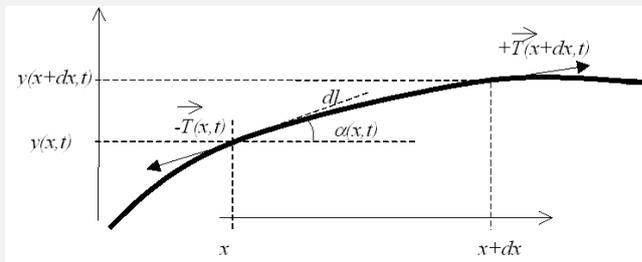


# Ondes mécaniques stationnaires

## I- Etablissement de l'équation de D'Alembert

### 1 Etablissement de l'équation de propagation pour une corde vibrante tendue horizontalement *exercice*



On s'intéresse à une corde inextensible principalement suivant un axe  $Ox$  tendue avec la tension  $T_0$ , de masse linéique  $\mu_l$ . On néglige la pesanteur. On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à l'instant  $t$  la partie de fil d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de fil d'abscisse inférieure à  $x$ . Le petit élément de longueur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est à l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$ . Cet élément fait avec l'axe  $Ox$  un angle  $\alpha(t)$  petit.

Montrer que l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$  suit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ avec } c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$$

Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

dont la projection suivant  $\vec{u}_x$  donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

Aussi, on pourra considérer  $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$ , constante. Donc, la projection suivant  $\vec{u}_y$  de la tension est  $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$ , ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Comme l'angle est  $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$  on en déduit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$ .

### Equation de d'Alembert *définition*

à une dimension,  $\psi(x, t)$  suit l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

La célérité de l'onde  $c_0$  s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

A trois dimensions, on peut généraliser sans peine quand la grandeur  $\psi$  dépend non seulement de  $x$  et de  $t$ , mais aussi de  $y$  et  $z$ , en remarquant que le laplacien est  $\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ . L'équation de d'Alembert à trois dimensions est

$$\Delta \psi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

### ✳ Propriétés de l'équation de D'Alembert *s'y retrouver*

l'équation de d'Alembert est une équation de propagation d'onde. Il s'agit d'une équation différentielle en  $x, y, z$  et  $t$ .

La linéarité de cette équation induit le théorème de superposition. Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont solutions de l'équation de D'Alembert, alors  $a_1.\psi_1 + a_2.\psi_2$  est aussi solution (avec n'importe quelles constantes  $a_1$  et  $a_2$ ).

L'équation de D'Alembert est réversible. En effet  $t \rightarrow -t$  laisse invariante l'équation. En optique, on parle de la loi du retour inverse de la lumière.

## II- Ondes planes stationnaires monochromatiques



### Onde stationnaire plane *définition*

Dans le cas d'une onde stationnaire plane,

$$\psi(x, t) = F(x) \cdot G(t)$$



*s'y retrouver*

les dépendances d'une onde stationnaire vis-à-vis des variables d'espace et de temps sont découplées.



### 2 Forme mathématique des ondes stationnaires planes monochromatiques (OSPM) *théorème*

$\psi(x, t) = F(x).G(t)$  vérifie l'équation de D'Alembert  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , qui devient

$$F''(x).G(t) = \frac{1}{c_0^2} F(x).G''(t) \Leftrightarrow c_0^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de  $x$ , le second que de  $t$  : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas physiquement acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera  $-\omega^2$ . On trouve la solution de  $\frac{G''(t)}{G(t)} = -\omega^2$  :  $G(t) = G_0 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_G)$ . De même, la solution de  $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega^2}{c_0^2}$  est :  $F(x) =$

$$F_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c_0} \cdot x + \varphi_F\right). \Rightarrow$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, on peut réécrire les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sous la forme

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot \cos(k.x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega.t + \varphi_G)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$ .



### Nœuds de vibration *définition*

Les nœuds de vibration sont les endroits où  $\psi(x, t) = 0 \forall t$ .



### Ventres de vibration *définition*

Les ventres de vibration sont les endroits où l'amplitude est maximale.



### 3 Espace entre deux nœuds de vibration successifs ou deux ventres *théorème*

$$\cos(k.x_n + \varphi_F) = \cos(k.x_{n+1} + \varphi_F) = 0 \text{ si}$$

$$\begin{cases} k.x_n + \varphi_F = \frac{\pi}{2} + n.\pi \\ k.x_{n+1} + \varphi_F = \frac{\pi}{2} + (n+1).\pi \end{cases}$$

soit  $k.(x_{n+1} - x_n) = \pi$ , ou bien encore  $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$ .

de même pour les ventres :  $\cos(k.x_k + \varphi_F) = \cos(k.x_{k+1} + \varphi_F) = \pm 1$  si

$$\begin{cases} k.x_k + \varphi_F = k.\pi \\ k.x_{k+1} + \varphi_F = (k+1).\pi \end{cases}$$

soit  $k.(x_{k+1} - x_k) = \pi$ , ou bien encore  $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

Deux nœuds de vibration successifs sont éloignés de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Deux ventres de vibration successifs sont éloignés de  $\frac{\lambda}{2}$ .



### Fuseaux *s'y retrouver*

Les fuseaux sont séparés par deux nœuds de vibration. Ils contiennent chacun un ventre de vibration.

La largeur d'un fuseau est la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs, donc elle vaut  $\frac{\lambda}{2}$ .



### Fuseau avec un nœud et un ventre de vibration *schéma*

La figure 1 représente un fuseau avec un nœud et un ventre de vibration.

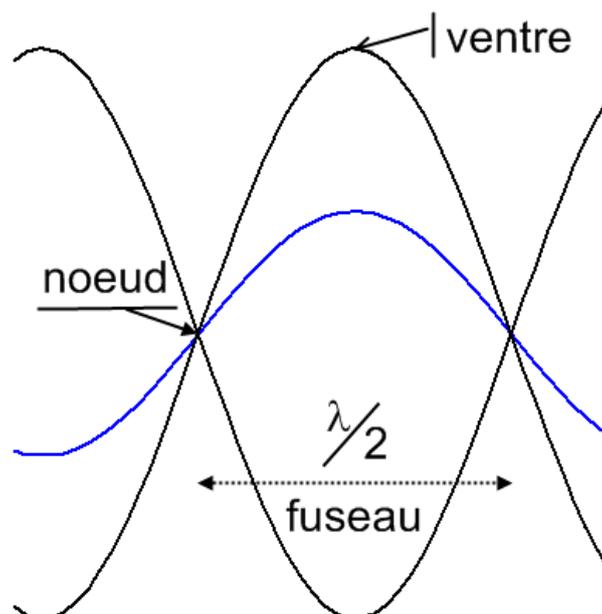


FIGURE 1 – Fuseau avec un nœud et un ventre de vibration

**Comportement temporel d'une onde stationnaire** *animation*

A l'intérieur du fuseau, l'onde stationnaire oscille au cours du temps. Elle reste toujours nulle aux nœuds de vibration.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**III- Modes propres****4 Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités** *théorème*

Les conditions aux limites pour une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités imposent un nœud aux deux extrémités donc un nombre entier de fuseaux donc

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f = \frac{n c_0}{2L}$$

⇒

Les conditions aux limites pour une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités imposent des solutions de types OPSM telles que

$$L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f = \frac{n c_0}{2L}$$

où  $n$  est un entier non nul. Ces solutions sont appelées modes propres de la corde.

**Résonances sur la corde de Melde** *vidéo*

Le dispositif de la corde de Melde consiste à faire vibrer une extrémité de la corde, tandis que l'autre est fixée. On s'aperçoit expérimentalement que les vibrations sont importantes uniquement si la fréquence d'excitation est une fréquence propre de la corde. Il y a alors résonance.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 1) Modélisation d'un instrument à corde *exercice*

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur  $L$ . Le rayon du cylindre est  $a$  avec  $a \ll L$ .

1) La corde de masse linéique  $\mu$  est tendue avec la tension  $T_0$ . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal ( $Ox$ ).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note  $y(x, t)$  le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . L'axe  $Oy$  est l'axe vertical ascendant.

1.a) Déterminer l'équation aux dérivées partielles que vérifie l'ébranlement  $y(x, t)$ .

1.b) Calculer la célérité  $c$  pour une corde de piano de masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , de tension  $T_0 = 850 \text{ N}$ , de diamètre  $\phi = 1,2 \text{ mm}$ .

2) La corde est fixée à ses deux extrémités,  $x = 0$  et  $x = L$ . On cherche une solutions de l'équation différentielle précédente sous la forme d'une onde harmonique caractérisée par la pulsation  $\omega$  et la norme du vecteur d'onde  $k$ .

2.a) Quelle doit être la forme de cette onde harmonique?

2.b) Montrer que seulement certaines fréquences sont possibles, qu'on appellera fréquences propres de la corde.

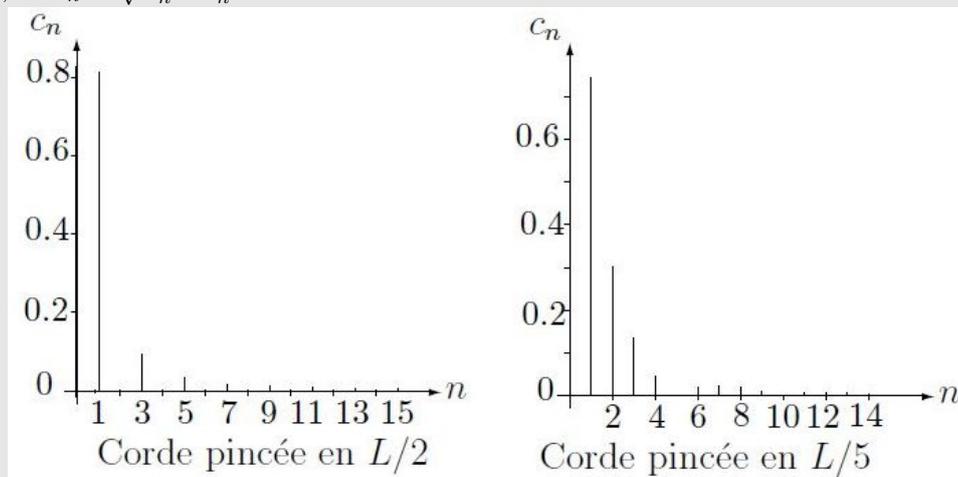
2.c) Pour un mode propre donné, définir les ventres et les nœuds de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs? entre deux nœuds consécutifs? entre un ventre et un nœud consécutifs?

3) Solution générale

On écrit la solution correspondant aux conditions aux limites  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  comme une superposition des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

On donne les spectres calculés pour une corde pincée à la moitié de sa longueur puis au cinquième de celle-ci, où  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  :



3.a) Comment peut-on expliquer l'absence de certains harmoniques dans ces spectres?

On peut montrer que les coefficients  $a_n$  associés à la corde pincée décroissent globalement comme  $1/n^2$ . En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en  $1/n$  (au moins à partir d'une certaine valeur de  $n$ ).

3.b) Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées). Quel caractère du son est alors ressenti à l'oreille?

#### Correction :

1) Mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre

1.a) Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de longueur  $dl \approx dx$ , de masse  $dm = \mu dl$ , est soumis à :

- la tension de la portion de fil située à droite :  $\vec{T}(x + dx, t)$  ;
- la tension de la portion de fil située à gauche :  $-\vec{T}(x, t)$ .

Le mouvement de la corde ayant lieu selon  $Oy$ , le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de

corde s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

La projection sur  $Ox$  donne

$$0 = T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) \approx T(x+dx, t) - T(x, t) \Rightarrow T(x, t) = T_0$$

car les angles sont petits. La projection sur  $Oy$  donne

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \sin \alpha(x+dx, t) - T_0 \sin \alpha(x, t) \approx T_0 [\alpha(x+dx, t) - \alpha(x, t)] = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

On trouve donc

$$(1) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ .

**1.b)** Pour la corde de piano :  $c = \sqrt{\frac{850}{7800 \times \frac{\pi(1,2 \times 10^{-3})^2}{4}}} \Rightarrow c = 3,1 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2)** Modes propres, fréquences propres

**2.a)** A cause des conditions aux limites, il faut prendre des ondes stationnaires :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t)$$

et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x, t)$$

(1)  $\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$ , soit  $\omega = ck$ .

**2.b)** Les conditions aux limites imposent :

$$\forall t, y(0, t) = 0 \Rightarrow y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$$

et

$$\forall t, y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

où  $n$  est entier. Or, comme on a vu que  $\omega = ck$ , alors  $f_n = \frac{n\omega}{2L}$  où  $n$  est entier sont les fréquences propres.

L'élongation correspondante,  $y(x, t) = y_0 \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  est le mode propre associé.

**2.c)**

Un nœud de vibration est un point qui reste immobile :

$$\forall t, y(x, t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi x}{L} = p\pi \Leftrightarrow x = \frac{p}{n}L = \frac{p\lambda}{2}$$

où  $p$  est entier.

Un ventre de vibration est un point où l'amplitude de vibration est maximale :

$$\forall t \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi x}{L} = q\pi + \frac{\pi}{2} = (2q+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2q+1)\frac{L}{2n} = (2q+1)\frac{\lambda}{4}$$

où  $q$  est entier.

Deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs sont donc distants de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Un nœud et un ventre consécutifs sont distants de  $\frac{\lambda}{4}$ .

**3)** Solution générale

**3.a)** Les harmoniques éteints sont ceux qui s'annulent là où  $\alpha(x)$  est maximal :

- harmoniques pairs pour le premier spectre ( $L/2$ ),

- harmoniques multiples de 5 pour le second spectre ( $L/5$ ). NB : pour la corde pincée en son milieu, il n'y a que des harmoniques impairs parce qu'une translation d'une demi-période (c'est-à-dire de  $L$ ) transforme la fonction en son opposé.

**3.b)** Le son d'un clavecin est moins riche en harmoniques que le son d'un piano puisque les amplitudes des harmoniques élevés sont plus faibles que pour le piano, ce qui se traduit par une différence de timbre.

**Éléments de correction :**

# Les techniques mathématiques à connaître

## Synthèse de Fourier

### Fonction périodique

Toutes les fonctions périodiques peuvent être écrites comme une somme de fonctions trigonométriques.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$$

est une fonction périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (cf. exemple ci-contre).

### Autre présentation

puisque

$$\cos(n\omega t + \phi_n) = \cos(n\omega t) \cos(\phi_n) - \sin(n\omega t) \sin(\phi_n)$$

on peut réécrire

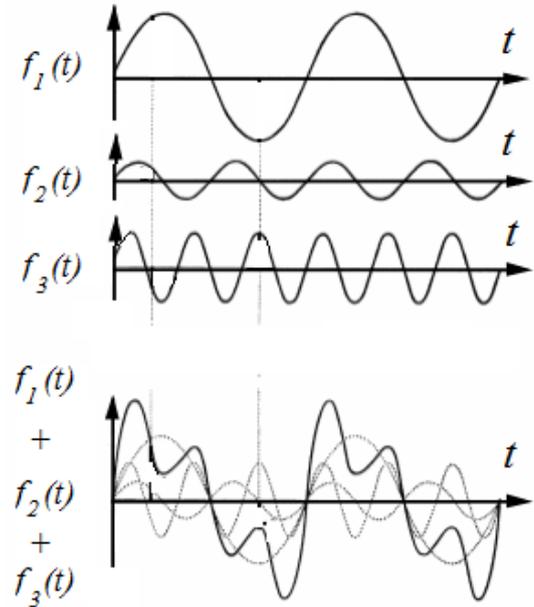
$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t)] + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sin(n\omega t)]$$

avec

- $\frac{A_0}{2} = C_0$ ,
- $A_n = C_n \cos(\phi_n) \quad \forall n > 0$ ,
- $B_n = -C_n \sin(\phi_n) \quad \forall n > 0$ .

### Définitions physiques

- le continu, la moyenne, l'offset :  $f_{continu} = C_0$  ;
- l'ondulation :  $f_{ond}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$  ;
- le fondamental :  $f_1(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi_1)$  ;
- l'harmonique de rang  $n$  :  $f_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \phi_n)$  ;
- la valeur efficace :  $f_{eff} = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}$  (formule de Parseval).



### Suite $C_n$

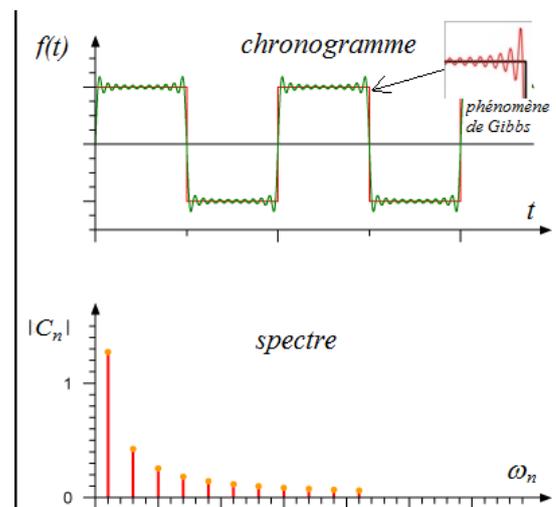
La représentation de  $|C_n|$  en fonction de  $n$ ,  $\omega_n$  ou de la fréquence  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$  est le spectre de  $f$ .

La série converge  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ .

Si  $f$  est continue (mathématiquement),  $C_n \approx \frac{1}{n^2}$  si  $n \rightarrow +\infty$  ;

Si  $f$  est discontinue (mathématiquement),  $C_n \approx \frac{1}{n}$  si  $n \rightarrow +\infty$ .

Il apparaît parfois une déformation du signal, connue sous le nom de phénomène de Gibbs. Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité : pour représenter convenablement une fonction discontinue, il faudrait une infinité d'harmoniques.



# Technique à maîtriser

jeudi 23 novembre 2017

## I- Les capacités exigibles

### 1. Etablir une équation d'onde



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Établir l'équation d'onde pour des ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses en utilisant un système infinitésimal.  
Reconnaître une équation de d'Alembert.

### 2. Chercher des solutions à l'équation d'onde



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Décrire les modes propres.  
En négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé.

### 3. Utiliser la décomposition de Fourier



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.

## II- Méthodes

### 1. Etablir une équation d'onde



**A) Equation de propagation dans un milieu continu** *méthode*

On part de l'étude d'un petit élément de longueur  $dx$ , et on prend garde à faire la différence entre les actions qui s'exercent à gauche ( $-\vec{F}(x)$ ) et à droite ( $+\vec{F}(x+dx)$ ).

### 2. Chercher des solutions à l'équation d'onde



**B) Déterminer la forme des ondes stationnaires** *méthode*

Il s'agit d'utiliser la méthode de séparation des variables qui consiste à poser  $\psi(x, t) = f(x)g(t)$  et à remplacer dans l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) \Rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de  $t$  et le membre de droite que de  $x$  on en déduit qu'ils

sont constants, c'est-à-dire qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que :

$$g''(t) - K g(t) = 0 \text{ et } f''(x) - \frac{K}{c^2} f(x) = 0$$

On a ainsi obtenu deux équations à variables séparées. On trouve pour  $f$  et  $g$  des solutions sinusoïdales car les solutions exponentielles divergent.

**C) Utiliser la forme des ondes stationnaires pour déterminer leurs caractéristiques** *méthode*

On injecte des ondes stationnaires  $\psi(x, t) = A \cos(kx + \varphi_f) \cos(\omega t + \varphi_g)$  dans l'équation de D'Alembert et on trouve une relation entre  $k$  et  $\omega$ .

**3. Utiliser la décomposition de Fourier**

**D) Trouver les modes propres** *méthode*

On utilise les conditions aux limites (par exemple nœuds en  $x = 0$  et  $x = \ell$ ) pour déterminer les  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  possibles.

**E) Superposer des modes propres** *méthode*

On somme diverses ondes planes stationnaires monochromatiques de pulsation  $\omega_n$  (qui sont des modes propres) : il peut y en avoir une infinité (série de Fourier).

**III- Exercices**

**1. Etablir une équation d'onde**

**1.1) Corde tendue horizontalement**

On s'intéresse à une corde inextensible principalement suivant un axe  $Ox$  tendue avec la tension  $T_0$ , de masse linéique  $\mu_l$ . Montrer que l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$  suit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à l'instant  $t$  la partie de fil d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de fil d'abscisse inférieure à  $x$ . On négligera l'effet de la pesanteur. Le petit élément de longueur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est à l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$ . Cet élément fait avec l'axe  $Ox$  un angle  $\alpha(t)$  petit.

Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

dont la projection suivant  $\vec{u}_x$  donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

Aussi, on pourra considérer  $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$ , constante. Donc, la projection suivant  $\vec{u}_y$  de la tension est  $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$ , ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Comme l'angle est  $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$  on en déduit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$ .

### 1.2) Corde de violoncelle

Un violoncelle baroque joue le  $la_3$  dont la fréquence est  $\nu = 415 \text{ Hz}$ .

1) Quelle est la tension  $T$  de la corde de longueur  $l = 50,0 \text{ cm}$ , de masse volumique  $\mu = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$  et de rayon  $r = 250 \mu\text{m}$ ?

1) La longueur de la corde est liée à la longueur d'onde par  $l = \frac{\lambda}{2}$  (la corde est fixée aux deux bouts). La masse linéique de la corde est  $\mu_l = \mu \cdot \pi \cdot r^2$ . La célérité est  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_l}} = \nu \cdot \lambda = 2 \cdot \nu \cdot l$  qui conduit à la tension

$$T = \mu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \nu^2 \cdot l^2 = 67 \text{ N}$$

### 1.3) Corde verticale

On s'intéresse à une corde inextensible, de masse linéique  $\mu_l$ , accrochée en un point  $O$ , l'axe  $Ox$  étant vertical, vers le bas. Déterminer l'équation d'onde que suit  $y(x, t)$ , la coordonnée orthogonale à  $Ox$ .

On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à l'instant  $t$  la partie de fil d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de fil d'abscisse inférieure à  $x$ . On négligera pas l'effet de la pesanteur. Le petit élément de longueur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est à l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$ . Cet élément fait avec l'axe  $Ox$  un angle  $\alpha(t)$  petit.

Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) + \mu_l \cdot dx \cdot \vec{g}$$

dont la projection suivant  $\vec{u}_x$  donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) + \mu_l \cdot g \cdot dx = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx + \mu_l \cdot g \cdot dx$$

Aussi, on pourra considérer  $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0 - \mu_l \cdot g \cdot x$ , constante. Donc, la projection suivant  $\vec{u}_y$  du théorème du centre de masse donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T \cdot \alpha)_{(x+dx, t)} - (T \cdot \alpha)_{(x, t)} = \frac{\partial (T \cdot \alpha)}{\partial x} dx$$

Comme l'angle est  $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$  on en déduit l'équation

$$\mu_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T_0 - \mu_l \cdot g \cdot x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = (T_0 - \mu_l \cdot g \cdot x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu_l \cdot g \frac{\partial y}{\partial x}$$

soit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left( \frac{T_0}{\mu_l} - g \cdot x \right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \frac{\partial y}{\partial x}$$

### 1.4) Corde avec frottement

On considère une corde inextensive tendue principalement suivant un axe  $Ox$ , de masse linéique  $\mu_l$  soumise à une tension  $T_0$  avec une force de frottement fluide par unité de longueur  $\vec{f}_f = -\lambda \cdot \vec{v}$ .

On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à l'instant  $t$  la partie de fil d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de fil d'abscisse inférieure à  $x$ .

Déterminer l'équation de propagation des ondes sur une telle corde.

Le petit élément de longueur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est à l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$ . Cet élément fait avec l'axe  $Ox$  un angle

$$\alpha(t) \approx \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

car cet angle est petit. Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) - \lambda \cdot dx \cdot \vec{v}$$

dont la projection suivant  $\vec{u}_x$  donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

car le déplacement de la corde se fait selon une direction  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$ . Aussi, on pourra considérer  $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$ , constante. Donc, la projection suivant  $\vec{u}_y$  de la tension est  $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$ , ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t}$$

Comme l'angle est  $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ , soit une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$  et le temps caractéristique d'amortissement  $\tau = \frac{\mu_l}{\lambda}$ .

### 1.5) Equation de propagation dans un câble coaxial sans perte

On s'intéresse à un câble coaxial sans perte. On notera l'inductance propre par unité de longueur  $l$  et la capacité propre par unité de longueur  $c$ .

Montrer que tension  $V$  et intensité  $I$  vérifient l'équation de D'Alembert. Que vaut la célérité des ondes dans le câble ?

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} \text{ soit } -\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \frac{\partial V}{\partial t}$$

L'étude électrocinétique du petit élément de longueur  $dx$  qui présente une inductance  $l \cdot dx$  et une capacité  $c \cdot dx$  nous amène à deux équations couplées :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. Ainsi, en dérivant par rapport à  $x$  la première et par rapport à  $t$  la seconde, on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant par rapport à  $x$  la seconde équation et par rapport à  $t$  la première, on trouve :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ainsi, tension  $V$  et intensité  $I$  vérifient ainsi la même équation de propagation, celle de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

avec la célérité  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$ .

## 2. Chercher des solutions à l'équation d'onde

### 2.6) Onde sur la corde de Melde

Soit une corde horizontale tendue de  $x = 0$  à  $x = L$ , telle que l'élongation verticale  $y(x, t)$  suit l'équation de D'Alembert avec la célérité  $c$ . Une des extrémités est fixée

$$y(x = L, t) = 0 \quad \forall t$$

quant à l'autre limite, en  $x = 0$ , un vibreur effectue des oscillations sinusoïdales d'amplitude  $a \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , donc :

$$y(x = 0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \forall t$$

- 1) Donner la forme de la solution de l'équation de propagation pour la corde de Melde.
- 2) Déterminer les conditions de résonance de la corde de Melde.

1) On peut chercher les solutions de l'équation de D'Alembert sous la forme d'onde stationnaires :

$$y(x, t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$ . La condition à la limite  $x = L$  impose d'une part  $k \cdot L + \varphi_F = \frac{\pi}{2}$ , ce qui donne  $\cos(k \cdot x + \varphi_F) = \sin(k \cdot (L - x))$ . D'autre part, la condition à la limite  $x = 0$  impose :

$$y_0 \cdot \cos(\varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

soit  $\varphi_G = 0$  et  $y_0 \cdot \cos(\varphi_F) = y_0 \cdot \sin(k \cdot L) = a$ . En prenant en compte les nouvelles conditions aux limites,

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(k \cdot L)} \sin(k \cdot (L - x)) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$ .

2) On constate que pour

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

l'amplitude tend -théoriquement- vers l'infini :  $\frac{a}{\sin(k_n \cdot L)} \rightarrow \infty$ . On parle de résonance.

Bien entendu, du fait d'inévitables amortissements, l'amplitude de la corde ne tend en fait pas vers l'infini.

### 2.7) Onde sur la corde de Melde - le retour

1) Lors d'une manipulation avec la corde de Melde, pour une longueur  $L$  de la corde et une masse  $M$  accrochée à celle-ci, on obtient une fréquence de résonance à  $19Hz$  pour deux fuseaux et une à  $28Hz$  pour trois fuseaux.

1.a) Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ?

1.b) Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

2) On donne la longueur de la corde :  $L = 117cm$ . Quelle est la vitesse  $c$  de propagation d'une perturbation sur cette corde ?

3) La masse accrochée à la corde est  $M = 25g$ .

3.a) Quelle est la tension  $T_0$  de la corde ?

3.b) En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique  $\mu_l$  de la corde.

1)

1.a) Les fréquences de résonance valent

$$\nu_n = n \frac{c}{2 \cdot L}$$

Or  $\nu_2 = 19Hz$  et  $\nu_3 = 28Hz$ , ce qui donne :

$$\frac{\nu_3}{\nu_2} = 1,47 \text{ au lieu de } \frac{3}{2} = 1,5$$

Ces valeurs numériques sont donc compatibles entre elles.

1.b) Les fréquences suivantes sont données par la formule  $\nu_n = n \frac{c}{2L}$ , soit :

$$\begin{cases} \nu_4 = 38 \text{ Hz} \\ \nu_5 = 47 \text{ Hz} \end{cases}$$

2)

$$c = \frac{2L \cdot \nu_n}{n} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3)

3.a) La tension de la corde est donc

$$T_0 = M \cdot g = 0,25 \text{ N}$$

3.b) La vitesse de propagation étant  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$ , on en déduit la masse linéique de la corde :

$$\mu_l = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} = 0,5 \text{ g/m}$$

Cette valeur aurait pu être trouvée en pesant, par exemple, 10m de fil sur une balance de précision.

## 2.8) Solutions de la corde de Melde

Dans l'expérience de la corde de Melde, le vibreur effectue des oscillations sinusoïdales d'amplitude  $a$  :

$$\psi(0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

La corde, de longueur  $L$ , est fixée à l'autre extrémité, la tension de la corde étant  $T_0$ .

- 1) Déterminer les déplacements  $\psi(x, t)$  de tout point de la corde à tout instant.
- 2) Donner les valeurs des fréquences de résonance.

1) La solution stationnaire sinusoïdale :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_t) \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_x)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  convient si elle satisfait aux conditions aux limites, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \psi(0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \psi(L, t) = 0 \end{cases}$$

Ceci est réalisé si nous prenons

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{\pi}{2} - k \cdot L \\ \varphi_t = 0 \\ \psi_0 = \frac{a}{\sin(k \cdot L)} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\psi(x, t) = \frac{a}{\sin(k \cdot L)} \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(k \cdot (L - x))$$

2) Nous constatons que, pour  $k = k_n = \frac{n \cdot \pi}{L}$  (avec  $n$  entier) l'amplitude devient (théoriquement !) infinie : la corde entre en résonance.

À la résonance,  $a$  est très faible devant l'amplitude des ventres de vibration. De ce fait, le vibreur peut quasiment être considéré comme un nœud de vibration de la corde. Les fréquences de résonance valent

$$\nu_n = n \frac{c}{2L}$$

## 3. Utiliser la décomposition de Fourier

### 3.9) Onde sur une corde fixée à ses deux extrémités

Soit une corde horizontale tendue de  $x = 0$  à  $x = L$ , deux extrémités où elle est fixée, telle que l'élongation verticale  $y(x, t)$  suit l'équation de D'Alembert avec la célérité  $c$ .

Montrer que les solutions possibles peuvent s'écrire

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cdot \cos(2\pi \nu_n \cdot t + \varphi_G)$$

On donnera  $\lambda_n$  et  $\nu_n$ .

On peut chercher les solutions de l'équation de D'Alembert sous la forme d'onde stationnaires :

$$y(x, t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$  à cause de l'équation de D'Alembert.

Les conditions aux limites imposent :  $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$ , soit  $\cos(k \cdot x + \varphi_F) = \sin(k \cdot x)$  avec  $k \cdot L = n \cdot \pi$  où  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $\lambda = \frac{2 \cdot L}{n}$ .

Aussi, on peut réécrire en prenant en compte les conditions aux limites

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cdot \cos(2\pi \nu_n \cdot t + \varphi_G)$$

avec

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ et } \nu_n = \frac{n \cdot c_0}{2L} \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Ce sont les modes propres de la corde fixée aux deux extrémités.

### 3.10) Synthèse de Fourier sur une corde de musique

On écrit la solution générale de l'équation différentielle suivie par une corde vibrante

$$(1) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

correspondant aux conditions aux limites  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  comme une superposition des modes propres :

$$(2) y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

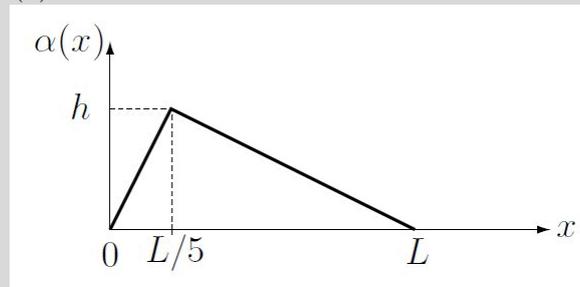
Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

- la forme de la corde :  $y(x, 0) = \alpha(x)$ ,
- sa vitesse :  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$ ,

où  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont des fonctions définies sur  $[0, L]$ .

On appelle  $\tilde{\alpha}(x)$  et  $\tilde{\beta}(x)$  les fonctions définies sur  $\mathfrak{R}$  tout entier, impaires, périodiques de période  $2L$  et qui coïncident avec  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sur l'intervalle  $[0, L]$ .

1) On donne la fonction  $\alpha(x)$  :



Tracer l'allure du graphique de la fonction  $\tilde{\alpha}(x)$ .

2) Montrer que les coefficients du développement en série de Fourier

- de  $\tilde{\alpha}(x)$  sont les coefficients  $a_n$  ;
- de  $\tilde{\beta}(x)$  sont égaux à  $b_n \frac{n \pi c}{L}$ .

**Données :** si  $f(t)$  est une fonction à valeurs réelles ou complexes, périodique de période  $T$ ,

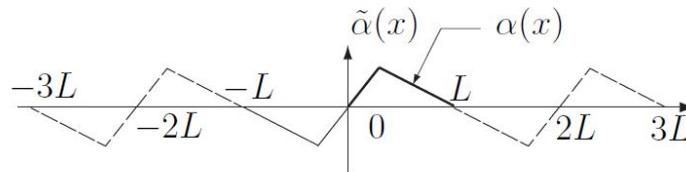
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right]$$

où les coefficients de Fourier de  $f(t)$  sont donnés par les relations (les coefficients ne dépendant pas de l'instant  $t_0$  choisi pour le calcul) :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1)

L'allure du graphique de la fonction  $\tilde{\alpha}(x)$  est le suivant :



2) Les conditions initiales imposent :

$$y(x, 0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

et, comme :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

alors

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \frac{n\pi c}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(cqfd).

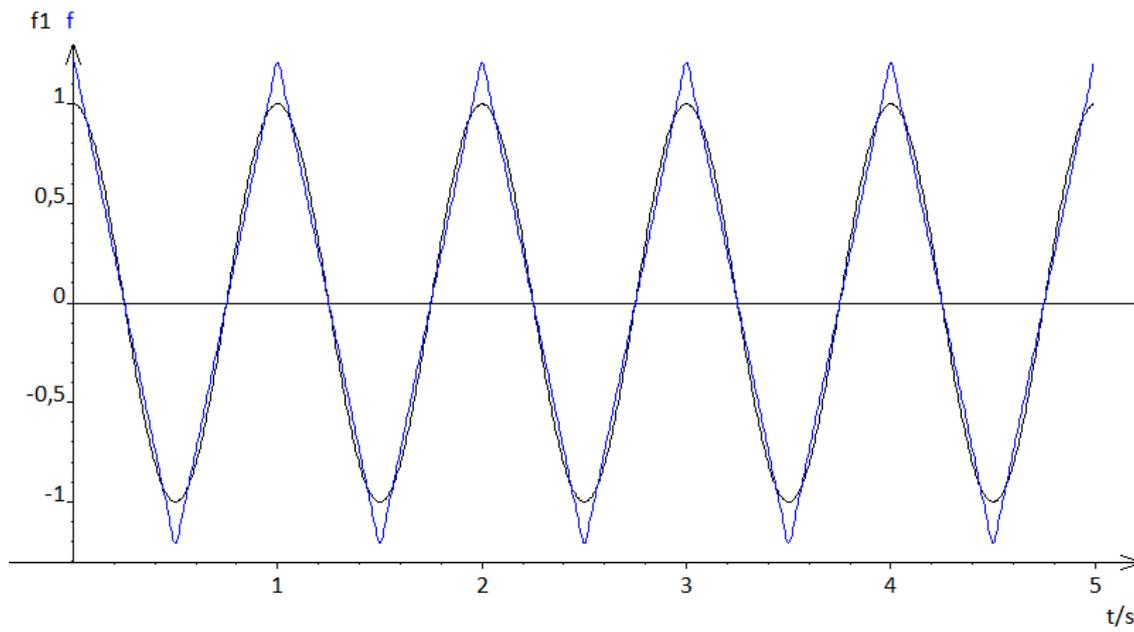
## 4. Techniques mathématiques - Synthèse de Fourier

### 4.11) Synthèse de Fourier d'une fonction triangle

1) Vérifier que la fonction triangle de période  $T$  peut s'écrire :

$$\text{triangle}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi(2k+1) \frac{t}{T}\right)$$

On utilisera un ordinateur pour calculer et tracer la synthèse  $f_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi(2k+1) \frac{t}{T}\right)$  avec les  $N \approx 10$  premiers harmoniques.

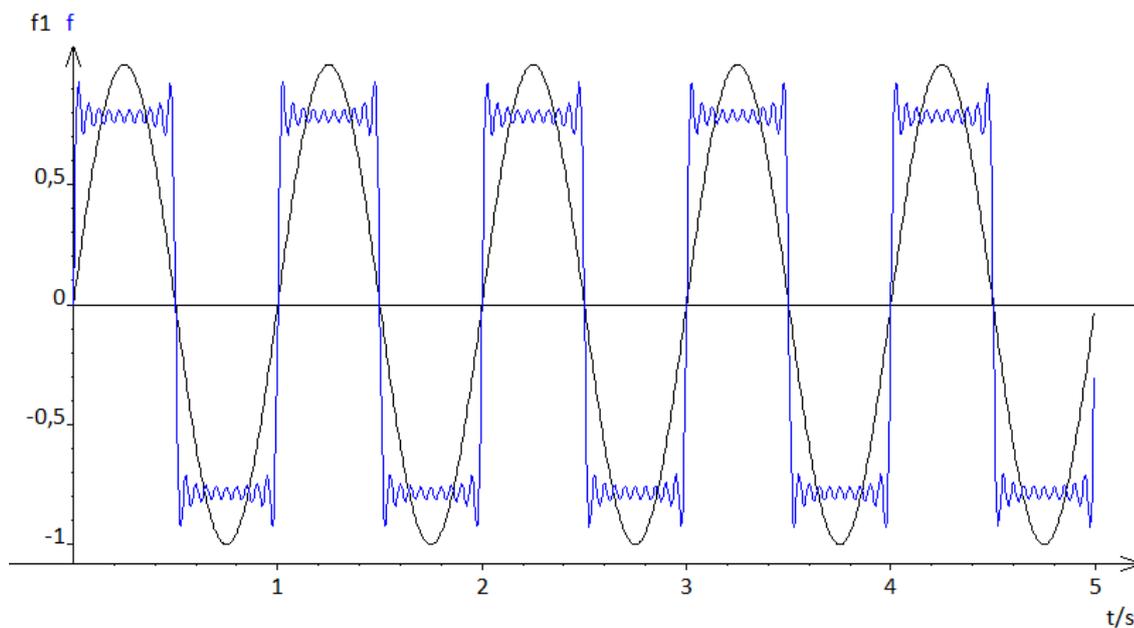


#### 4.12) Synthèse de Fourier d'une fonction carré

1) Vérifier que la fonction carrée de période  $T$  peut s'écrire :

$$carré(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$$

On utilisera un ordinateur pour calculer et tracer la synthèse  $f_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin\left(2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right)$  avec les  $N \approx 10$  premiers harmoniques.



# Travaux dirigés

vendredi 24 novembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## Les frettes de la guitare

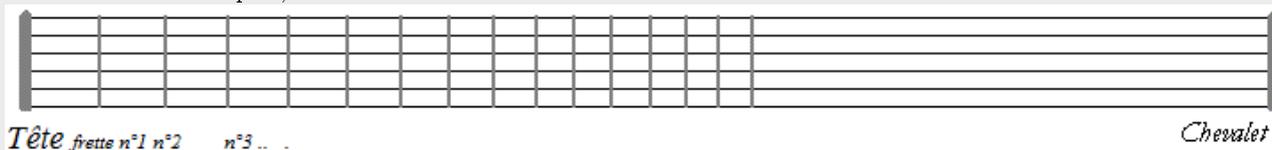
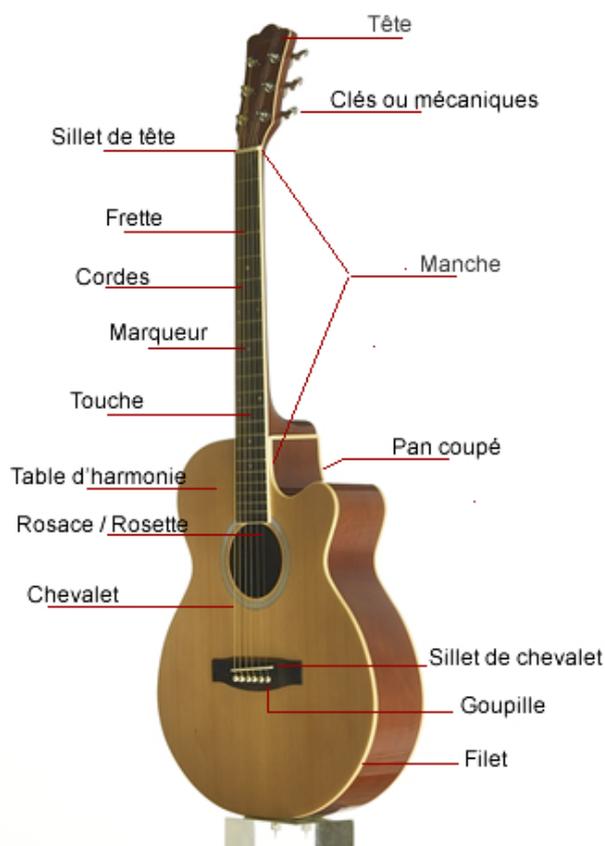
Extrait de la page "frette" de wikipédia :  
disponible à l'adresse [https://fr.wikipedia.org/wiki/Frette\\_\(musique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Frette_(musique))

### Où sont disposées les frettes de la guitare ?

Les frettes sont des éléments de certains instruments de musique à cordes et à manche comme la guitare, la mandoline ou le banjo. Elles font partie intégrante du manche, étant serties dans la touche. Chaque frette correspond à une partie surélevée de la touche; elle permet de choisir la longueur de corde qui va entrer en vibration entre le chevalet et elle, donc de varier les notes jouées. Il s'agit donc d'une pièce fondamentale de nombreux instruments.

Jusqu'à l'époque romantique, on utilisait au lieu des frettes des ligatures faites de cordes en boyau nouées autour du manche. Avec le développement des techniques de tréfilage des métaux, il est devenu possible de monter des cordes d'acier beaucoup plus sonores dont la dureté excluait l'emploi des ligatures en boyau. Ce changement initié à la fin du XVIIIe siècle en Italie a entraîné l'abandon des luths classiques mais permis la floraison des guitares et mandolines. Les frettes étaient fréquemment en laiton autrefois, mais au cours de la seconde moitié du XXe siècle les alliages type maillechort (nickel silver) ou cupro-nickel se sont généralisés.

Les frettes sont placées à des intervalles déterminés tout le long du manche. Ces intervalles sont calculés pour reproduire le schéma d'un tempérament. Pour la plupart des guitares, il s'agit du tempérament égal, qui divise l'octave en douze intervalles chromatiques, les demi-tons.



### Enoncé

1) Déterminer la distance depuis le chevalet jusqu'à la frette n<sup>o</sup>n, sachant qu'une corde de guitare mesure 64,2 cm du chevalet à la tête.

## Correction

1) Dans une gamme, la note fondamentale est séparée de sa première octave par 12 demi-tons. Chaque case de la guitare générant une note à un demi-ton de sa voisine, la douzième frette est donc le milieu de la corde, car une octave est le résultat du doublement de la fréquence de la corde, qui équivaut à diminuer sa longueur de moitié. Ainsi, considérons  $l_n$  la longueur de la corde au niveau de la nième case et donc par extension  $l_0$ , la longueur de la corde à vide.

Le fait que chaque case est située à un demi-ton de sa précédente signifie que monter d'une case correspond à multiplier la fréquence de la corde par une valeur fixe, noté  $r$ , et donc à diviser la longueur de la corde par ce même nombre.  $r$  constitue de ce fait la raison d'une suite géométrique telle que car la douzième case correspond à l'octave, d'où  $r = 2^{\frac{1}{12}}$ .

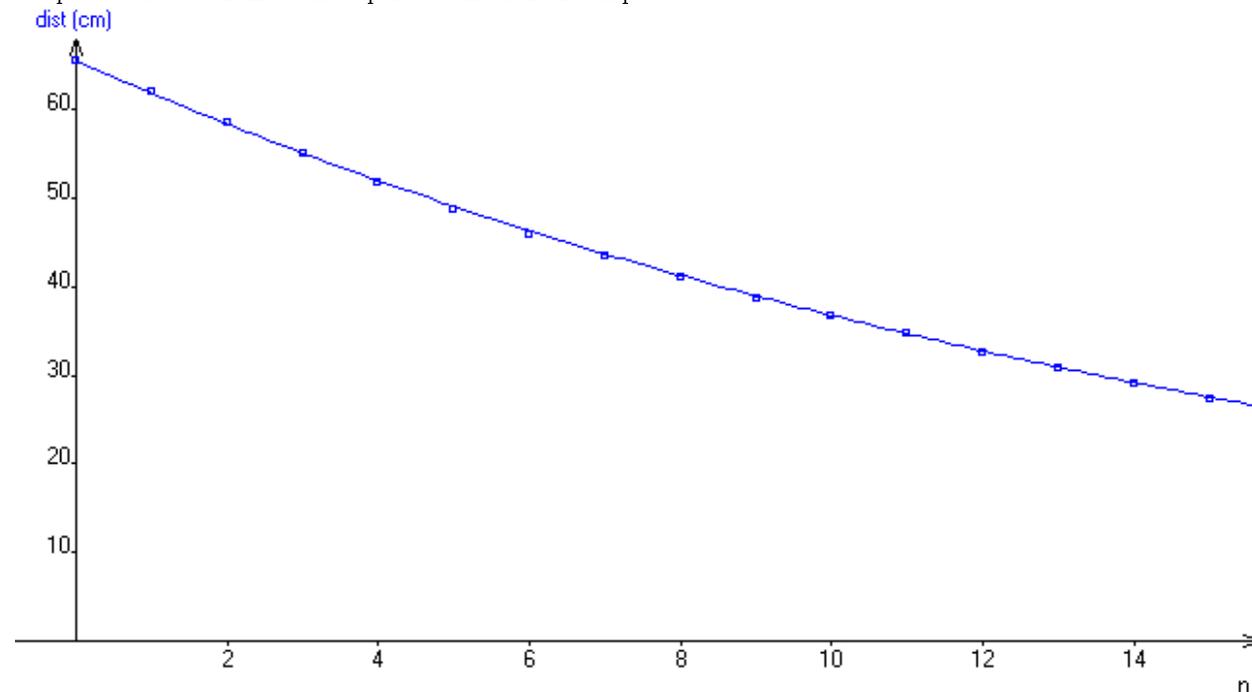
La longueur de la corde entre la frette  $n$  et le chevalet est donc donnée par la formule :

$$l_n = l_0 2^{-\frac{n}{12}}$$

La mesure sur le schéma donné est la suivante :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$l_n$	61.9	58.4	55.0	51.8	48.7	45.9	43.4	41.0	38.7	36.7	34.8	32.6	30.8	29.0	27.2

qui est très bien modélisée par la fonction théorique :



# Devoir non surveillé

vendredi 24 novembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## Spectre

San Vu Ngoc

Disponible sur le site "Images des maths" du CNRS à l'adresse "<http://images.math.cnrs.fr/Spectre.html>".

### De l'autre côté du miroir...

Les mathématiciens ont découvert un outil génial qui agit un peu comme une oreille : la transformée de Fourier. Cette formule magique transforme un signal en son spectre... bref elle vous fait passer dans un autre monde, l'autre côté du miroir. Et ce qui est extraordinaire, c'est qu'elle le fait avec n'importe quel signal, même s'il ne semble pas vraiment «oscillant». En fait, on peut démontrer qu'un signal d'énergie finie peut toujours s'écrire comme une superposition d'ondes élémentaires... mais il faudra peut-être en additionner une infinité.

Bon, j'ai compris : à partir d'un signal compliqué, on calcule son spectre, et ça nous donne des informations pertinentes (couleur, tonalité). Mais c'est une approche empirique. J'aimerais bien avoir une compréhension plus globale : de la création du signal jusqu'au spectre. Revenons donc à la source : d'où sort ce signal ?

Je préfère réveiller le guitariste qui sommeille en moi et gratter une corde. Prenons cette corde-ci (la corde «la»). Un petit coup d'ongle et, à l'œil nu, on voit bien qu'elle vibre très vite (en principe 110 fois par seconde). En même temps, je jette un œil à la page wikipédia «Onde sur une corde vibrante». Si j'identifie le manche de la guitare avec l'intervalle  $[0, L]$ , chaque position  $x \in [0, L]$  correspond à un point sur la corde. On peut noter  $y(x, t)$  le déplacement de ce point perpendiculairement au manche. Pour simplifier, on suppose qu'il se déplace dans une seule direction (par exemple parallèlement à la caisse de la guitare). En première approximation, les lois de la physique nous disent que



$y$  doit vérifier l'équation des ondes : «l'accélération du point  $y$  est proportionnelle à sa dérivée seconde par rapport à la position  $x$ .» En notations mathématiques, voici ce que ça donne :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

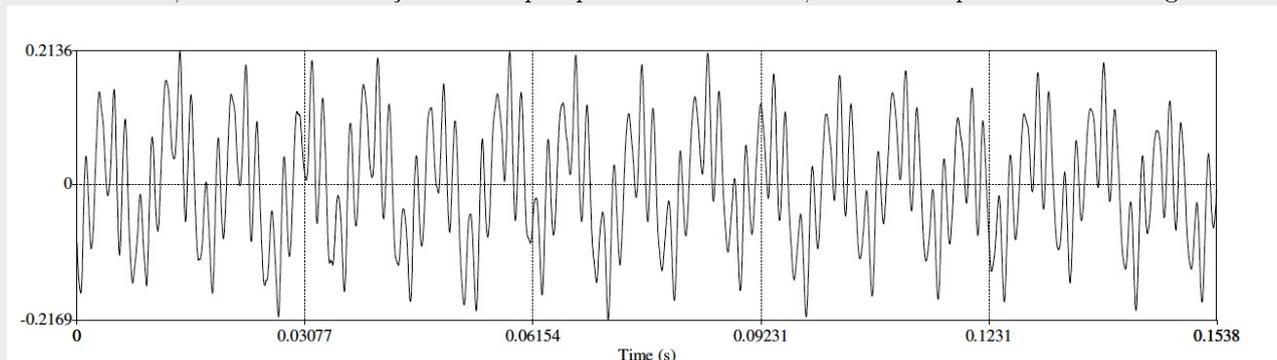
où  $v$  est une constante physique (vitesse de propagation de l'onde le long de la corde) qui augmente avec la tension de la corde et diminue lorsque la masse linéaire de la corde augmente.

En régime «stationnaire», une fois que le doigt est parti et avant que la vibration ne s'arrête, on peut supposer que la vibration  $y$  est périodique en temps. Notre théorie de Fourier nous dit qu'elle est donc une superposition d'ondes à une seule fréquence (on parle ici d'«harmoniques»). Mais est-ce que toutes les fréquences

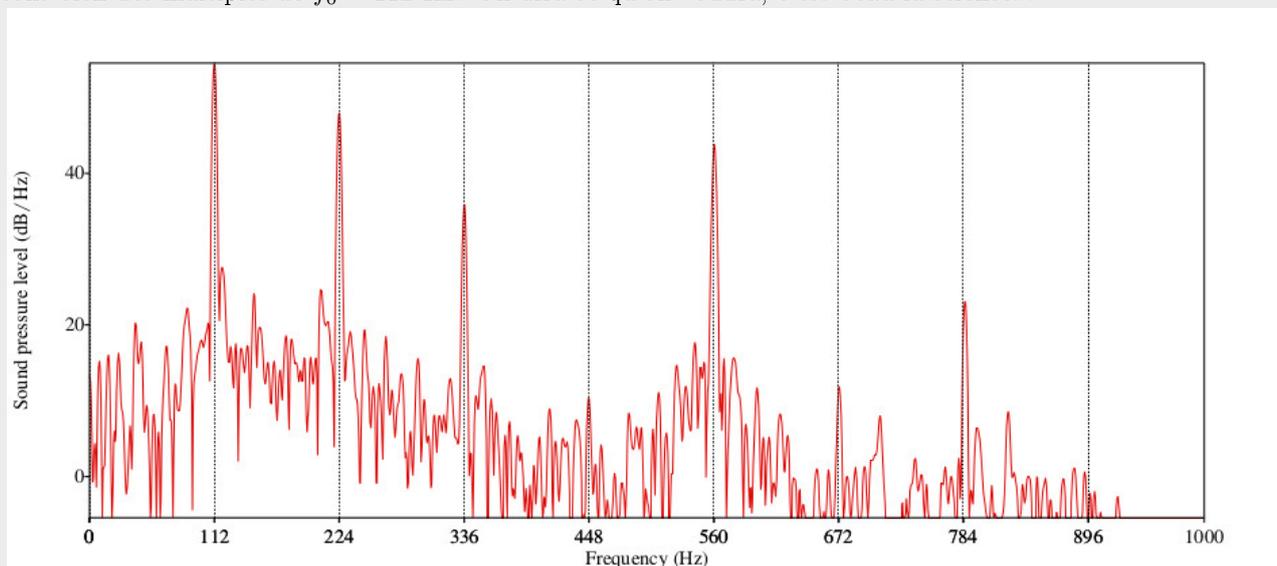
sont possibles ? Évidemment non, car alors il n'y aurait pas de raison que j'entende une note particulière lorsque je mets un micro sous le point  $x$ . Pour que le point  $x$  puisse osciller, la corde elle-même a besoin d'onduler le long de sa longueur. Or, elle est fixée aux extrémités du manche. Ces conditions aux bords sont cruciales pour sélectionner une gamme précise de fréquences autorisées... et donc pour produire le spectre sonore de la corde!

Cette idée de décomposition en harmoniques, couplée avec l'équation des ondes, fournit le résultat suivant : le spectre de ma corde est constitué d'une fréquence fondamentale  $f_0 = \frac{v}{2L}$  (en principe 110Hz pour la corde en question) et de tous ses multiples :  $2f_0, 3f_0$ , etc. Ça implique un fait remarquable : quelle que soit la façon dont je gratte ma corde, les seules fréquences que je vais pouvoir produire dans mon signal sonore sont les multiples de  $f_0$ .

Ah ah, voici quelque chose que je peux expérimenter facilement. J'approche la guitare de l'ordinateur, je gratte encore une fois ma corde de «la», et j'enregistre. Avec un logiciel d'édition sonore, je sélectionne une seconde de son, à un moment où ça a l'air à peu près «stationnaire» ; voici une représentation du signal :



Ici le graphe représente l'oscillation de la pression de l'air en fonction du temps. À vue de nez, ce n'est pas si évident d'y retrouver la fréquence fondamentale. Mais on a défini plus haut le « spectre d'un signal » (la transformée de Fourier) . Or, c'est un calcul que le logiciel sait faire, j'essaie donc ! Un petit clic de souris plus tard, et on voit parfaitement sur la figure (courbe rouge) que les fréquences ayant les plus grandes amplitudes sont bien des multiples de  $f_0 = 112$  Hz ! On dira ce qu'on voudra, c'est beau la science...



C'est le spectre du signal de la figure précédente. On y voit des multiples de la fréquence fondamentale  $f_0 = 112$  Hz. Bien sûr, on voit aussi plein d'autres choses qui ne sont pas prédites par notre modèle simpliste : les vibrations des cordes voisines, celles de la caisse, etc.

Récapitulons. Je me retrouve avec deux notions de spectre ! Ma corde de guitare a un spectre, qui est un ensemble de fréquences qui décrit les possibilités d'oscillations de la corde. Les sons que je peux produire avec cette corde sont nécessairement des superpositions (=sommes) d'harmoniques (=sinusoïdes) dont les fréquences sont dans le spectre. Le spectre, c'est un peu l'âme de la corde... D'un autre côté, lorsque j'écoute ma corde vibrer, j'ai un signal capté par mon oreille (ou un micro branché sur mon ordi), et je peux calculer le spectre de ce signal particulier ; ce n'est pas exactement le même objet que le spectre de la corde, puisque d'une part il ne contient pas forcément toutes les harmoniques possibles, et d'autre part chaque harmonique est parée d'une amplitude. Les guitaristes savent varier le timbre de la corde en la pinçant de différentes façons, de manière à varier les amplitudes des différentes harmoniques.

## Énoncé

- 1) Etude du son enregistré :
  - 1.a) Evaluer numériquement la période  $T$  puis la fréquence  $f$  du signal enregistré dans le document.
  - 1.b) Quelles sont les fréquences présentes principalement dans le spectre du document ?
  - 1.c) Est-il vrai que le spectre du document "ne contient pas forcément toutes les harmoniques possibles, et d'autre part chaque harmonique est parée d'une amplitude" ?
- 2) Synthèse de Fourier grâce à un logiciel (Python, Regressi, excel...)
  - 2.a) Créer des signaux temporels de fréquence  $f$ ,  $2f$ ,  $3f$ ,...
  - 2.b) Superposer ces signaux avec une amplitude donnée et présenter le signal résultant.

## Correction

1) Etude du son enregistré :

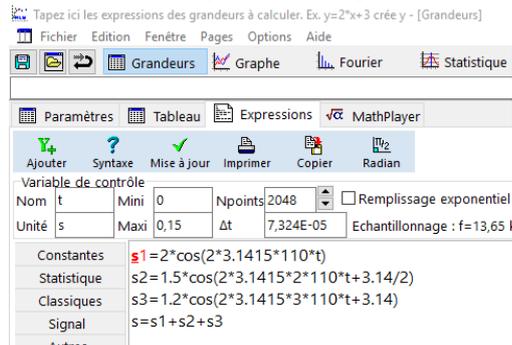
1.a) On compte 17 périodes en  $17T = 0,1538 \text{ s} \Rightarrow T = 9,0 \text{ ms}$  donc la fréquence est  $f = \frac{1}{T} = 110,5 \text{ Hz}$ .

1.b) Les fréquences présentes principalement dans le spectre du document sont :  $f_1 = 112 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 224 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 336 \text{ Hz}$ ,  $f_5 = 560 \text{ Hz}$ ,  $f_7 = 784 \text{ Hz}$ .

1.c) Le spectre du document ne contient pas forcément toutes les harmoniques possibles :  $f_4$  et  $f_6$  semblent absentes, et d'autre part chaque harmonique est parée d'une amplitude : 55 dB pour  $f_1$ , 45 dB pour  $f_2$  etc.

2) Synthèse de Fourier grâce à Regressi

2.a) Exemple de création de signaux temporels de fréquence  $f, 2f, 3f$  :



2.b) Signal résultant :

