Notes de cours

Ondes mécaniques acoustiques

I-Ondes acoustiques dans les fluides

Hypothèses simplificatrices



Approximation acoustique définition

on considère que

- la pression varie peu : $P = P_0 + p$ avec $|p| \ll P_0$;
- la masse volumique non plus : $\mu = \mu_0 + \rho$ avec $|\rho| \ll \mu_0$;
- la vitesse du fluide $\vec{V} = \vec{0} + \vec{v}$ est petite devant la célérité de l'onde $(|\vec{v}| \ll c_s)$.

On supposera que l'écoulement est isentropique et l'onde de grande longueur d'onde.



Linéarisation : s'y retrouver

on se limitera à des termes d'ordre 1 $(p, \rho \text{ ou } \vec{v})$ dans les équations.



L'approximation de grande longueur d'onde. s'y retrouver

On s'intéresse à une onde de fréquence ν et de longueur d'onde λ , reliées par $c_s = \lambda.\nu$. Cette hypothèse est vérifiée dans les cas des ondes sonores (pour $\nu < 20kHz$). Le déplacement des particules de fluide de l'ordre de ℓ , est tel que $v \approx \ell \cdot \nu$. $|\vec{v}| \ll c_s$ revient à supposer que le libre parcourt moyen est

$$\ell \ll \lambda$$

L'approximation acoustique est donc une approximation de grande longueur d'onde. Si l'on note ℓ , le libre parcours moyen des particules, négliger les transferts thermique revient à

$$\ell \ll \lambda \Leftrightarrow \nu \ll \frac{c_s}{l} \approx 10^9 Hz$$

dans le cas des gaz (et plus encore dans le cas des liquides).



L'hypothèse isentropique s'y retrouver

on va supposer que les écoulements sont, du point de vue thermodynamique, isentropiques, c'est à dire

- adiabatiques (il n'y a pas d'échanges thermiques);
- réversibles.

Ceci revient à négliger tous les phénomènes dissipatifs de diffusion (ni conduction thermique, ni viscosité). On s'intéressera donc au coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Rightarrow$

$$\chi_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

Équation d'onde



1 Équations de d'Alembert exercice

Montrer qu'on trouve une équation de d'Alembert du type

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_s^2 \cdot \Delta \psi$$

pour $\psi=p,\,\mu,\,v_x,\,v_y,\,v_z$ ou encore ϕ où la célérité de l'onde sonore est

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \chi_S}}$$

L'équation du mouvement linéarisée donne

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{grad}(p)$$

En remplaçant ρ par $\chi_{S}.\mu_{0}.p$ dans l'équation de conservation de la masse linéarisée, on trouve

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\chi_s.\mu_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-\mu_0.div\vec{v}}{\chi_s.\mu_0} = -\frac{1}{\chi_S} div\left(\overrightarrow{v}\right)$$

Si tout se passe suivant \vec{u}_z , $\overrightarrow{grad}(p) = \frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z$ et $div(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Si tout se passe suivant \vec{u}_z , les deux équations couplées sont dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$



2 Expression de la célérité des ondes sonores pour un gaz parfait théorème

Comme $\chi_S = \frac{\pm 1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \approx \frac{\pm 1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$, on peut réécrire cette célérité sous la forme :

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_S}$$

soit pour un gaz parfait, comme $P = \frac{P_0.V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}} = \frac{P_0.\mu^{\gamma}}{\mu_0^{\gamma}}$

$$c_s = \sqrt{\gamma \cdot \frac{P_0 \cdot \mu^{\gamma - 1}}{\mu_0^{\gamma}}} \approx \sqrt{\gamma \cdot \frac{P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R \cdot T}{M}}$$

 \Rightarrow

Pour un gaz parfait:

$$c_s = \sqrt{\gamma . \frac{R.T}{M}}$$



Célérités des ondes sonores dans différents gaz tableau

Le tableau 1 présente quelques exemples de célérités des ondes sonores dans différents gaz : plus ceux-ci sont massiques, plus la célérité est faible.



Vitesse du son dans le cas des liquides : tableau

Le tableau 2 présente quelques exemples de célérités des ondes sonores dans différents liquides. La compressibilité χ_S des liquides est quasi-nulle et, même si la masse volumique des liquides est mille plus forte que celle des gaz, la célérité des ondes sonores est plus importante dans les liquides que dans les gaz

$$c_s(liquides) > c_s(gaz)$$

espèce	$c_s \text{ en } m.s^{-1}$
O_2	317
air	331
N_2	339
H_2	1270

Table 1 – Quelques célérités des ondes sonores dans des gaz à $0^{\circ}C$

I

espèce	$c_s \text{ en } m.s^{-1}$
eau	1500
Hg	1450

Table 2 – Quelques célérités des ondes sonores dans des liquides

II- Ondes sonores planes stationnaires



une onde acoustique stationnaire. schéma

La figure 1 représente une onde acoustique stationnaire, avec des nœuds et des ventres pour la vitesse et pour la pression.

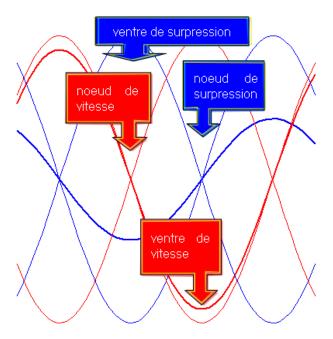


Figure 1 – une onde acoustique stationnaire.



Variation de la pression et la vitesse une onde acoustique stationnaire animation

Au cours du temps, la pression et la vitesse une onde acoustique stationnaire varient. Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.



\Re Conditions aux limites temporelles : s'y retrouver

I on peut souvent choisir l'origine des dates t telle que $\varphi_G = 0$.



3 Condition aux limites pour une extrémité ouverte : théorème

dans le cas d'une extrémité ouverte en $z=z_0$, la pression est la pression atmosphérique $P(z=z_0,t)=$ $P_0, donc \Rightarrow$

$$p(z=z_0,t)=0 \ \forall t$$

Il y a donc un nœud de pression en z_0 .



34 Condition aux limites pour une extrémité bouchée : théorème

dans le cas d'une extrémité bouchée en $z=z_0$, le fluide ne peut passer, donc \Rightarrow

$$v_z(z=z_0,t)=0 \ \forall t$$

Il y a donc un nœud de vitesse en z_0 .



5 Modes propres d'un tuyau fermé aux deux extrémités : théorème

A ces deux extrémités, il y a un nœud de vitesse. Aussi, $\varphi_F = \frac{\pi}{2}$, et on peut réécrire l'onde stationnaire pour l'harmonique p sous la forme

$$\begin{cases} v_z = -v_0 \cdot \sin\left(2.\pi \frac{p.z}{2L}\right) \cdot \cos\left(\omega.t\right) \\ p = Z_c v_0 \cdot \cos\left(2.\pi \frac{p.z}{2L}\right) \cdot \sin\left(\omega.t\right) \end{cases}$$

Le numéro de l'harmonique (p) représente le nombre de fuseaux dans le tuyau :

$$L = p \frac{\lambda}{2}$$
 pour un tuyau fermé aux deux extrémités



Instruments à vent à embouchure de flûte photo



Un instrument de musique à vent dont le son est créé par la vibration de l'air se fendant sur un biseau appartient à la famille des flûtes. Canalisé par un conduit ou directement dirigé par les lèvres de l'instrumentiste, le filet d'air est mis en vibration sur la paroi qui constitue l'arête. Le déplacement d'air peut provenir de la bouche, quelquefois du nez, ou d'une soufflerie mécanique. Le biseau peut être :

droit sculpté dans une fenêtre comme celui de la flûte à bec (sur la photo),

en encoche de différentes formes comme celui taillé sur le rebord du tuyau de la quena des Andes Péru-

en anneau comme celui de l'embouchure de la flûte traversière.



6 Modes propres d'un tuyau ouvert aux deux extrémités théorème

dans ce cas, les deux extrémités (z=0 et z=L) du tuyau sont ouvertes. A ces deux extrémités, il y a un nœud de pression. L'expression de l'onde stationnaire pour l'harmonique p est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z = v_0.\cos\left(2.\pi\frac{p.z}{2L}\right).\cos\left(\omega.t\right) \\ p = -Z_cv_0.\sin\left(2.\pi\frac{p.z}{2L}\right).\sin\left(\omega.t\right) \end{array} \right.$$

Aussi, $\varphi_F = 0$ et $k.L = p.\pi \Leftrightarrow \Rightarrow$

Le numéro de l'harmonique (p) représente le nombre de fuseaux dans le tuyau :

$$L = p \frac{\lambda}{2}$$
 pour un tuyau ouvert aux deux extrémités

Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°1 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités animation

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités pour le mode fondamental (harmonique n°1). La pression ne varie pas aux extrémités (nœud de pression), alors que l'amplitude des variations de vitesse y est maximale (ventre de vitesse).

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités schéma

La figure 2 représente l'harmonique n°2 des ondes acoustiques stationnaires dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités.

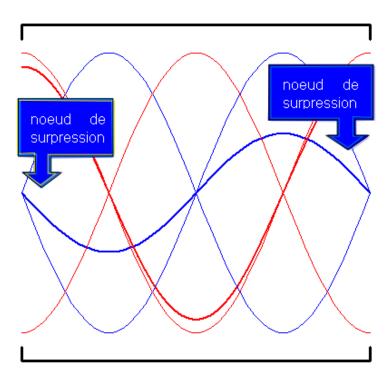


FIGURE 2 – Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités

Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités animation

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à ses deux extrémités pour l'harmonique °2. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise deux fuseaux de pression.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Instruments à vent à anche photo



Pour produire un son, certains instruments à vent utilisent à une extrémité de leur tuyau une anche formée d'une lamelle (anche simple), libre ou battante, ou de deux lamelles (anche double) vibrant l'une contre l'autre, contrôlée ou non par les lèvres. Les anches sont le point commun d'une pléiade d'instruments aussi éclectiques que variés. De roseau, de métal ou de matière plastique, elles sont mises en vibration par une colonne d'air qui peut être produite :

par le souffle du musicien (clarinette, cf. photo, saxophone, hautbois...),

par une soufflerie mécanique (harmonium, accordéon, bandonéon...),

par une poche d'air alimentée par le souffle du musicien ou un soufflet (cornemuse, biniou...).



7 Modes propres d'un tuyau ouvert à une seule de ses extrémités théorème

dans ce cas, l'extrémité z=0 est ouverte, ce qui impose un nœud de pression. Aussi, $\varphi_F=0$. L'expression de l'onde stationnaire pour l'harmonique p est donc

$$\begin{cases} v_z = v_0 \cdot \cos\left(2.\pi \frac{p.z}{2L}\right) \cdot \cos\left(\omega.t\right) \\ p = -Z_c v_0 \cdot \sin\left(2.\pi \frac{p.z}{2L}\right) \cdot \sin\left(\omega.t\right) \end{cases}$$

L'autre extrémité z=L est fermée, ce qui impose un nœud de vitesse, soit $k.L=p.\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \Rightarrow$

$$L=prac{\lambda}{2}+rac{\lambda}{4}$$
 pour un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre

Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°1 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités animation

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour le mode fondamental (harmonique °1). Sur l'extrémité ouverte, la pression ne varie pas (nœud de pression), alors que l'amplitude des variations de vitesse y est maximale (ventre de vitesse). Sur l'extrémité fermée, la vitesse ne varie pas (nœud de vitesse), alors que l'amplitude des variations de pression y est maximale (ventre de pression).

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités

La figure 3 représente l'harmonique n°2 des ondes acoustiques stationnaires dans un tuyau ouvert à une de ses deux extrémités, et fermé à l'autre extrémité.

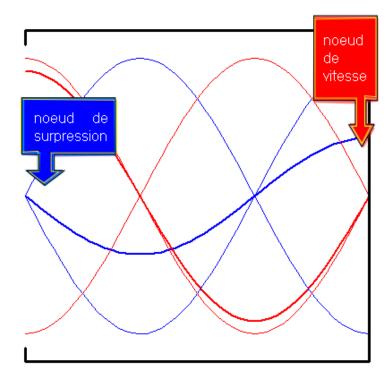


FIGURE 3 – Harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités

Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°2 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités animation

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour l'harmonique n°2. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise deux nœuds de pression, et deux nœuds de vitesse.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Variations de pression et de vitesse de l'harmonique n°3 dans un tuyau ouvert à une seule de ses deux extrémités animation

Pression et vitesse varient dans un tuyau ouvert à une de ses extrémités, fermé à l'autre, pour l'harmonique n°3. Les conditions aux limites sont les mêmes, mais on visualise trois nœuds de pression, et trois nœuds de vitesse.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Le tube de Kundt : vidéo

Dans le tube de Kundt existent des ondes stationnaires sonores que l'on peut mesurer avec un micro à electret. On visualise pour certaines fréquences (de résonance) des fuseaux.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

Jouer une note : s'y retrouver

le choix d'une note dans un instrument à vent consiste à changer la longueur L du tuyau, afin de sélectionner le fondamental. La longueur d'onde est d'autant plus grande que le tuyau est long : en allongeant le tuyau, on jouera une note plus grave.

Il existe différentes techniques pour jouer sur la longueur de L. On peut rallonger ou raccourcir le tuyau (avec une coulisse comme dans le cas du trombone

On peut aussi utiliser un système à piston, comme dans le cas de la trompette.

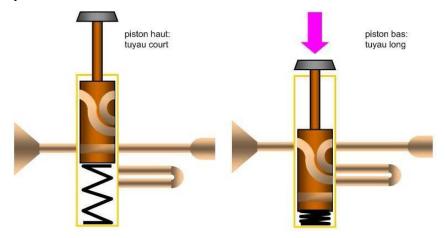
On peut boucher ou ouvrir des trous le long du tuyau avec les doigts (comme dans le cas de la flûte à bec), ou bien avec un système de clefs (comme dans le cas de la clarinette),

Trombone à coulisse photo



On peut rallonger ou raccourcir le tuyau.

Trompette photo



On peut aussi utiliser un système à piston dans le cas de la trompette.

Instruments qui octavient : s'y retrouver

octavier veut dire sonner l'octave. C'est à dire donner, au lieu du son fondamental, le second harmonique.

$$L=p\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}p=1\Rightarrow\nu=\frac{c_s}{2L}\\p=2\Rightarrow\nu'=\frac{2c_s}{2L}=2.\nu\end{array}\right.$$

C'est le cas des instruments à vent qui, comme la flûte, ont deux extrémités ouvertes.

Instruments qui quintoient : s'y retrouver

quintoyer veut dire sonner la quinte. C'est à dire donner, au lieu du son fondamental, le troisième harmonique.

$$L = p\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} p = 0 \Rightarrow \nu = \frac{c_s}{4L} \\ p = 1 \Rightarrow \nu' = \frac{3c_s}{4L} = 3.\nu \end{array} \right.$$

C'est le cas des instruments à vent qui, comme la clarinette, ont une extrémité ouverte et l'autre bouchée.

III-Ondes sonores planes progressives

1. Caractéristiques des ondes sonores planes progressives



Les ondes sonores planes s'y retrouver

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_s^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

- On peut réécrire les solutions à partir de $\bullet \ \psi_+\left(t-\frac{z}{c_s}\right) = \frac{-1}{c_s}f'\left(t-\frac{z}{c_s}\right) \text{, l'onde plane progressive vers les } z \text{ croissants} \,;$
- $\psi_{-}\left(t+\frac{z}{c_{s}}\right)=\frac{+1}{c_{s}}g'\left(t+\frac{z}{c_{s}}\right)$, l'onde plane progressive vers les z décroissants.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \left[\psi_{+}\left(t - \frac{z}{c_{s}}\right) + \psi_{-}\left(t + \frac{z}{c_{s}}\right)\right] \vec{u}_{z} \\ p = \mu_{0}.c_{s}.\left[\psi_{+}\left(t - \frac{z}{c_{s}}\right) - \psi_{-}\left(t + \frac{z}{c_{s}}\right)\right] \end{array} \right.$$

Les surfaces d'onde des ondes sonores planes sont des plans (z = cste)



§ 8 Caractère vectoriel des ondes acoustiques théorème

 $\vec{v}//\vec{u}_z$. \Rightarrow

Les ondes sonores planes sont longitudinales.



Ondes planes progressives monochromatiques s'y retrouver

on pose la pulsation ω et le vecteur d'onde \vec{k} .

Le potentiel des vitesses est $\phi = \Re\left(\tilde{\phi}\right)$, avec le complexe associé :

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

On en déduit la vitesse par $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi)$ et la pression par $p(z,t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$. On déduit vitesse et pression complexes

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\vec{v}} = -j.\vec{k}.\tilde{\phi}_0.e^{j\cdot\left(\omega.t - \vec{k}.\vec{r}\right)} \\ \tilde{p} = -j.\mu_0.\omega.\tilde{\phi}_0.e^{j\cdot\left(\omega.t - \vec{k}.\vec{r}\right)} \end{array} \right.$$

Si la direction de propagation est parallèle à $\vec{u}_z,$ il y a deux solutions à l'équation de dispersion :

- soit $\vec{k}=+\frac{\omega}{c_s}\vec{u}_z$, qui correspond à l'onde se propageant vers les z croissants;
- soit $\vec{k} = -\frac{\omega}{c_s} \vec{u}_z$, qui correspond à l'onde se propageant vers les z décroissants.



9 Relation entre pression et vitesse pour une onde plane se propageant vers

les z croissants : théorème

pour une onde plane se propageant vers les z croissants :

$$\begin{cases} v_z = \psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) \\ p = \mu_0 . c_s . \psi_+ \left(t - \frac{z}{c_s} \right) \end{cases}$$

pour une onde plane se propageant vers les z décroissants :

$$\begin{cases} v_z = \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \\ p = -\mu_0 \cdot c_s \cdot \psi_- \left(t + \frac{z}{c_s} \right) \end{cases}$$

La pression est là aussi proportionnelle à la vitesse, simplement le facteur de proportionnalité est cette fois négatif. \Rightarrow

La pression étant proportionnelle à la vitesse, on peut poser :

- $p = +Z_c v_z$ pour une onde plane se propageant vers les z croissants,
- $p = -Z_c v_z$ pour une onde plane se propageant vers les z décroissants.



Impédance acoustique : définition

L'impédance acoustique (ou résistivité) ne dépend que des caractéristiques du fluide :

$$Z_c = \mu_0 \, c_s = \frac{1}{\chi_s \, c_s} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

car $c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \, \chi_S}}$. Elle s'exprime en kg·m⁻²·s⁻¹.



Impédance acoustique de l'air s'y retrouver

Dans le cas de l'air $Z_c = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Etude énergétique des ondes sonores planes progressives



Densité volumique d'énergie d'une onde plane : définition

L'énergie volumique sonore est

$$e_s = e_c + e_p = \frac{1}{2} \chi_S p^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v^2$$

avec

- l'énergie cinétique volumique $e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v^2$
- et l'énergie potentielle volumique $e_p = \frac{1}{2}\chi_S p^2$.



₹10 Équipartition de l'énergie dans le cas d'une onde acoustique plane exercice

Montrer qu'il y a autant d'énergie potentielle que d'énergie cinétique dans une onde acoustique plane.

En utilisant l'impédance acoustique $Z_c = \mu_0.c_s = \frac{1}{\chi_s.c_s} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$ s'il s'agit d'une onde plane progressive (dans un sens ou dans l'autre), on peut réécrire $e_s = \mu_0 \cdot v^2 = \chi_S \cdot p^2$



🚀 11 Bilan énergétique pour une onde acoustique plane théorème

dans un volume V, l'énergie sonore est

$$E_s = \iiint_V e_s . d^3 \tau$$

La variation d'énergie sonore contenue dans le volume V est

$$\frac{dE_s}{dt} = \iiint_V \frac{\partial e_s}{\partial t} d^3\tau$$

Calculons $\frac{\partial e_s}{\partial t}$:

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = \chi_S.p \frac{\partial p}{\partial t} + \mu_0.\vec{v}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -p.div(\vec{v}) - \vec{v}.\overrightarrow{grad}(p)$$

en utilisant les équations couplées $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{grad}(p)$ et $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} div(\vec{v})$. Or, comme $\vec{\nabla} \left(U. \vec{A} \right) = (\vec{\nabla} U) . \vec{A} + U. (\vec{\nabla} \vec{A})$ Le bilan local s'écrit :

$$\frac{\partial e_s}{\partial t} = -div\left(p.\vec{v}\right)$$

Soit au niveau global

$$\frac{dE_s}{dt} = -\iiint_V div \left(p.\vec{v} \right) d^3\tau = - \oiint p.\vec{v}.\overrightarrow{d^2\Sigma}$$

où le volume V est délimité par une surface fermée Σ . \Rightarrow Le bilan d'énergie sonore s'écrit :

$$\begin{cases} \text{ au niveau global}: \frac{\mathrm{d}E_s}{\mathrm{d}t} = - \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 \Sigma} \\ \text{ au niveau local}: \frac{\partial e_s}{\partial t} + div \left(\vec{\Pi} \right) = 0 \end{cases}$$

où le vecteur densité surfacique de flux sonore (en W · m $^{-2}$) est $\vec{\Pi} = p \vec{v}$



Intensité sonore : définition

on posera le flux d'énergie sonore :

$$P_r = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathbf{d}^2 S}$$

L'intensité sonore est la moyenne du vecteur densité surfacique de flux sonore

$$I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle = \left\langle p \, v \right\rangle$$

qui s'exprime en $W \cdot m^{-2}$.



Niveau sonore: définition

L'oreille étant un détecteur logarithmique, on définit le niveau sonore en décibel (dB) par

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ où } I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

car $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est l'intensité sonore minimale que l'oreille peut déceler (vers 1,5 kHz).



Le domaine acoustique de l'oreille humaine. schéma

La figure 4 représente le domaine acoustique de l'oreille humaine. Les niveaux sonores détectés par l'oreille sont supérieurs à 0dB (et inférieurs à 130dB, seuil de la douleur.

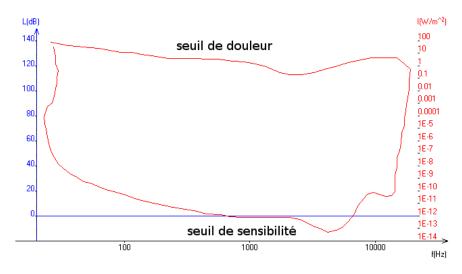


FIGURE 4 – Le domaine acoustique de l'oreille humaine.

Quelques ordres de grandeur de niveaux sonores : tableau

Le tableau 3 présente quelques ordres de grandeurs de niveaux sonores.

exemples	niveau sonore L
pièce silencieuse	30dB
lave-vaisselle	50dB
rue animée	75dB
scooter accélérant	90dB
avion qui décolle	120dB
marteau-piqueur	130dB

Table 3 – Quelques niveaux sonores dans la vie de tous les jours

Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface



Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface schéma

La figure 5 représente deux tuyaux d'axe Oz, raccordés en z=0

- \bullet pour z < 0, la section est S_1 , la célérité des ondes sonores c_1 , et toute grandeur caractéristique du fluide porte l'indice 1;
- pour z > 0, la section est S_2 , la célérité des ondes sonores c_2 , etc...



\$\frac{12}{2}\$ Continuité de certaines grandeurs acoustiques à une interface théorème

la pression est bien entendu continue, comme on peut s'en assurer en imaginant la présence d'un piston de masse nulle entre les deux gaz.

Et le débit volumique est continu aussi. \Rightarrow

à l'interface z = 0,

$$P(z = 0^-, t) = P(z = 0^+, t) \ \forall t$$

et

$$S_1.v_z(z=0^-,t) = S_2.v_z(z=0^+,t) \ \forall t$$

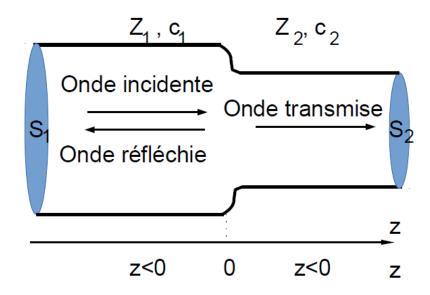


FIGURE 5 – Réflexion et transmission des ondes sonores à une interface



#13 Coefficients de transmission et de réflexion en amplitude exercice

Montrer que les coefficients de réflexion en pression r_p et en vitesse r_v vérifient :

$$r_p = -\frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} = -r_v$$

En déduire que le coefficient de réflexion en énergie est

$$R = \frac{\left(\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}\right)^2}{\left(\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}\right)^2}$$

et donc que le coefficient de transmission en énergie est

$$T = \frac{4\frac{Z_1}{S_1}\frac{Z_2}{S_2}}{\left(\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}\right)^2}$$



Interface liquide-gaz et solide-gaz : s'y retrouver

les liquides et les gaz ayant des impédances acoustiques très différentes $(c_s(liquides) > c_s(gaz))$ et $\mu_0(liquides) \gg \mu_0(gaz)$), la réflexion est forte $(R \approx 1)$ et la transmission très faible $(T \ll 1)$.

La même remarque peut être faite au sujet de l'interface solide-gaz. Ceci explique en particulier l'écho (réflexion) et la faible transmission, encore atténuée par plusieurs interfaces (comme dans le cas du double vitrage).

Si l'on veut diminuer l'écho, il s'agira de juxtaposer un matériau d'impédance proche de l'air (tenture, mousse...) au contact de la paroi solide.

Si l'on veut améliorer la transmission des ondes sonores (ou ultra-sonores) il s'agira d'améliorer l'interface (coller sa montre à son oreille pour en entendre le tic-tac ou le battement cardiaque, ajouter un gel entre le corps et l'émetteur-récepteur dans le cas de l'échographie).



🗱 Effet d'un changement de la surface du tuyau : s'y retrouver

si l'on suppose que $Z_1 = Z_2$ mais $S_1 \neq S_2$, on trouve :

$$R = |r_v.r_p| = \left(\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}\right)^2$$

La réflexion sera forte (et donc la transmission faible) si S_2 est très différente de S_1 .

Il s'agira, si l'on veut augmenter la transmission, d'augmenter progressivement la surface, comme le fait un porte-voix ou bien encore le pavillon d'un phonographe ou celui d'un instrument de musique à vent.



Phonographe d'Edison photo



Le phonographe d'Edison n'utilisait aucune amplification électronique, seulement un pavillon pour adapter l'impédance.

Emetteurs et récepteurs en mouvement



Ondes émises par un avion subsonique animation

Un avion volant à une vitesse inférieure à celle du son $(v = 200m.s^{-1} < c = 340m.s^{-1})$ par exemple), ne crée pas d'onde de choc. Les ondes sonores émises en de multiples endroits par l'avion arrivent en des temps différents à l'observateur.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.



Onde de choc provoquée par un avion supersonique animation

Un avion volant à une vitesse supérieure à celle du son $(v = 400m.s^{-1} > c = 340m.s^{-1})$ par exemple, crée une onde de choc. Les ondes sonores émises en de multiples endroits par l'avion arrivent en même temps à l'observateur : c'est le "bang" supersonique.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.



₹14 Bang supersonique exercice

On s'intéresse à un point matériel M (l'avion) qui se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante et qui émet une onde qui se propage avec la célérité c.

Un observateur fixe, en O, reçoit l'onde émise par $M(t_1)$ à la date t'_1 et l'onde émise par $M(t_2)$ à la date

1) Que doit vérifier $OM(t_1) - OM(t_2)$ en fonction de c, v et $M(t_1)M(t_2)$ pour que les deux ondes arrivent en même temps $(t'_1 = t'_2)$?

2) En supposant l'avion suffisamment loin $(OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2))$, montrer que la dernière relation revient à $\cos \alpha = \frac{c}{v}$, où $\alpha = (\overrightarrow{OM(t_1)}, -\overrightarrow{v})$.

3) En déduire qu'il faut que l'avion soit supersonique pour que ces deux ondes arrivent en même

4) Pourquoi, quand on entend le bang supersonique, l'avion est dans une direction orthogonale à celle d'arrivée du son?

 $OM(t_1) - OM(t_2) = \frac{c}{v}M(t_1)M(t_2)$. Si l'avion est loin, $OM(t_1) - OM(t_2) = -\frac{\overrightarrow{OM(t_1)}}{OM(t_1)}\overrightarrow{M(t_1)}M(t_1)M(t_2)$, qui donne bien $\cos \alpha = \frac{c}{v}$. le cosinus étant inférieur à 1, il faut que $v \ge c$. On regarde dans la direction $OM(t_1)$, alors que l'avion est alors en $M(t_1')$. Or $t_1' - t_1 = \frac{OM(t_1)}{c}$ et $M(t_1)M(t_1') = \frac{v}{c}OM(t_1) = \frac{OM(t_1)}{\cos\alpha}$, d'après le précédent exercice. On a donc $\cos\alpha = \frac{OM(t_1)}{M(t_1)M(t_1')}$, ainsi, $M(t_1)M(t_1')$ est l'hypothénuse du triangle $M(t_1)M(t_1')O$, rectangle en O.



\$\frac{15}{8}\$15 Effet Doppler théorème

M qui émet un "bip" avec une période T_0 dans son référentiel. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O, reçoit le bip émis par $M(t_1)$ à la date t_1' et celui émis par $M(t_2)$ à la date t_2' . La période T séparant les deux "bips" reçus par l'observateur est $T = T_0 + \frac{OM(t_2) - OM(t_1)}{c}$. $OM(t_2) - OM(t_1) = T_0.v_z$.

On s'intéresse à un point matériel M qui émet une onde de période T_0 dans son référentiel. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O, reçoit l'onde émise par M qui se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante, et l'onde a la célérité c. Dans le cas où $v \ll c$, ν , la fréquence de l'onde dans le référentiel du récepteur vérifie

$$\nu = \nu_0. \left(1 - \frac{v_z}{c} \right)$$

où ν_0 est la fréquence dans le référentiel de l'émetteur et $v_z=\frac{\vec{v}.\overrightarrow{OM}}{OM}$.



Effet Doppler dans la vie courante : s'y retrouver

On connaît tous la variation de fréquence de la sirène des pompiers, par exemple : lorsque le véhicule se rapproche $(v_z < 0)$, le son est aigu $(\nu = \nu_0. (1 - \frac{v_z}{c}) > \nu_0)$, et lorsqu'il s'éloigne $(v_z > 0)$, le son est grave $(\nu = \nu_0, (1 - \frac{v_z}{c}) < \nu_0)$.



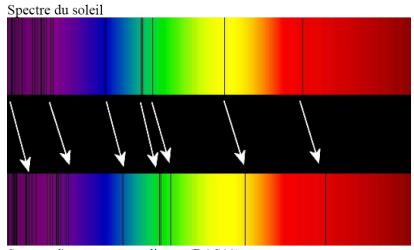
Le "redshift" en astronomie : s'y retrouver

L'expansion de l'univers se caractérise par le fait que les astres s'éloignent de nous $(v_z > 0)$. Aussi, les fréquences des ondes lumineuses qu'ils nous envoient nous paraissent plus faibles, ou leur longueurs d'onde plus grandes (on parle de déplacement vers le rouge, ou en anglais de "redshift").

Comme la loi de Hubble stipule un rapport constant entre la vitesse et l'éloignement d'une étoile, la mesure de la vitesse d'un astre grâce au "redshift" permet de connaître sa distance à nous.



Spectres de deux étoiles photo



Spectre d'un superamas distant (BAS11)

Les raies sombres d'absorption de certains atomes (hydrogène en particulier) dans le spectre des étoiles sont d'autant plus déplacées vers le rouge que l'étoile s'éloigne plus vite de nous.



Le contrôle de la vitesse par radar : s'y retrouver

les fameux radars sur la route mettent à contribution l'effet Doppler afin de mesurer la vitesse des véhicules : ces derniers réfléchissent l'onde qui leur est envoyée, en en changeant la fréquence suivant leur vitesse.



Echographie Doppler : s'y retrouver

la médecine utilise aussi l'effet Doppler pour mesurer la vitesse d'écoulement du sang dans les vaisseaux lors d'une échographie (envoi d'une onde ultrasonore).



(1) Modélisation d'un instrument à vent exercice

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire $M=29~{\rm g\cdot mol^{-1}}$. Le rapport entre les capacités thermiques à pression constante c_p et à volume constant c_v est $\gamma = \frac{c_p}{c} = 1, 4$. On prendra la constante des gaz parfaits égale à $R=8,31~\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}.$

Au repos, l'état du fluide est décrit par la pression P_0 et la masse volumique μ_0 . En présence de l'onde sonore, l'état du fluide est décrit par :

- la pression $P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$;
- la masse volumique $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$;
- la vitesse particulaire $\vec{u}(M,t)$.
 - 1) Déterminer l'équation des ondes sonores
 - 2) Célérité du son dans l'air
- 2.a) Dans le cas où l'air est assimilé à un gaz parfait, établir l'expression de c en fonction de la constante des gaz parfaits R, de la masse molaire de l'air M, de γ et de la température T. Effectuer l'application numérique à 20 °C.
- 3) On étudie la propagation des ondes sonores dans un tuyau à section circulaire, de très grande longueur selon l'axe Oz. L'impédance caractéristique du tuyau est notée Z_c .
- 3.a) Établir alors la relation entre la surpression et la vitesse particulaire pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z croissants puis pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z décroissants.

3.b) Établir l'expression de Z_c en fonction de μ_0 et c.

On se place dans l'hypothèse d'une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques qui se propagent dans le tuyau de section constante d'aire S:

$$p_{_1}\left(z,t\right)=Ae^{j\left(\omega\,t-k\,z\right)}+Be^{j\left(\omega\,t+k\,z\right)}$$

On définit l'impédance acoustique \underline{Z}_z en un point d'abscisse z par la relation :

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{p}_1(z,t)}{\underline{u}_z(z,t)}$$

On peut établir l'équation suivante :

$$\underline{Z}_0 = Z_c \frac{\underline{Z}_L \cos(kL) + j Z_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + j \underline{Z}_L \sin(kL)}$$

où \underline{Z}_0 et \underline{Z}_L sont les valeurs de \underline{Z}_z respectivement en z=0 et z=L.

4) Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

Pour les deux instruments, le tuyau est limité par les plans z=0 et z=L. L'extrémité z=L est ouverte. En première approximation, on suppose que l'impédance acoustique est nulle au niveau d'une extrémité ouverte.

4.a) Que deviennent \underline{Z}_L et \underline{Z}_0 pour ces deux instruments?

Pour une flûte, l'extrémité z=0 peut être considérée comme quasiment ouverte. Par contre, pour une clarinette, l'anche située en z=0 se comporte comme un obstacle rigide.

- **4.b)** Quelles conséquences ces hypothèses ont-elles sur l'onde dans le tuyau d'une part et à l'extérieur d'autre part?
 - 4.c) En déduire les fréquences propres de la flûte.
 - 4.d) De même, en déduire les fréquences propres de la clarinette.
 - **4.e)** Que peut-on dire de la surpression en z = 0 pour chacun des instruments en z = L?
- **4.f)** Représenter la surpression à l'intérieur du tuyau pour les deux premiers modes de chacun des instruments.
- **4.g)** Déterminer la longueur approximative d'une flûte dont le fondamental est un mi de fréquence 330 Hz.
- **4.h)** A longueur égale, quel instrument, flûte ou clarinette, produit le son le plus grave? Comparer le timbre (c'est-à-dire les différents harmoniques émis) des deux instruments.
- 4.i) Expliquer le rôle du trou de registre situé à la distance L/3 (environ) de l'extrémité z=0 de la clarinette.

Correction:

1) Détermination de l'équation des ondes sonores

L'équation d'Euler sans tenir compte du terme de pesanteur, est :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \vec{v} = -\overrightarrow{grad} P$$

et devient, linéarisée : $\mu_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p_1$

L'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\left(\mu \vec{v}\right) = 0$$

qui devient à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\left(\vec{u}\right) = 0$$

En dérivant cette équation par rapport au temps,

$$\frac{\partial^{2}\mu_{1}}{\partial t^{2}}=-\frac{\partial}{\partial t}\mu_{0}div\left(\vec{u}\right)=-\mu_{0}div\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)=-div\left(\mu_{0}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)$$

L'équation précédente donne alors

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = -div\left(-\overrightarrow{grad}P_1\right) = \Delta p_1$$

(cqfd).

En utilisant l'écoulement isentropique

$$\chi_{S0} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = +\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S = +\frac{1}{\mu} \frac{\frac{D\mu}{Dt}}{\frac{DP}{Dt}} = +\frac{1}{\mu} \frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial t}}{\frac{\partial p_1}{\partial t}}$$

(ou encore $\mu_1 = \mu_0 \chi_{S0} p_1$) qu'on remplace dans l'expression précédente pour trouver

$$\mu_0 \chi_{S0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

On trouve bien que la surpression $p_1(M,t)$ vérifie une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

$$avec c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{S0}}}$$

2) Célérité du son dans l'air

Le fluide est assimilé à un gaz parfait. L'évolution étant adiabatique réversible, l'équation qui décrit un système fermé est la loi de Laplace :

$$P \cdot V^{\gamma} = cste \Rightarrow P \cdot \mu^{-\gamma} = cste$$

En différentiant le logarithme de cette équation, on obtient :

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0$$

pour un système fermé, soit

$$\frac{1}{P}\frac{DP}{Dt} = \frac{\gamma}{\mu}\frac{D\mu}{Dt}$$

qui au premier ordre donne:

$$\frac{1}{P_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t}$$

dont l'intégration donne

$$\frac{p_1}{P_0} = \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

qu'on compare à

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_{S0} p_1$$

donc

$$\frac{p_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0 \chi_{S0}} = c^2 = \gamma \frac{P_0}{\mu_0}$$

d'où

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$$

or la loi des gaz parfaits

$$P_0 = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{VM} = \frac{\mu_0 RT}{M} \Rightarrow \frac{P_0}{\mu_0} = \frac{RT}{M}$$

avec M la masse molaire de l'air, donc $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}}}$

AN:

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times (273 + 20)}{29 \times 10^{-3}}}$$

donc
$$c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
.
3) Onde plane dans un tuyau

3) Onde plane dans un tuyat 3.a)

L'équation d'Euler linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p_1 \Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial u_z}{\partial t}$$

pour une onde plane progressive suivant Oz

• dans le sens des z croissants : $p_1 = f\left(w = t - \frac{z}{c}\right)$ donc $\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{df}{dw}$. De même $u_z = g\left(w = t - \frac{z}{c}\right)$ donc $\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{dg}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = +\frac{dg}{dw}$. Donc

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c} \frac{df}{dw} = -\mu_0 \frac{dg}{dw}$$

d'où l'on déduit $p_1 = \mu_0 c u_z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_{S0}}} u_z$;

• dans le sens des z décroissants : $p_1 = h\left(\overline{w} = t + \frac{z}{c}\right)$ donc $\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{dh}{dw}\frac{\partial w}{\partial z} = +\frac{1}{c}\frac{dh}{dw}$. De même $u_z = k\left(w = t - \frac{z}{c}\right)$ donc $\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{dk}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = +\frac{dk}{W}$. Donc

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial u_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dh}{dw} = -\mu_0 \frac{dk}{dw}$$

d'où l'on déduit $p_1 = -\mu_0 \, c u_z = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_{S0}}} u_z$

Remarque : on peut établir cette propriété pour les OPPM. Comme la relation trouvée est linéaire et indépendante de la fréquence, elle est valable pour toute OPP (superposition d'OPPM).

3.b)

Comme $p_1 = \mu_0 c u_z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_{S0}}} u_z$ pour une OPPM se propageant vers les z croissants, on trouve $Z_c = \mu_0 c$ 3.c)

$$\underline{p}_{1}\left(z,t\right)=Ae^{j\left(\omega\,t-k\,z\right)}+Be^{j\left(\omega\,t+k\,z\right)}\Rightarrow\underline{u}_{z}\left(z,t\right)=\frac{A}{Z_{c}}e^{j\left(\omega\,t-k\,z\right)}+\frac{B}{-Z_{c}}e^{j\left(\omega\,t+k\,z\right)}$$

Donc

$$\underline{Z}_z = \frac{Ae^{j(\omega\,t-k\,z)} + Be^{j(\omega\,t+k\,z)}}{\left(\frac{A}{Z_c}e^{j(\omega\,t-k\,z)} + \frac{B}{-Z_c}e^{j(\omega\,t+k\,z)}\right)} = Z_c\frac{Ae^{j(\omega\,t-k\,z)} + Be^{j(\omega\,t+k\,z)}}{Ae^{j(\omega\,t-k\,z)} - Be^{j(\omega\,t+k\,z)}}$$

donc

$$\underline{Z}_0 = Z_c \frac{Ae^{j(\omega t)} + Be^{j(\omega t)}}{Ae^{j(\omega t)} - Be^{j(\omega t)}} = Z_c \frac{A + B}{A - B}$$

et

$$\underline{Z}_{L} = Z_{c} \frac{Ae^{j(\omega t - k L)} + Be^{j(\omega t + k L)}}{Ae^{j(\omega t - k L)} - Be^{j(\omega t + k L)}} = Z_{c} \frac{A \left[\cos\left(k L\right) - j \sin\left(k L\right)\right)\right] + B \left[\cos\left(k L\right) + j \sin\left(k L\right)\right]}{A \left[\cos\left(k L\right) - j \sin\left(k L\right)\right]\right] - B \left[\cos\left(k L\right) + j \sin\left(k L\right)\right]}$$

d'où

$$\underline{Z}_{L} = Z_{c} \frac{\cos\left(k\,L\right)\left(A+B\right) - j\,\sin\left(k\,L\right)\left(A-B\right)}{\cos\left(k\,L\right)\left(A-B\right) - j\,\sin\left(k\,L\right)\left(A+B\right)} = Z_{c} \frac{\cos\left(k\,L\right)\frac{A+B}{A-B} - j\,\sin\left(k\,L\right)}{\cos\left(k\,L\right) - j\,\sin\left(k\,L\right)\frac{A+B}{A-B}}$$

en remplaçant avec l'expression de \underline{Z}_0 , on trouve

$$\underline{Z}_{L} = Z_{c} \frac{\cos\left(k\,L\right) \frac{\underline{Z}_{0}}{\overline{Z}_{c}} - j\,\sin\left(k\,L\right)}{\cos\left(k\,L\right) - j\,\sin\left(k\,L\right) \frac{\underline{Z}_{0}}{\overline{Z}_{c}}} = Z_{c} \frac{\cos\left(k\,L\right) \underline{Z}_{0} - j\,\sin\left(k\,L\right) Z_{c}}{\cos\left(k\,L\right) Z_{c} - j\,\sin\left(k\,L\right) \underline{Z}_{0}}$$

 $et\ en\ inversant$:

$$\underline{Z}_{L}\left[\cos\left(k\,L\right)Z_{c}-j\,\sin\left(k\,L\right)\underline{Z}_{0}\right]=\cos\left(k\,L\right)Z_{c}\underline{Z}_{0}-j\,\sin\left(k\,L\right)Z_{c}^{2}$$

 \Rightarrow

$$\underline{Z}_{0}\left[Z_{c}\cos\left(k\,L\right)+j\,\sin\left(k\,L\right)\underline{Z}_{L}\right]=\underline{Z}_{L}\cos\left(k\,L\right)Z_{c}+j\,\sin\left(k\,L\right)Z_{c}^{2}$$

d'où enfin

$$\underline{Z}_{0} = Z_{c} \frac{\underline{Z}_{L} \cos(k L) + j Z_{c} \sin(k L)}{Z_{c} \cos(k L) + j \underline{Z}_{L} \sin(k L)}$$

(cqfd)

4) Fréquences d'une flûte et d'une clarinette

4.a) Dans les deux cas (flûte et clarinette), l'extrémité en z=L est ouverte donc $\underline{Z}_L=0$ \Rightarrow $\underline{Z}_0=+j\,Zc\,\tan{(k\,L)}$.

4.b)

Ces hypothèses imposent une réflexion totale de l'onde dans le tuyau et donc... aucune onde à l'extérieur!

4.c) Pour la flûte, $\underline{Z}_0 = 0$ donc

$$\tan(k L) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{2\pi f L}{c} = n\pi$$

où n est un entier. Soit $f = \frac{nc}{2L}$ où n est un entier (strictement positif).

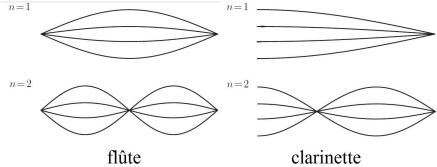
4.d) Pour la clarinette, $|\underline{Z}_0| \to \infty$ donc

$$\tan(k L) = \pm \infty \Leftrightarrow \frac{2 \pi L}{\lambda} = \frac{2 \pi f L}{c} = m \pi - \frac{\pi}{2}$$

où m est un entier. Soit $f = \frac{(2m-1)c}{4L}$ où m est un entier (strictement positif).

Lorsque la flûte est jouée, l'onde est une superposition des modes propres, qui sont des ondes planes stationnaire monochromatiques obéissant aux conditions aux limites. Pour chaque mode, la surpression en z=0 est nulle pour la flûte (nœud), maximale pour la clarinette (ventre). En z=L, elle est nulle pour les deux instruments.

4.f) La surpression à l'intérieur du tuyau pour les deux premiers modes de chacun des instruments est :



4.g) La longueur L d'une flûte dont le fondamental est un mi de fréquence $f_1 = \frac{c}{2L} = 330$ Hz est

$$L = \frac{3,4 \times 10^2}{2 \times 330} = 52 \text{ cm}$$

4.h)

A longueur égale la clarinette joue un octave plus bas que la flûte (fréquence fondamentale deux fois plus faible). Le son émis par une flûte possède tous les harmoniques du fondamental alors que celui émis par la clarinette ne possède que les harmoniques impairs.

4.i)

En ouvrant le trou de registre situé au tiers de la longueur de la clarinette, on impose un nœud de surpression en ce point : on interdit donc tous les modes qui ne possèdent pas ce nœud, en particulier le fondamental. La première fréquence émise est donc celle de fréquence 3 fois plus élevée que celle du fondamental. Eléments de correction :

$$\vec{F}_{j\to p} = 2\,\mu\,S\,(v_j - v_p)^2\,\vec{u}_x,\, P_{j\to p} = 2\,\mu\,S\,v_j^3\,(1-x)^2\,x\,$$
, si $x = \frac{1}{3},\, P_{max} = \left(\frac{2}{3}\right)^3\,\mu\,S\,v_j^3.$

Les techniques mathématiques à connaître

Effectuer des développements limités

Développements limités

On peut développer la fonction f(x) au voisinage de x=a par la formule de Taylor:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

En particulier:

•
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n);$$

•
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n);$$

•
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + 0(x^n)$$

•
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + 0(x^n);$$

• $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n});$

•
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1});$$

•
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + 0(x^5)$$
.

Linéarisation d'une expression : méthode des perturbations

Exemple du pendule simple aux petits angles.

L'équation du pendule simple est : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

A l'ordre 0, $\theta = \theta_0 = 0$, et puisque c'est une constante, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, donc la relation est vraie à l'ordre 0. On perturbe cette solution : $\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_1$ avec $|\theta_1| \ll 1$ (un "petit angle").

A l'ordre 1, l'équation devient, puisque $\sin \theta \approx \theta_1$ et $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 \theta_1}{dt^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \, \theta_1 = 0$$

Détermination d'une distance approximative

Exemple: trouver la distance AB avec A = (a, 0, 0), B = (x, y, d) et |a|, |x|, |y| qui sont petits devant d. Une possibilité est d'exprimer celle-ci grâce à :

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB^2}} = \sqrt{\left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)^2} = \left(\overrightarrow{OA^2} + \overrightarrow{OB^2} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 + x^2 + y^2 + d^2 - 2ax\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le terme d'ordre 0 (ici d) doit ensuite être mis en facteur :

$$AB = \left(d^2 \left[1 + \left(\frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{d^2}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}} = d\left(1 + \epsilon\right)^{\frac{1}{2}} \approx d\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{d^2}\right)$$

soit le développement limité:

$$AB \approx d + \frac{a^2 + x^2 + y^2 - 2ax}{2d}$$

Technique à maîtriser

jeudī 7 décembre 2017

I- Les capacités exigibles

1. Démontrer l'équation de D'alembert pour les ondes acoustiques



ce qu'il faut savoir faire capacités

Classifier les ondes acoustiques par domaines fréquentiels.

Valider l'approximation acoustique en manipulant des ordres de grandeur.

Écrire le système des trois équations locales utiles.

Linéariser les équations et établir l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes.

Utiliser sa généralisation admise en faisant appel à l'opérateur laplacien.

2. Chercher des solutions sous la forme d'ondes acoustiques



ce qu'il faut savoir faire capacités

Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques homogènes.

Utiliser la notion d'impédance acoustique

Utiliser les expressions admises du vecteur-densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Utiliser la notion d'intensité acoustique en décibel et citer quelques ordres de grandeur.

Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en 1/r de l'amplitude.

3. Etudier la discontinuité d'une onde acoustique à une interface



ce qu'il faut savoir faire capacités

Expliciter des conditions aux limites à une interface.

Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion.

Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.

4. Pour aller plus loin : étudier les émetteurs et récepteurs en mouvement



ce qu'il faut savoir faire capacités

Décrire et mettre en œuvre un protocole de détection synchrone pour mesurer une vitesse par décalage Doppler

II- Méthodes

1. Démontrer l'équation de D'alembert pour les ondes acoustiques

A) Démonstration de l'équation de propagation des ondes acoustiques méthode

Il faut linéariser la compressibilité isentropique, l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler. Puis découpler les deux équations en vitesse et pression.

2. Chercher des solutions sous la forme d'ondes acoustiques

B) Solutions de l'équation de propagation des ondes acoustiques méthode Les solutions sont des superpositions d'ondes planes voire OPPM, ou des ondes stationnaires.

3. Etudier la discontinuité d'une onde acoustique à une interface

ullet C) Coefficients de transmission et de réflexion d'une onde acoustique à une interface $^{m\acute{e}thode}$

Il existe trois ondes:

- l'onde incidente $\psi_i\left(t-\frac{z}{c_1}\right)$ telle que $\vec{v}_i=\psi_i\left(t-\frac{z}{c_1}\right).\vec{u}_z$ et $p_i=Z_1.\psi_i\left(t-\frac{z}{c_1}\right)$ dans le premier tuyau (z<0);
- l'onde réfléchie $\psi_r\left(t+\frac{z}{c_1}\right)$ telle que $\vec{v}_r=\psi_r\left(t+\frac{z}{c_1}\right).\vec{u}_z$ et $p_r=-Z_1.\psi_r\left(t+\frac{z}{c_1}\right)$ dans le premier tuyau (z<0);
- l'onde transmise $\psi_t\left(t-\frac{z}{c_2}\right)$ telle que $\vec{v}_t=\psi_t\left(t-\frac{z}{c_2}\right).\vec{u}_z$ et $p_t=Z_2.\psi_t\left(t-\frac{z}{c_2}\right)$ dans le second tuyau (z>0).

Il s'agit d'abord de déterminer la condition à l'interface : il faut écrire la continuité de la pression et du débit (produit surface - vitesse). Puis on réécrit les conditions de continuité à l'interface en faisant apparaître les coefficients de transmission et réflexion en amplitude. Le tout donne un système d'équations qui permet de déterminer les coefficients.

4. Pour aller plus loin : étudier les émetteurs et récepteurs en mouvement

D) Effet Doppler méthode
Le mieux est de raisonner avec des "bips".

III- Exercices

1. Démontrer l'équation de D'alembert pour les ondes acoustiques

1.1) Linéarisation de la conservation de la masse

Que donne la conservation de la masse en mécanique des fluides à l'ordre nul et au premier ordre?

On a vu en mécanique des fluides que la masse volumique vérifiait

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\left(\mu.\overrightarrow{v}\right) = 0$$

A l'ordre nul : $\frac{\partial \mu_0}{\partial t} + div\left(\mu_0.\overrightarrow{0}\right) = 0$ et au premier ordre $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\mu_0.\overrightarrow{v}\right) = 0$.

1.2) Linéarisation de l'équation d'Euler

Que donne l'équation d'Euler à l'ordre nul et au premier ordre? On négligera les effets de la pesanteur.

En considérant les phénomènes de viscosité négligeables, on peut appliquer l'équation d'Euler dans un référentiel galiléen (seuls le poids et les forces de pression interviennent),

$$\mu \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \mu. \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right).\overrightarrow{v} = \mu \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \mu.\overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2}\right) + \mu.\overrightarrow{rot} \left(\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v}$$

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu . \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P)$$

A l'ordre nul, on trouve : $\vec{0} = \mu_0 \cdot \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P_0)$, qui est la relation fondamentale de l'hydrostatique. Le premier ordre est :

$$\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p)$$

L'équation du mouvement d'une particule de fluide donne à l'ordre nul la relation fondamentale de l'hydrostatique et au premier ordre :

$$\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p)$$

1.3) Linéarisation de la compressibilité

Que donne la linéarisation de la compressibilité isentropique?

Le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{+1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

devient linéarisé : $\chi_S = \frac{+1}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{P - P_0} = \frac{+1}{\mu_0} \frac{\rho}{p}$ On retiendra la linéarisation de la compressibilité isentropique sous la forme :

$$\rho = \chi_S.\mu_0.p$$

(les variations de masse volumique sont proportionnelles aux variations de pression).

1.4) Découplage grâce au potentiel

Le potentiel ϕ permet de découpler les équations : montrer qu'il suit l'équation de D'alembert. En déduire que la surpression, la masse volumique et la vitesse suivent aussi l'équation de D'Alembert.

En effet, quand on reporte $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi)$ et $p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ dans $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S} div(\overrightarrow{v})$, On trouve :

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S} div \left(\overrightarrow{grad}(\phi) \right) = -\frac{1}{\chi_S} \Delta \phi$$

On peut dériver temporellement l'équation de d'Alembert portant sur le potentiel ϕ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0 . \chi_S} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Comme $p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ la surpression suit aussi :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta p$$

De plus, comme $\rho = \chi_S.\mu_0.p$, on trouve aussi pour la masse volumique

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta \rho$$

Enfin, on peut dériver spatialement l'équation de d'Alembert portant sur le potentiel ϕ

$$\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\left(\overrightarrow{grad}(\phi)\right) = \frac{1}{\mu_{0}.\chi_{S}}\overrightarrow{grad}\left(\operatorname{div}\left(\overrightarrow{grad}(\phi)\right)\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^{2}\overrightarrow{v}}{\partial t^{2}} = \frac{1}{\mu_{0}.\chi_{S}}\overrightarrow{grad}\left(\operatorname{div}\left(\overrightarrow{v}\right)\right)$$

D'autre part, comme

$$\Delta \vec{v} = \vec{\triangledown}.\left(\vec{\triangledown}.\vec{v}\right) - \vec{\triangledown} \wedge \left(\vec{\triangledown} \wedge \vec{v}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{v}\right)\right) - \vec{\triangledown} \wedge \left(\overrightarrow{rot}(\vec{v})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{v}\right)\right)$$

car $\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. Aussi, on trouve enfin pour la vitesse :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \chi_S} \Delta \vec{v}$$

1.5) Ecoulement acoustique potentiel

- 1) Montrer qu'un écoulement acoustique est potentiel.
- 2) Que vaut la vitesse \vec{v} en fonction du potentiel ϕ ?
- 3) Exprimer aussi la surpression en fonction du potentiel.
 - 1) En prenant le rotationnel de $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{grad}(p)$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{rot} \overrightarrow{v} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{rot} \left(\overrightarrow{grad}(p) \right) = \overrightarrow{0}$$

car le rotationnel d'un gradient est nul. Or \overrightarrow{v} étant variable, si $\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{rot} \overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{0}$, c'est que $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Aussi, \overrightarrow{v} est irrotationnel.

2) On peut donc écrire :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

3) En remplaçant la vitesse en fonction du potentiel ϕ dans $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{grad}(p)$, on trouve $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \overrightarrow{grad}\left(-\frac{p}{\mu_0}\right)$. On a donc $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{p}{\mu_0} + f(t)$. Comme le potentiel est défini à une fonction temporelle près $(\overrightarrow{grad}(\phi + g(t)) = \overrightarrow{grad}(\phi))$, on peut choisir f(t) = 0. Aussi, la surpression dérive du potentiel des vitesses par :

$$p = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

1.6) Vitesse du son dans le cas des gaz

- 1) Montrer que la célérité du son dans un gaz parfait à la température T_0 est $c_s = \sqrt{\frac{\gamma.R.T_0}{M}}$
- 2) Application numérique dans le cas de l'air $(M=29g.mol^{-1})$, gaz diatomique $(\dot{\gamma}=\frac{7}{5})$, à température ambiante $(T_0=25^{\circ}C)$.

1) Si on assimile ce gaz à un gaz parfait, l'évolution isentropique est donnée par la loi de Laplace vue en thermodynamique $(P.V^{\gamma}=cste)$, qu'on peut rééecrire $\frac{P}{\mu^{\gamma}}=cste$, soit $P=A.\mu^{\gamma}$ où A est une constante. Ainsi, $\frac{\partial P}{\partial \mu}=A.\gamma.\mu^{\gamma-1}=\gamma\frac{P}{\mu}\approx\gamma\frac{P_0}{\mu_0}$. On peut faire appel à l'équation d'état des gaz parfaits, P.V=n.R.T qui se réécrit $P=\frac{\mu.R.T}{M}$ où M est la masse molaire du gaz, et qui, à l'ordre nul donne $P_0=\frac{\mu_0.R.T_0}{M}$. On trouve une célérité des ondes sonores dans les gaz parfait qui suivent une évolution isentropique

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma . P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma . R. T_0}{M}}$$

où l'on voit que la célérité des ondes sonores croît comme la racine carrée de la température absolue.

2) Une application numérique dans le cas de l'air $(M=29g.mol^{-1})$, gaz diatomique $(\gamma=\frac{7}{5})$, à température ambiante $(T_0=25\,^{\circ}C)$ donne :

$$c_s = 346 m.s^{-1}$$

1.7) Gaston, y'a l'téléphonqui son

1) Gaston se demande pourquoi, connaissant la vitesse du son, lors d'une conversation téléphonique les paroles ne mettent pas plusieurs heures pour parvenir à un interlocuteur situé à plusieurs milliers de kilomètres. Que lui répondre?

Un constructeur de casques audio sans fil donne les caractéristiques techniques suivantes :

- Réponse fréquentielle : 20 22000Hz
- fréquence porteuse : 433MHz.
 - 2) Expliquer à Gaston ce que cela signifie.
 - 1) Les ondes sonores sont converties en ondes électromagnétiques et réciproquement. Ce sont ces dernières qui se propagent.
 - 2) Les 20 22000Hz correspondent au spectre audible et représentent les fréquences des enveloppes qui sont beaucoup plus faibles que la fréquence de l'onde porteuse, 433MHz. Il s'agit d'ondes électromagnétiques dans le domaine des micro-ondes ($\lambda = 70cm$) qui sont converties en ondes acoustiques au niveau des casques.

1.8) Octaves et demi-tons

- 1) Rappeler la définition d'une octave.
- 2) Sur combien d'octaves s'étend le domaine audible?

Une oreille exercée est capable de différencier un écart d'un dixième de demi-ton tempéré (il y a douze demi-tons tempérés dans une octave) dans de bonnes conditions d'écoute.

- 3) À quel écart relatif de fréquence cela correspond donc un dixième de demi-ton?
 - 1) Une octave correspond à un doublement de fréquence.
- 2) $\nu_{min} = 20Hz$ est la plus petite fréquence audible, $\nu_{max} = 20kHz$ est la plus grande. Le nombre N d'octaves est tel que $\nu_{max} = 2^N . \nu_{min}$, soit encore

$$N = \frac{ln\left(\frac{\nu_{max}}{\nu_{min}}\right)}{ln(2)} = 10octaves$$

3) Un demi-ton tempéré correspond à un rapport de fréquences $\frac{\nu'}{\nu}=2^{\frac{1}{12}}$. Un dixième de demi-ton tempéré correspond donc à un rapport de fréquences $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{10}}=2^{\frac{1}{120}}$.

Cela correspond à un écart relatif de fréquence

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 2^{\frac{1}{120}} - 1 = 0.6\%$$

1.9) Oiseaux et éléphants

1) Montrer que les longueurs d'onde audibles par l'oreille humaine dans des conditions standard sont à l'échelle humaine.

- 2) Pourquoi a priori un barrissement, est-il plus grave qu'un piaillement?
- 3) Pourquoi peut-on entendre des fréquences que l'on ne sait pourtant pas chanter?
 - 1) Pour $c=340m/s, \ \nu\in [20Hz;20kHz]$ correspond à $\lambda\in [1,7cm;17m]$. Les longueurs d'onde sont de l'ordre de la taille de la source.
- 2) Un barrissement correspond donc à des longueurs d'onde plus grandes qu'un piaillement donc à un son plus grave.
- 3) Les cordes vocales ont un spectre d'émission moins étendu que le spectre de réception de l'oreille. La sensibilité très fine de cette dernière met en jeu des mécanismes subtils permis par une anatomie très raffinée.

1.10) Propagation du son

1) Retrouver les équations de propagation du son à l'aide d'une description lagrangienne du fluide dans une conduite de section S constante.

Le déplacement, à l'instant t, d'une particule de fluide d'abscisse x lorsque le fluide est au repos est noté $\xi(x,t)$. La surpression et la masse volumique de cette tranche sont p(x,t) et $\mu(x,t)$. La masse volumique $\mu(x,t)$ désigne, à l'instant t, la masse volumique de la particule suivie dans son mouvement, dont l'abscisse à la date t correspond à $x + \xi(x,t)$, et non pas x.

En évaluant la variation de masse volumique d'une tranche élémentaire de fluide, de section S et d'épaisseur dx au repos, on trouve :

$$\mu = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'équation du mouvement de cette même tranche de fluide donne :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En utilisant la relation $\mu = \mu_0 \cdot \chi_S \cdot p$ et la vitesse $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, on retrouve le système d'équations couplées réduit à la propagation unidimensionnelle :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

1.11) Vent et propagation du son

On considère un écoulement d'air à vitesse constante $u_0 > 0$ (dans la direction et le sens de l'axe (Ox)), la même en tout point. Dans cet écoulement se propage une onde sonore plane progressive dans la direction de l'axe (Ox).

1) Trouver l'équation de propagation de la surpression acoustique p(x,t) dans le cadre de l'approximation acoustique.

Une O.P.P.M. se propage dans l'écoulement. En notation complexe p(x,t) s'écrit

$$\tilde{p}(x,t) = \tilde{p}_0.e^{j.(\omega.t-k.x)}$$

- 2) Trouver la relation de dispersion entre k et ω et interpréter le résultat obtenu.
- 3) Que doit-on entendre par l'expression «le vent porte le son»?

$$\mu_0 + \mu(x,t)$$

1 avec $\mu_0 \gg |\mu|$

La vitesse d'une particule fluide est notée :

$$u_0 + v(x,t)$$

avec $u_0 \gg |v|$. La relation de conservation de la masse conduit à :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\mu_0. \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

/1 La relation $\mu = \mu_0.\chi_S.p = \frac{p}{c^2}$ en posant $\frac{1}{c^2} = \mu_0.\chi_S$. reste inchangée. /1 Éliminant μ et v dans les trois équations ci-dessous,, on obtient :

$$\left(c^2 - u_0^2\right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2.u_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$$

La solution donnée convient si :

$$\omega^2 - 2.\omega \cdot u_0 \cdot k - k^2 \cdot (c^2 - u_0^2) = 0$$

$$\omega = k. (u_0 \pm c)$$

On retrouve donc une relation du type $\omega = k.c'$ avec $c' = u_0 \pm c$. Si l'onde se propage dans le sens de l'écoulement, $c' = u_0 + c$ est supérieure à c et l'onde sonore se propage plus rapidement que dans l'air au repos : le vent porte le son.

2. Chercher des solutions sous la forme d'ondes acoustiques

2.12) Forme des ondes acoustiques planes

On peut écrire les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sous trois types :

- $\phi = cste$, qu'on exclut habituellement;
- $\phi = f\left(t \frac{z}{c_s}\right)$, onde plane progressive vers les z croissants;
- $\phi = g\left(t + \frac{z}{c_s}\right)$, onde plane progressive vers les z décroissants.

Déterminer alors la forme de :

- 1) la surpression
- 2) la vitesse.

1) Comme
$$p(z,t) = -\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu_0 \left[\frac{\partial f(t - \frac{z}{c_s})}{\partial t} + \frac{\partial g(t + \frac{z}{c_s})}{\partial t} \right].$$

D'autre part, $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z = \left[\frac{\partial f(t - \frac{z}{c_s})}{\partial z} + \frac{\partial g(t + \frac{z}{c_s})}{\partial z} \right] \vec{u}_z$. Du potentiel, on déduit la pression :

$$p(z,t) = -\mu_0. \left[f'\left(t - \frac{z}{c_s}\right) + g'\left(t + \frac{z}{c_s}\right) \right]$$

2) et la vitesse:

$$\vec{v} = \left[-f'\left(t - \frac{z}{c_s}\right) + g'\left(t + \frac{z}{c_s}\right) \right] \frac{\vec{u}_z}{c_s}$$

2.13) Seuil de douleur

- 1) Dans le cas du seuil de douleur (L = 120dB), déterminer
 - **1.a)** l'amplitude de la surpression p_{max} ;
 - **1.b)** l'amplitude de la vitesse v_{max} .
- 2) Vérifier qu'on est bien dans le cas d'une perturbation.
 - 1) Dans le cas du seuil de douleur, une application numérique donne :

$$L = 120dB \Leftrightarrow I = 1W.m^{-2} = \langle p.v \rangle = Z_c \langle v^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{Z_c}$$

1.a)
$$\Leftrightarrow p_{max} = \sqrt{2.Z_c.I} = 30Pa.$$

1.b)
$$\Leftrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2.I}{Z_c}} = 75mm/s$$

2) On vérifie bien que $p_{max} \ll P_0 = 10^5 Pa$ et $v_{max} \ll c_s = 340 m.s^{-1}$.

2.14) Onde stationnaire et OPPM

On s'intéresse à une onde stationnaire dont la vitesse est

$$v_z = v_0 \cdot \cos(k \cdot z + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

- 1) Montrer qu'elle due à la superposition
- d'une OPPM incidente $\psi_+\left(t-\frac{z}{c_s}\right)=\frac{v_0}{2}\cos\left(\omega.t-k.z+\varphi_G-\varphi_F\right)$
- et d'une OPPM réflechie $\psi_-\left(t+\frac{z}{c_s}\right)=\frac{v_0}{2}\cos\left(\omega.t+k.z+\varphi_G+\varphi_F\right)$
 - 2) En déduire que la pression de l'onde stationnaire est

$$p = -Z_c v_0 \cdot \sin(k \cdot z + \varphi_F) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

1) Elle peut se réécrire

$$v_z = \frac{v_0}{2} \left[\cos \left(\omega . t - k . z + \varphi_G - \varphi_F \right) + \cos \left(\omega . t + k . z + \varphi_G + \varphi_F \right) \right]$$

La pression est donc la superposition

- d'une OPPM incidente $Z_c\psi_+\left(t-\frac{z}{c_s}\right)=Z_c\frac{v_0}{2}\cos\left(\omega.t-k.z+\varphi_G-\varphi_F\right)$
- et d'une OPPM réflechie $-Z_c\psi_-\left(t+\frac{z}{c_s}\right)=-Z_c\frac{v_0}{2}\cos\left(\omega.t+k.z+\varphi_G+\varphi_F\right)$
 - 2) L'onde de pression peut donc se réécrire

$$p = -Z_c \frac{v_0}{2} \left[\cos \left(\omega . t - k . z + \varphi_G - \varphi_F \right) - \cos \left(\omega . t + k . z + \varphi_G + \varphi_F \right) \right]$$

2.15) Caractéristiques d'une onde stationnaire

- 1) Montrer que les nœuds pour la pression et les ventres pour la vitesse sont aux mêmes endroits, alors que les nœuds pour la vitesse et les ventres pour la pression coïncident.
 - 2) En déduire que les fuseaux ont une largeur $\delta z = \frac{\lambda}{2}$.
 - 1) Les nœuds pour la pression correspondent à

$$p=0 \forall t \Leftrightarrow k.z+\varphi_F=q.\pi$$
où $q \in Z$

et les ventres pour la vitesse à l'amplitude de v_z maximale

$$\Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi$$
 où $q \in Z$

Les nœuds pour la vitesse correspondent à

$$v_z = 0 \forall t \Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi + \frac{\pi}{2}$$
 où $q \in Z$

et les ventres pour la pression à l'amplitude de p maximale

$$\Leftrightarrow k.z + \varphi_F = q.\pi + \frac{\pi}{2}$$
 où $q \in Z$

2) Les fuseaux (aussi bien pour la pression que pour la vitesse) sont l'espace entre deux nœuds consécutifs

$$\Leftrightarrow k.\delta z = \pi$$

2.16) Caisse du diapason

L'analyse harmonique du son émis par un diapason posé sur sa caisse de résonance contient essentiellement un harmonique de fréquence $\nu=440Hz$ (la note est un la). La caisse de résonance est un parallélépipède creux, dont la plus grande dimension est L=19,5cm, l'un des bouts étant fermé, l'autre ouvert.

- 1) Comment expliquer le choix de cette dimension?
- 1) Une extrémité de la caisse est bouchée, l'autre libre. Pour le premier harmonique, $L=\frac{\lambda}{4}$ Le mode fondamental d'oscillation d'ondes sonores planes se propageant dans la direction des arêtes de plus grande dimension a donc une fréquence égale à $\nu'=\frac{c}{4.L}$ avec $c=340m.s^{-1}$ (vitesse du son dans l'air atmosphérique à $20^{\circ}C$). On obtient

$$\nu' = \frac{c}{4.L} = 436Hz$$

très proche de la fréquence du son émis, dont la fréquence est imposée par les vibrations du diapason. La caisse du diapason est bien une caisse de résonance.

2.17) Harmoniques d'un tuyau

- 1) Quelle est la fréquence de la première harmonique émise par un tuyau de longueur L=10m fermé à ses deux extrémités?
 - 1) La longueur du tuyau est égale à deux demi-longueurs d'onde pour la première harmonique : $L = \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow$

$$\nu = \frac{c}{I} = 34Hz$$

3. Etudier la discontinuité d'une onde acoustique à une interface

3.18) Conditions de continuité à une interface

 $v_z = \psi$. Montrer que les ondes transmise et réfléchies à une interface 1 / 2 sont

$$\begin{cases} \psi_t\left(t,z=0^+\right) = \frac{2}{\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{S_2}{S_1}} \psi_i\left(t,z=0^-\right) = \frac{S_1}{S_2} \frac{2\frac{Z_1}{S_1}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} \psi_i\left(t,z=0^-\right) \\ \psi_r\left(t,z=0^-\right) = \frac{\frac{Z_1}{Z_2} - \frac{S_1}{S_2}}{\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{S_1}{S_2}} \psi_i\left(t,z=0^-\right) = \frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} \psi_i\left(t,z=0^-\right) \end{cases}$$

La continuité de la pression est vraie à l'ordre nul (en l'absence d'onde $P_0(z=0^-,t)=P_0(z=0^+,t) \ \forall t$), et vraie donc aussi pour la perturbation

$$p(z = 0^-, t) = p(z = 0^+, t) \ \forall t$$

soit

$$Z_1. \left[\psi_i \left(t, z = 0^- \right) - \psi_r \left(t, z = 0^- \right) \right] = Z_2. \psi_t \left(t, z = 0^+ \right) \ \forall t$$

La continuité du débit devient

$$S_1. \left[\psi_i \left(t, z = 0^- \right) + \psi_r \left(t, z = 0^- \right) \right] = S_2. \psi_t \left(t, z = 0^+ \right) \ \forall t$$

Les deux équations de continuité donnent par différence

$$2.\psi_i(t,z=0^-) = \left[\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{S_2}{S_1}\right].\psi_t(t,z=0^+)$$

de même, on trouve à partir des deux équations de continuité

$$\frac{Z_{1}}{Z_{2}}.\left[\psi_{i}\left(t,z=0^{-}\right)-\psi_{r}\left(t,z=0^{-}\right)\right]=\frac{S_{1}}{S_{2}}.\left[\psi_{i}\left(t,z=0^{-}\right)+\psi_{r}\left(t,z=0^{-}\right)\right]$$

3.19) Coefficient de réflexion en amplitude

Déterminer les coefficients de réflexion en amplitude de la vitesse et de la surpression à une interface.

On part des conditions de continuité.

$$r_v = \frac{\psi_r(z=0^+,t)}{\psi_i(z=0^-,t)} = \frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$

ef

$$r_p = \frac{-Z_1.\psi_r(z=0^-,t)}{Z_1.\psi_i(z=0^-,t)}$$

On trouve

$$r_p = -\frac{\frac{Z_1}{S_1} - \frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}} = -r_v$$

3.20) Coefficients de transmission en amplitude

Déterminer les coefficients de transmission en amplitude de la vitesse et de la surpression à une interface.

On part des conditions de continuité.

$$\tau_v = \frac{\psi_t(z = 0^+, t)}{\psi_i(z = 0^-, t)}$$

et

$$\tau_p = \frac{Z_2.\psi_t(z=0^+,t)}{Z_1.\psi_i(z=0^-,t)}$$

On trouve

$$\tau_p = \frac{Z_2}{Z_1} \tau_v = \frac{2\frac{Z_2}{S_2}}{\frac{Z_1}{S_1} + \frac{Z_2}{S_2}}$$

3.21) Coeur qui bat

On donne les masses volumiques de l'eau $\mu_e=1,0.10^3 kgm^{-3}$ et de l'air $\mu_a=1,3kgm^{-3}$ ainsi que la célérité des ondes acoustiques dans l'air $c_a=340m.s^{-1}$ et dans l'eau $c_e=4.c_a$.

- 1) Estimer l'impédance sonore de l'air et de l'eau et les comparer.
- $\mathbf{2}$) Calculer le coefficient de transmission énergétique T d'une onde sonore à l'interface air-eau.
- 3) Expliquer pourquoi l'on entend pas naturellement les battements de cœur d'une autre personne à moins, par exemple, de coller l'oreille contre son corps.

1) Pour l'air, $Z_a = 440kg.m^{-2}s^{-1}$. Pour l'eau , $Z_e = 1, 4.10^6kg.m^{-2}s^{-1}$.

$$Z_e \gg Z_a$$

2) Le coefficient de transmission énergétique est donné par

$$T = \frac{4Z_a.Z_e}{(Z_a + Z_e)^2} = 0.1\%$$

3) Une onde sonore est très peu transmise à l'interface air/eau. L'impédance du corps est voisine de celle de l'eau. En collant l'oreille suffisamment, la couche d'air peut être rendue négligeable (plus fine que les longueurs d'onde acoustiques) et l'interface sépare alors deux milieux d'impédance voisine.

4. Pour aller plus loin : étudier les émetteurs et récepteurs en mouvement

4.22) Effet Doppler

On s'intéresse à un point matériel M qui émet un "bip" avec une période T_0 dans son référentiel. Un observateur fixe dans le référentiel d'étude, en O, reçoit le bip émis par $M(t_1)$ à la date t'_1 et celui émis par $M(t_2)$ à la date t'_2 . M se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante, et l'onde a la célérité c.

- 1) Exprimer la période T séparant les deux "bips" reçus par l'observateur, en fonction de T_0 , c, $OM(t_1)$ et $OM(t_2)$.
- 2) En supposant le mobile suffisamment loin $(OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2))$, exprimer $OM(t_2) OM(t_1)$ en fonction de T_0 et v_z , la projection de la vitesse de l'émetteur suivant $OM(t_1)$.
 - 3) Dans le cas où $v \ll c$, montrer que ν , la fréquence de l'onde dans le référentiel du récepteur vérifie

$$\nu = \nu_0. \left(1 - \frac{v_z}{c}\right)$$

où ν_0 est la fréquence dans le référentiel de l'émetteur.

$$T = T_0 + \frac{OM(t_2) - OM(t_1)}{c}$$
. $OM(t_2) - OM(t_1) = T_0.v_z$.

4.23) Bang supersonique

On s'intéresse à un point matériel M (l'avion) qui se déplace en ligne droite avec la vitesse v constante et qui émet une onde qui se propage avec la célérité c.

Un observateur fixe, en O, reçoit l'onde émise par $M(t_1)$ à la date t'_1 et l'onde émise par $M(t_2)$ à la date t'_2 .

- 1) Que doit vérifier $OM(t_1) OM(t_2)$ en fonction de c, v et $M(t_1)M(t_2)$ pour que les deux ondes arrivent en même temps $(t'_1 = t'_2)$?
- 2) En supposant l'avion suffisamment loin $(OM(t_1) \gg M(t_1)M(t_2))$, montrer que la dernière relation revient à $\cos \alpha = \frac{c}{v}$, où $\alpha = \left(\overrightarrow{OM(t_1)}, -\overrightarrow{v}\right)$.
 - 3) En déduire qu'il faut que l'avion soit supersonique pour que ces deux ondes arrivent en même temps.
- 4) Pourquoi, quand on entend le bang supersonique, l'avion est dans une direction orthogonale à celle d'arrivée du son?

 $OM(t_1)-OM(t_2)=\frac{c}{v}M(t_1)M(t_2).$ Si l'avion est loin, $OM(t_1)-OM(t_2)=-\frac{\overrightarrow{OM(t_1)}}{OM(t_1)}\overrightarrow{M}(t_1)M(t_2),$ qui donne bien $\cos\alpha=\frac{c}{v}.$ le cosinus étant inférieur à 1, il faut que $v\geqslant c.$ On regarde dans la direction $OM(t_1),$ alors que l'avion est alors en $M(t_1').$ Or $t_1'-t_1=\frac{OM(t_1)}{c}$ et $M(t_1)M(t_1')=\frac{v}{c}OM(t_1)=\frac{OM(t_1)}{\cos\alpha},$ d'après le précédent exercice. On a donc $\cos\alpha=\frac{OM(t_1)}{M(t_1)M(t_1')},$ ainsi, $M(t_1)M(t_1')$ est l'hypothénuse du triangle $M(t_1)M(t_1')O$, rectangle en O.

4.24) Doppler d'une voiture

1) On s'intéresse à l'effet Doppler dans le cas une voiture se dirigeant vers un piéton à 50km/h. Calculer les décalages relatifs en fréquence

- 1.a) dans le cas de la lumière : le piéton peut-il voir un changement de couleur de la voiture, sachant que l'œil ne peut pas faire de distinction entre les couleurs du doublet du sodium pour lequel $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 0, 1\%$?
- 1.b) dans le cas du son : le piéton peut-il percevoir un changement de timbre de la voiture, sachant qu'une oreille peut délecter une variation relative $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 1\%$?
 - 1) Pour le son et a fortiori pour la lumière, la vitesse relative voiture/détecteur reste très petite devant la vitesse des ondes. La voiture se rapproche ce qui correspond à une fréquence apparente $\nu = \nu_0$. $(1+\frac{v}{c})$ plus élevée que la fréquence propre ν_0 émise par la voiture (on se place dans la géométrie la plus simple). Le décalage relatif en fréquence est donc :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}$$

- 1.a) dans le cas de la lumière : $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 5.10^{-8}$ donc le piéton ne peut pas voir un changement de
- 1.b) dans le cas du son : $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 4.10^{-2}$, donc le piéton peut percevoir un changement de timbre de la voiture.

4.25) Galaxie d'Andromède

L'hydrogène en laboratoire émet une raie lumineuse ayant une longueur d'onde $\lambda_0 = 656, 3nm$. Quand on observe l'hydrogène contenu dans la galaxie d'Andromède on observe que la raie lumineuse précédente a une longueur d'onde λ telle que $\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 2,7.10^{-4}$.

1) La galaxie se rapproche-t-elle ou s'éloigne-t-elle de l'observateur?

- 2) Calculer sa vitesse par rapport à l'observateur.
 - 1) $\lambda > \lambda_0$, donc la galaxie s'éloigne.
 - 2) En supposant que la vitesse est purement radiale, on a $\frac{v}{c} = \frac{\lambda \lambda_0}{\lambda_0}$, d'où

$$v = 8.10^4 m/s$$

4.26) Onde de choc

- 1) Calculer le demi-angle θ au sommet du cône formé par l'onde de choc accompagnant un avion supersonique se déplaçant à une vitesse v.
 - 2) Application numérique : l'avion vole à Mach 2.
 - 3) Que se passe-t-il pour :
 - 3.a) $v \gg c$;
 - **3.b)** v < c.
 - 1) L'angle au sommet θ est obtenu dans le triangle rectangle d'hypothénuse de longueur $v.\Delta t$ (déplacement de l'avion pendant Δt) et de côté perpendiculaire à l'onde de choc de longueur $c.\Delta t$ (déplacement de la surface d'onde circulaire pendant Δt).

On a donc $\sin \theta = \frac{c \cdot \Delta t}{v \cdot \Delta t}$, soit :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{c}{v}\right)$$

2) Application numérique : la vitesse v de l'avion est le double de la vitesse du son c, soit :

$$\theta = 30^{\circ}$$

- 3)
- **3.b)** l'angle n'est défini que pour $v \geq c$: il faut que l'avion soit supersonique pour qu'il y ait un bang supersonique!
- Techniques mathématiques Effectuer des développements limités 5.

5.27) Linéarisation d'une équation différentielle autour d'une position d'équilibre

- 1) Linéariser la relation $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ autour de la solution $\theta = \theta_0$.
 - 1) Autour de la solution $\theta = \theta_0 + \varepsilon : \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$ et

$$\sin \theta = \sin (\theta_0 + \varepsilon) = \sin (\theta_0) + \varepsilon \cos (\theta_0)$$

 $\sin\theta = \sin\left(\theta_0 + \varepsilon\right) = \sin\left(\theta_0\right) + \varepsilon\,\cos\left(\theta_0\right)$ donc $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\sin\theta = 0$ devient à l'ordre $1: \frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\cos\left(\theta_0\right)\,\varepsilon = 0$.

5.28) Linéarisation d'une équation différentielle autour d'une autre position d'équilibre

- 1) Linéariser la relation $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \gamma (\theta a)^2 = 0$ autour de la solution $\theta = \theta_0$.
 - 1) Autour de la solution $\theta = \theta_0 + \varepsilon$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t},$$
et

$$(\theta - a)^2 = (\theta_0 + \varepsilon - a)^2 = (\theta_0 - a)^2 + 2(\theta_0 - a)\varepsilon + \varepsilon^2 = 2(\theta_0 - a)\varepsilon$$

1) Autom 3.6. $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2},$ $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t},$ et $(\theta - a)^2 = (\theta_0 + \varepsilon - a)^2 = (\theta_0 - a)^2 + 2 \ (\theta_0 - a) \ \varepsilon + \varepsilon^2 = 2 \ (\theta_0 - a) \ \varepsilon$ au premier ordre. $\mathrm{Donc} \ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \gamma \ (\theta - a)^2 = 0 \ \mathrm{devient} \ \text{à l'ordre} \ 1 : \frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + 2 \ \gamma \ (\theta_0 - a) \ \varepsilon = 0.$ Or à l'ordre 0,on trouve $\theta_0 - a = 0$, donc la linéarisation est : $\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = 0 \ (\mathrm{qu'on\ aurait\ pu\ trouver\ directement\ car\ le\ terme} \ (\theta - a)^2 \ \mathrm{n'est\ pas\ linéaire}.$

5.29) Linéarisation d'une fonction connue autour d'un point

- 1) Linéariser la fonction $f(x) = \frac{x(a+x)}{b+cx}$ autour de x = 0.
- 1) Autour de x = 0, $f(x) \approx \frac{ax}{b}$.

5.30) Linéarisation d'une fonction inconnue autour d'un point

- 1) Linéariser la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ autour de (f_0, x_0) .
 - 1) Autour de (f_0, x_0) , $f = f_0 + f' \Rightarrow df = f'$ et $x = x_0 + x' \Rightarrow dx = x'$, donc la fonction devient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f'}{x'}$$

5.31) Linéarisation d'une expression à plusieurs variables autour d'un point

- 1) Linéariser l'expression $\frac{x(a+x)}{b+cx} + \frac{xy}{d} + gy + \sin x = 0$ autour de (x=0,y=0).
 - 1) Autour de x = 0 et y = 0,

$$\frac{ax}{b} + 0 + gy + x \approx 0$$

Travaux dirigés vendredi 8 décembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

Isolation acoustique d'un mur

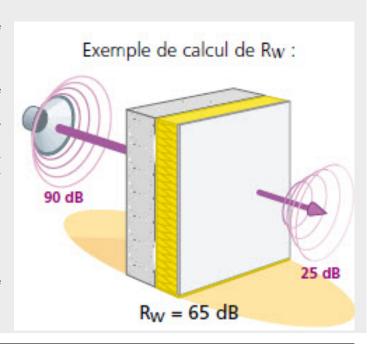
Extrait de la page "isolation-acoustique-les-murs" du site http://www.curbain.be/fr/renover-construire-et-conserver

Murs lourds : la loi de masse

Conformément au premier principe de l'isolation acoustique, plus un mur est lourd, meilleure est l'isolation (aux bruits aériens).

Le choix de la finition, qui détermine l'étanchéité à l'air de la paroi, influence l'isolation acoustique d'un mur maçonné. Un plafonnage améliore considérablement les performances d'une maçonnerie de blocs relativement poreux, comme ceux à base d'argile expansée ou en béton cellulaire. Rw passe de 25 dB pour un tel mur de 14 cm non enduit à 43 dB pour le même mur enduit d'un côté (44 dB si enduit sur les deux faces). La différence est minime pour des blocs plus étanches, comme ceux de type silico-calcaire ou de plâtre. L'épaisseur de l'enduit a peu d'importance (3 mm suffisent).

L'affaiblissement acoustique sera encore plus important si le mur est désolidarisé par une bande périphérique souple. Cette bande doit pouvoir résister à l'écrasement en raison du poids du mur.



Enoncé

Une onde sonore plane progressive sinusoïdale se propage dans l'air d'une pièce à une autre et arrive sous incidence normale sur le mur qui les sépare.

On supposera que l'épaisseur du mur est négligeable devant la longueur d'onde du phénomène. Ainsi, on va négliger la propagation de l'onde dans le mur qui va se déplacer en bloc. Cela dit, le mur ne se déplace pas comme un piston car ses bords restent accrochés au plafond, au sol et aux murs contigus. Si le centre du mur se déplace et ses bords restent fixes, le mur se cintre et l'élasticité va tendre à le redresser. Cette tendance sera qualitativement modélisée par un rappel élastique de raideur k et le mouvement de la partie centrale du mur le sera par une masse mobile M, de surface S en translation. On ne tiendra donc pas compte de l'épaisseur du mur, positionné en x=0.

La vitesse du son est $c = 340m.s^{-1}$ et impédance acoustique de l'air Z = 400S.I.

- 1) Calculer le coefficient de transmission en amplitude $t(\omega)$ du mur et tracer l'allure du graphique $t(\omega)$.
- 2) Quelle doit être l'épaisseur d'une cloison de masse volumique $\mu=1200kg.m^{-3}$ pour un affaiblissement de 40dB à 200Hz?

Correction

1)

Onde incidente:

$$\begin{cases} p_i = p_{i_m} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)} \\ v_i = \frac{p_{i_m}}{Z} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)} \end{cases}$$

Onde réfléchie : ne pas oublier le changement de signe pour v_r , classique mais piégeant!

$$\left\{ \begin{array}{l} p_r = p_{r_m}.e^{j.\omega.\left(t + \frac{x}{c}\right)} \\ v_r = -\frac{p_{r_m}}{Z}.e^{j.\omega.\left(t + \frac{x}{c}\right)} \end{array} \right.$$

Onde transmise:

$$\begin{cases} p_t = p_{t_m} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)} \\ v_t = \frac{p_{t_m}}{Z} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)} \end{cases}$$

Les vitesses de l'air au contact du mur de part et d'autre de celui-ci s'identifient, bien sûr, à sa vitesse, $j.\omega.X_m.e^{j.\omega.t}$, on a donc :

$$v_i(x=0^-,t) + v_r(x=0^-,t) = v_t(x=0^+,t) = j.\omega.X_m.e^{j.\omega.t}$$

soit:

$$p_{i_m} - p_{r_m} = p_{t_m} = j.Z.\omega.X_m$$

Quant à la pression, si elle était continue, le bilan des forces de pression sur le mur serait nul et celui-ci ne se déplacerait pas. Il faut donc remplacer cette hypothèse de continuité par un bilan de force sur le mur, sans oublier le rappel élastique :

 $M.\tilde{\ddot{X}} = -k.X + (p_{i_m} + p_{r_m} - p_{t_m}).S.e^{j.\omega.t}$

soit:

$$p_{i_m} + p_{r_m} - p_{t_m} = \frac{k - M \cdot \omega^2}{S} X_m$$

1.a) Le coefficient de transmission est $t = \frac{p_{t_m}}{p_{i_m}}$. La première équation donne dans la seconde :

$$p_{i_m} - p_{t_m} = \frac{k - M.\omega^2}{2.S} X_m$$

soit:

$$\frac{1}{t}-1 = \frac{k-M.\omega^2}{2.j.Z.\omega.S}$$

D'où on tire :

$$t = \frac{1}{1 + \frac{\frac{k}{\omega} - M \cdot \omega}{2 \cdot j \cdot S \cdot Z}}$$

Interprétation : le coefficient de transmission t dépend de la pulsation ω ; on peut donc le lire comme une fonction de transfert. On vérifie aisément que $t(0) = t(\infty) = 0$, donc qu'il s'agit d'un filtre passe-bande.

Tout aussi aisément, le module de t est maximum pour $M.\omega - \frac{k}{\omega} = 0$, donc la pulsation de résonance est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

expression qui, du reste, nous est familière.

Si l'élasticité est négligeable aux fréquences audibles, c'est que, dans cette région du spectre acoustique, $\frac{k}{\omega}$ est négligeable devant $M.\omega$, donc ω grand devant ω_0 ; ce qui revient à dire que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} < 20Hz$$

se trouve dans la région des infrasons. Dans le domaine audible, on peut donc écrire

$$t(\omega) \approx \frac{\omega_1}{\omega} \text{ avec } \omega_1 = \frac{2.Z.S}{M}$$

Au delà de ω_0 , donc pour les fréquences audibles, $|t(\omega)|$ est une fonction décroissante (on est dans la portion passe-bas), donc les graves sont peu affaiblis, les médiums moyennement et les aigus beaucoup.

Interprétation : le coefficient de transmission t dépend de la pulsation ω ; on peut donc le lire comme une fonction de transfert. On vérifie aisément que $t(0) = t(\infty) = 0$, donc qu'il s'agit d'un filtre passe-bande.

Tout aussi aisément, le module de t est maximum pour $M.\omega - \frac{k}{\omega} = 0$, donc la pulsation de résonance est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Si l'élasticité est négligeable aux fréquences audibles, c'est que, dans cette région du spectre acoustique, $\frac{k}{\omega}$ est négligeable devant $M.\omega$, donc ω grand devant ω_0 ; ce qui revient à dire que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} < 20Hz$$

se trouve dans la région des infrasons. Dans le domaine audible, on peut donc écrire

$$t(\omega) \approx \frac{\omega_1}{\omega} \text{ avec } \omega_1 = \frac{2.Z.S}{M}$$

Au delà de ω_0 , donc pour les fréquences audibles, $|t(\omega)|$ est une fonction décroissante (on est dans la

portion passe-bas), donc les graves sont peu affaiblis, les médiums moyennement et les aigus beaucoup. On veut $t_{dB}=20.log|t|=-40 \Leftrightarrow |t|=1/100 \Leftrightarrow \omega=100\frac{2.Z.S}{M}$. Or $\frac{M}{S}=\mu.e$. On veut donc ici une

 $e = 100 \frac{2.Z}{\mu.\omega} = 53cm$

Devoir non surveillé

vendredi 8 décembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Le son mis à nu

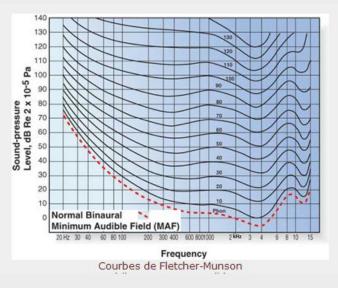
extrait du site soundour. com

Le musicien définit un son essentiellement par ces trois variables : intensité, hauteur et timbre. Nous allons passer en revue les différentes catégories d'instruments de musique.

L'intensité

L'amplitude est la valeur maximale de la surpression ou de la vitesse de l'air. L'intensité est évaluée généralement en décibels, dixième de l'unité bel (symbole B, unité nommée en l'honneur de son inventeur, Alexander-Graham Bell) qui désigne un rapport de puissances acoustiques en watts par mètres carrés (W/m^2) . L'énergie de l'onde sonore est proportionnelle au carré de l'amplitude. Doubler la puissance acoustique revient à ajouter 3dB.

Le décibel est largement utilisé comme mesure de l'intensité du son, mais est en fait seulement un moyen pratique de spécifier le rapport entre deux grandeurs. Le dB est couramment utilisé pour exprimer une grande variété de mesures en acoustique et électronique. Cette unité est particulièrement utile dans l'audio parce que nos oreilles suivent une loi approximativement logarithmique, appelée par les psychologues "la loi de Weber". Le



plus petit changement dans l'intensité sonore que nous pouvons détecter est d'environ 1 dB, ou un changement de dix pour cent, indépendamment du fait que le son est très faible ou très fort. En d'autres termes, nous entendons le volume "géométriquement" plutôt "qu'arithmétiquement".

Le décibel est une unité sans dimension, comme les pourcentages. L'énergie de l'onde sonore est égale au carré de l'amplitude. Une augmentation de 3 dB correspond à une multiplication par deux de la pression acoustique, donc de l'énergie sonore, ce qui correspond à doubler le nombre d'amplificateurs.

La hauteur

La hauteur ou fréquence, mesurée en hertz (nombre de vibrations par seconde) détermine la position du son dans l'étendue du spectre audible, de grave (environ 16 Hz, en-dessous ce sont les infra-sons) à aigu (au-dessus de 20kHz c'est le domaine des ultra-sons).

Le spectre sonore est " redistribué" en bandes de fréquences afin de faciliter notamment l'utilisation des correcteurs de tonalité professionnels plus complets que ceux trouvés d'habitude à la reproduction chez l'utilisateur : la finalité en est clairement différente. Ainsi, est-il imaginable de travailler au minimum sur des bandes ainsi dénommées sur une grande majorité d'équipements :

- GRAVES, dont la fréquence s'établit jusque 60Hz
- BAS-MEDIUM, de 60Hz à 250Hz
- MEDIUM, de 250Hz à 2000Hz
- HAUT MEDIUM, de 2000Hz à 6000Hz
- AIGUS, au-delà de 6000Hz.

Le timbre

Le timbre, la "couleur" permet de reconnaître le son du violon et de le distinguer de celui du piano. Le timbre est un des paramètres les plus complexes car particulièrement riche en quantité d'informations. Il n'a pas d'unité de mesure caractéristique.

Un son pur, par exemple celui émis par un générateur de signal sinusoïdal pour faire des mesures en laboratoire sur un amplificateur audio, ou donner la note d'accord, le "la", ne contient que la fondamentale, à opposer à un son complexe.

Un son complexe est composé de la fréquence fondamentale suivie d'un cortège plus ou moins riche en harmoniques.

Les harmoniques sont des sons musicaux strictement périodiques, multiples entiers de la fondamentale, en proportion variable. Un son peut ne contenir que certains harmoniques, les autres étant manquants; l'intensité de certains harmoniques peut être plus forte que celle de la fondamentale ou des harmoniques de rang faible (les plus proches de la fréquence de base).

On distingue alors, par rang, (nombre de fois par laquelle la fréquence de base f_0 est multipliée) les harmoniques pairs (2f, 4f, ..., agréables à notre oreille), des harmoniques impairs (3f, 5f, ...)

On démontre, par le théorème de Fourier, qu'un signal non sinusoïdal de forme quelconque peut être décomposé en un nombre plus ou moins grand de signaux sinusoïdaux d'intensité déterminée et qu'à l'inverse, un mélange de signaux sinusoïdaux émis simultanément produit un signal complexe de forme très irrégulière.

Par ailleurs, il est nécessaire de mentionner l'existence des formants, mis en évidence par Helmholtz au XIXième siècle (1821-1894), physiologiste et physicien allemand). Un résonateur accordé vient renforcer une fréquence particulière (ex: un résonateur accordé à 500 Hz renforcera l'harmonique 5 d'un son de 100 Hz). Cet harmonique renforcé prend alors le nom de formant. Nous en trouvons une parfaite application avec la cavité bucale de l'homme dont la taille est sans cesse modulable (modifiant ainsi sa fréquence de résonance) et qui produit différents types de formants à partir du son émis par les cordes vocales. Ce sont ces mêmes formants qui produisent, par paire en première approximation, la sonorité des différentes voyelles de la langue française : le "u" par exemple, fait appel à un premier formant d'environ 320 Hz relayé par un second à 800 Hz.

A ces trois grandes caractéristiques s'ajoutent encore :

- les partiels, dont la fréquence n'est pas liée à la fréquence de base (anharmoniques), mais qui viennent compléter le son : ce peut être le bruit du marteau sur la corde d'un piano, celui de l'archet sur les cordes du violon, le souffle du trompettiste, celui des clés de la clarinette...
- les transitoires qui correspondent à la période d'établissement ou l'extinction d'un son, non décomposables en série de Fourier. Les consonnes p, d, t, l, un coup de cymbale sont des exemples de transitoires.

Instruments de musique

Tous les instruments de musique acoustiques possèdent un système mécanique vibrant appelé excitateur. Ce peut être :

- une corde (guitare, violon, banjo, harpe...);
- une anche (libre ou battante) ou un biseau (orgue acoustique à tuyaux, flûte à bec, clarinette, hautbois...);
- une membrane tendue (peau, boyau, tissu, matière plastique) ou un matériau dur (bois, métal, argile, verre...) dans les instruments à percussion (djembé, tambour, xylophone, triangle, timbale, woodblock, crécelle...).

La vibration étant généralement trop faible pour être audible, il est nécessaire de l'amplifier : c'est le rôle de la caisse de résonance ou résonateur. Dans chaque cas, le système vibrant est associé à un système assurant le couplage avec l'air : caisse de résonance (instruments à cordes et à percussion, tuyaux pour les instruments à vent).

L'air contenu dans le résonateur, mis en résonance, produit l'onde sonore.

Instruments de musique à vent

Les instruments à vent sont des instruments de musique qui produisent un son grâce à la mise en vibration de l'air dans un corps sonore (résonateur). On dit que la colonne d'air de l'instrument est excitée.

On peut classer les instruments à vent selon le système excitateur :

- Instruments à anche lippale (trompette, cor, trombone...) : le son est produit par la tension élastique des lèvres de l'exécutant, qui met en vibration la colonne d'air de l'instrument.
- Instruments à biseau (flûte à bec, tuyau d'orgue à embouchure de flûte...) : un jet d'air est envoyé sur une arête (le biseau), qui le divise en créant des tourbillons. Une partie du jet d'air est envoyé à l'extérieur, l'autre entre dans l'instrument et se trouve renforcée par la colonne d'air vibrante du tuyau, ce dernier servant de résonateur.
- Instruments à anche battante simple (clarinette, saxophone...) : le son est produit par une anche qui ferme périodiquement l'arrivée de l'air dans l'embouchure en forme de bec, mettant ainsi en vibration la colonne d'air de l'instrument.

• Instruments à anche battante double (hautbois, cornemuse...) : l'anche double se compose de deux fines lamelles de roseau fixées sur un petit tube de métal et dont les extrémités s'entrechoquent, entraînant une vibration de l'air dans le corps de l'instrument.

• Instruments à anche libre (harmonica, accordéon...) : les sons sont produits grâce à des anches métalliques qui vibrent librement dans une colonne d'air.

Pour obtenir des sons intenses, les systèmes excitateurs doivent être couplés à une colonne d'air contenue dans le résonateur de l'instrument à vent.

Dans le cas des instruments à vent à embouchure de flûte, l'ouverture au niveau du biseau est assez importante. Cette extrémité du tube de l'instrument se comporte comme une extrémité ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/ouverte.

Dans le cas des instruments à vent à anche, l'extrémité au niveau de l'anche est fermée alors que l'autre extrémité est en général ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/fermée.

Lorsqu'une colonne d'air d'un tuyau sonore entre en vibration, elle est le siège d'un phénomène d'ondes stationnaires produites par l'interférence de deux ondes progressives identiques qui se déplacent en sens contraire.

Les percussions

Un instrument à percussion est un instrument de musique dont l'émission sonore résulte de la frappe ou du grattage d'une membrane ou d'un matériau résonant. Il s'agit probablement des tout premiers instruments de musique.

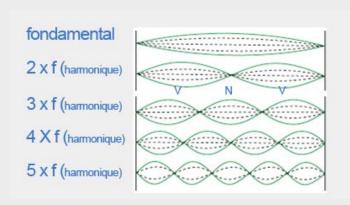
Au XIXe siècle, on commença une classification systématique des instruments de musique. Le mode de classification le plus utilisé est celui de Sachs-Horbostel (1914). Parmi les instruments à percussion, on distingue :

- les idiophones : instruments qui produisent des sons par leurs propres vibrations (sans le concours d'une colonne d'air, d'une membrane ou d'une corde). Ils sont faits de matériaux durs (bois, argile, pierre, métal ou verre) pour assurer leur propre rayonnement acoustique.
- les membranophones : ce sont des instruments qui produisent un son à l'aide d'une membrane tendue en parchemin, en peau ou en matière synthétique, que l'on fait vibrer par percussion (tambours à percussion), par friction (tambours à friction) ou par soufflement (mirlitons). Ce sont les tambours à percussion qui forment le groupe le plus important.

Les cordes

Lorsqu'un guitariste ou un harpiste pince une corde, celle-ci entre en vibration. Elle est le siège d'oscillations dites libres. Les vibrations sont transmises à la caisse de résonance puis à l'air environnant. Le son émis par une corde a la même fréquence que les vibrations de cette corde. Une vibration libre d'une corde est une combinaison de différents modes propres. Chaque mode propre correspond à un harmonique.

Si on impose une vibration sinusoïdale de fréquence f à une corde tendue, celle-ci ne vibre que pour certaines valeurs bien déterminées de la fréquence correspondant aux modes propres de vibra-



tion de la corde tendue. On observe que la vibration s'effectue à l'intérieur de fuseaux dont le nombre augmente avec la fréquence. Dans chaque mode de vibration de la corde, les points immobiles sont appelés nœuds (N) et les points de déformation maximale sont appelés les ventres (V):

Un instrument de musique naturel : la voix humaine

La voix humaine est produite par un phénomène comparable à celui des instruments de musique. L'air expiré passe par le larynx et fait vibrer de petits muscles tendus appelés « cordes vocales ». Ces cordes vocales peuvent varier selon leur longueur, leur épaisseur et leur tension, ce qui explique la gamme des sons produits par une même personne et aussi les divers sons produits par différentes personnes.

La glotte est l'espacement plus ou moins grand entre les deux membranes souples appelées cordes vocales selon qu'on est en phase de simple respiration, d'apnée ou de phonation.

Les cordes vocales ont trois positions fondamentales :

- écartées, la glotte est ouverte et l'air circule librement, c'est la respiration.
- accolées, la glotte est alors fermée et l'air ne passe pas, c'est l'apnée.
- rapprochées, la glotte est variable, c'est la phonation.

Les deux plis vocaux ou cordes vocales battent l'un contre l'autre, comme une anche double : le larynx, organe vibrateur du système phonatoire, crée une discontinuité dans la colonne d'air expiratoire, engendrant ainsi une onde sonore. Il faut un juste équilibre entre la pression de l'air venant des poumons via la trachée et la tension des cordes vocales.

Enoncé

- 1) Caractéristiques du son
 - 1.a) En utilisant la définition de l'amplitude, donner les deux caractéristiques physiques du son.
 - 1.b) Les relier grâce à la relation d'Euler linéarisée.
- 2) Instruments à vent
 - 2.a) D'après le document, quelle est la forme des ondes dans les tuyaux sonores?
- 2.b) En utilisant la relation d'Euler linéarisée, écrire la forme mathématique des deux caractéristiques physiques du son dans les tuyaux sonores.
- 2.c) En déduire qu'un nœud pour une caractéristique physique correspond à une ventre pour l'autre caractéristique.
 - 3) Divers types d'instruments à vent
- **3.a)** Quelles sont les conditions aux limites imposées aux extrémités des tuyaux sonores, pour chacun des types d'instruments de musique à vent ?
- **3.b)** En se servant de la partie sur les instruments à cordes, faire un schéma du fondamental et de la première harmonique pour les deux caractéristiques physiques du son dans les tuyaux sonores, pour chacun des types d'instruments de musique à vent.
 - 3.c) Le timbre de chacun des types d'instruments de musique à vent est-il identique?

Correction

1) Caractéristiques du son

1.a) La définition de l'amplitude ("l'amplitude est la valeur maximale de la surpression ou de la vitesse de l'air.") donne les deux caractéristiques physiques du son : la surpression et la vitesse.

1.b) La relation d'Euler

$$\mu \frac{D \vec{v}}{D t} = \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\triangledown} \right) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \overrightarrow{grad} P$$

qui devient, linéarisée,

$$\mu_0 \stackrel{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{gradp}$$

où p est la surpression et μ_0 la masse volumique moyenne.

2) Instruments à vent

2.a) D'après le document, "lorsqu'une colonne d'air d'un tuyau sonore entre en vibration, elle est le siège d'un phénomène d'ondes stationnaires produites par l'interférence de deux ondes progressives identiques qui se déplacent en sens contraire."

2.b) Si on pose pour la surpression :

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t) \cos(k x + \varphi)$$

alors

$$v_x(x,t) = v_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(k x + \varphi')$$

En utilisant la relation d'Euler linéarisée :

$$\mu_0 \stackrel{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{grad}p$$

on trouve:

$$-\omega \mu_0 v_0 \sin(\omega t + \psi) \cos(k x + \varphi') = -k p_0 \cos(\omega t) \sin(k x + \varphi)$$

On trouve donc:

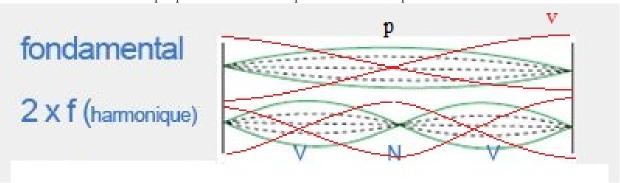
$$v_x(x,t) = -\frac{k p_0}{\omega} \sin(\omega t + \psi) \sin(k x + \varphi)$$

2.c) Si on a un nœud pour une caractéristique physique (annulation de l'onde stationnaire en x_0), cela correspond à un maximum pour l'autre caractéristique car il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre surpression et vitesse (passage d'un sinus à un cosinus).

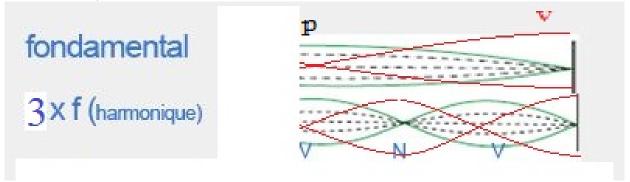
3) Divers types d'instruments à vent

3.a) Le texte dit que :

- dans le cas des instruments à vent à embouchure de flûte, l'ouverture au niveau du biseau est assez importante. Cette extrémité du tube de l'instrument se comporte comme une extrémité ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/ouverte : on a alors un nœud de pression aux deux extrémités.
- Dans le cas des instruments à vent à anche, l'extrémité au niveau de l'anche est fermée alors que l'autre extrémité est en général ouverte. On parle alors de colonne d'air ouverte/fermée : on a alors un nœud de pression à une extrémité, et un nœud de vitesse à l'autre extrémité.
- **3.b)** Dans le cas des instruments à vent à embouchure de flûte (colonne d'air ouverte/ouverte), on retrouve le même schéma que pour la corde en ce qui concerne la surpression :



Dans le cas des instruments à vent à anche (colonne d'air ouverte/fermée) : on a alors un nœud de pression à une extrémité, et un nœud de vitesse à l'autre extrémité :



3.c) Dans le cas des instruments à vent à embouchure de flûte (colonne d'air ouverte/ouverte), si la fréquence du fondamental est f, la fréquence de la première harmonique est 2 f.

Dans le cas des instruments à vent à anche (colonne d'air ouverte/fermée), si la fréquence du fondamental est f, la fréquence de la première harmonique est 3 f.

Le timbre de ces deux types d'instruments de musique à vent est donc très différent.