérifie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T \text{ (équation 1)}$$

où l'on donnera l'expression et l'unité de la constante D et l'expression du laplacien ΔT de $T(r, t)$.

4.c) Que devient l'équation (1) dans le cas unidimensionnel, pour $T(x, t)$?

II.B - Estimation par Buffon de l'âge de la Terre par refroidissement

5) On ne cherche pas ici une solution de l'équation de diffusion précédente, mais plutôt à relier des ordres de grandeurs caractéristiques du problème : τ la durée de refroidissement et R la taille caractéristique de la sphère.

5.a) Montrer que si R est multipliée par deux, τ est multipliée par 4.

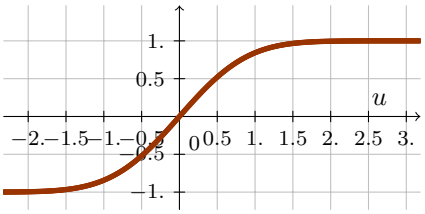
5.b) Expliquer pourquoi l'extrapolation de Buffon d'un boulet à la Terre est fausse.

II.C - Solution de l'équation de diffusion

6) On cherche maintenant des solutions à l'équation de diffusion sous forme d'intégrale de gaussienne :

$$f(x, t) = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{D.t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$$

On donne par ailleurs la valeur de l'intégrale : $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et l'allure de la fonction $g(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z=0}^{z=u} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$:



6.a) Montrer que $f(x, t)$ est bien solution de l'équation (1) dans le cas unidimensionnel. NB : on pourra poser $u = \frac{x}{2\sqrt{D.t}}$.

6.b) Tracer sur le même graphique l'allure de $f(x, t)$ en fonction de x, pour $x > 0$, aux dates $t = t_1$ et $t = t_2 > t_1$, ainsi que le cas où $t \to 0$.

6.c) Déduire des propriétés de l'équation de diffusion que

$$T(x, t) = a\, f(x, t) + b \text{ (équation 2)}$$

est aussi solution de l'équation (1) dans le cas unidimensionnel, si a et b sont deux constantes réelles.

II.D - Estimation par Kelvin de l'âge de la Terre

7) On va utiliser une fonction $T(x, t) = a\, f(x, t) + b$ pour déterminer la température en fonction de x la profondeur ($x = 0$ à la surface de la Terre) et de la date t ($t = 0$ à la formation de la Terre), dans le cadre des hypothèses de Kelvin.

7.a) Montrer que l'hypothèse selon laquelle "au centre de la Terre, la température, par inertie thermique, conserve grosso modo sa valeur initiale" se caractérise par le fait que R_T peut être considéré comme quasi infini. Expliquer en quoi cela valide le choix d'un modèle unidimensionnel.

7.b) Déterminer les valeurs numériques des coefficients a et b.

7.c) Exprimer le gradient de température à la surface à la date t.

7.d) En utilisant le fait que "aujourd'hui lorsqu'on s'enfonce sous la Terre on gagne en moyenne de l'ordre de 3 °C tous les 100 mètres", déterminer l'âge de la Terre selon Kelvin. On prendra les caractéristiques physiques du granit.

III- Prise en compte de la convection dans le manteau

III.A - Estimation par Perry de l'âge de la Terre

8) On va supposer "que sur des durées géologiques, il y a transport de matériaux dans le manteau terrestre" et qu'en conséquence, les transferts thermiques dans le manteau ont lieu par convection qui " homogénéise la température". On rappelle la loi de Newton de la convection thermique : la densité de flux thermique à l'interface entre un corps solide dont la température est T_s et un écoulement fluide à la température T_f a pour norme

$$\|\vec{j}_{th}\| = h\,|T_f - T_s|$$

où h est le coefficient de transfert thermique par convection. On supposera par ailleurs que le noyau terrestre, comme la croûte, sont, eux, solides et les transferts thermiques y sont assurés par la conduction.

8.a) Donner les unités de h dans le système international.

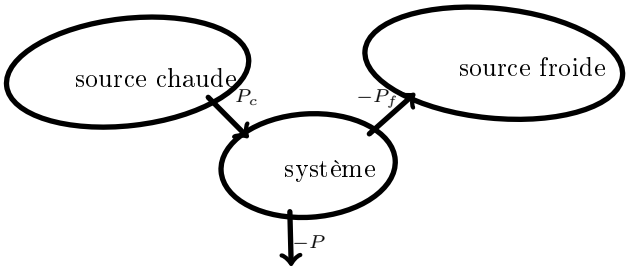
8.b) Tracer alors l'allure des variations spatiales de la température dans la Terre conformément à un tel modèle.

8.c) Comparer ce graphique à celui fourni dans les données.

8.d) Expliquer pourquoi si la "conduction n'opère que sur une épaisseur de surface de 100 km " (la croute) alors "le même gradient de température fournit des âges totalement différents" dans les modèles de Kelvin et de Perry.

III.B - La Terre vue comme une machine thermique

9) On modélise ici "la convection mantellique où la Terre fonctionne comme une machine thermique fournissant, grâce à sa chaleur interne, un travail mécanique avec un rendement compatible avec la thermodynamique", grâce au schéma suivant :



Dans ce schéma de machine thermique ditherme :

- P est la puissance mécanique échangée (ou algébriquement reçue) par le système,
- P_c est la puissance thermique échangée (ou algébriquement reçue) par le système avec la source chaude,
- et P_f est la puissance thermique échangée (ou algébriquement reçue) par le système avec la source froide.

Pour cette sous-partie, on note :

- T_{noyau}, la température à l'interface entre le noyau et le manteau terrestre
- et $T_{\text{croûte}}$, la température à l'interface entre la croûte et le manteau terrestre.

9.a) Afin de modéliser la convection mantellique par cette machine thermique, associer à chacun des trois éléments du schéma précédent une des trois parties constitutives de la Terre : manteau, croûte et noyau. Expliquer de quel type de machine thermique il doit s'agir : réfrigérateur, moteur ou pompe à chaleur. Donner les signes des puissances P, P_c et P_f.

9.b) Tracer l'allure du diagramme entropique de ce cycle. Dire comment utiliser ce diagramme pour calculer P.

9.c) Ecrire, en fonction de P, P_c, P_f, T_{noyau} et $T_{\text{croûte}}$, le premier et le second principe de la thermodynamique en régime stationnaire. En déduire une borne supérieure pour le rendement η de la machine thermique.

9.d) Calculer la valeur numérique de $|P_f|$ grâce aux documents fournis.

9.e) On estime la puissance (moyennée sur plusieurs années) dégagée par l'ensemble des éruptions volcaniques et des séismes à 2 TW. Comparer cette puissance à celle d'un réacteur nucléaire. Calculer η et vérifier la vraisemblance du résultat. Suggérer des causes d'irréversibilité du cycle.

9.f) Au vu du précédent résultat numérique, dire si la conversion d'une partie du flux thermique en puissance mécanique remet en cause le raisonnement de Kelvin sur l'estimation de l'age de la Terre par refroidissement.

IV- Prise en compte de la radioactivité

IV.A - Equation de diffusion dans une sphère homogène avec une source de chaleur

10) On assimile la Terre à une sphère solide homogène de centre O, de rayon R_T qui se refroidit par conduction uniquement. La masse volumique de la Terre est notée μ, la capacité thermique massique c et la conductivité thermique κ. La désintégration des éléments radioactifs de très longue période contenus dans les silicates (uranium 235 et 238, thorium 232 et potassium 40) délivrent dans la Terre une puissance thermique massique

$$p_m \approx 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot kg^{-1}}$$

10.a) En faisant un bilan énergétique pour le volume compris entre les sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$, montrer que $T(r,t)$ vérifie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T + E \text{ (équation 3)}$$

où l'on donnera l'expression des constantes D et E ainsi que du laplacien ΔT de $T(r,t)$.

10.b) Comparer cette dernière équation différentielle (3) à l'équation différentielle (1) trouvée sans radioactivité. Expliquer ainsi "comment ce phénomène nouveau (au XXème s. : la radioactivité) invalidait les calculs des physiciens du siècle précédent".

10.c) Sans faire aucun calcul, dire si la prise en compte de la radioactivité dans les calculs de l'âge de la Terre va allonger ou raccourcir cet âge.

IV.B - Solution de l'équation de diffusion en régime permanent dans une sphère homogène avec une source de chaleur

11) On va tenter de résoudre l'équation (3) en régime permanent.

11.a) Dire pour quelles échelles de temps le régime peut être considéré comme permanent. Montrer que la simplification de l'équation (3) en régime permanent mène à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\mu\, p_m}{\kappa} r^2 \text{ (équation 3bis)}$$

11.b) Trouver la forme mathématique de $T(r)$ en faisant apparaître des constantes.

11.c) En utilisant l'hypothèse que "entre la surface de la Terre et son intérieur, il y aura un continuum de température qui va de 20 °C à 3 900 °C", déterminer les constantes d'intégration de la précédente relation.

11.d) Tracer l'allure de la température $T(r)$.

IV.C - Discussion de la solution trouvée

12) On va vérifier la cohérence du résultat précédemment trouvé.

12.a) Comparer la précédente courbe à la courbe E2 fournie dans les données.

12.b) Estimer, en prenant les caractéristiques physiques du granit, la valeur de la puissance thermique massique p_m délivrée par la radioactivité et comparer à la valeur attendue.

12.c) Estimer la valeur du gradient thermique à la surface de la Terre et comparer à la valeur donnée par le document.

12.d) Proposer une explication aux éventuelles incohérences.