

# Ondes mécaniques progressives

## I- Etablissement de l'équation de D'Alembert

### 1. Propagation du son dans un solide



#### Approximation des milieux continus *définition*

Dans l'approximation des milieux continus, la dimension entre les atomes, ions ou molécules (notée  $a$ ) et la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes acoustiques qui s'y propagent sont telles que

$$a \ll \lambda$$



#### Elasticité d'un solide *schéma*

La figure 1 représente l'élasticité d'un solide. Une barre solide de section  $S$  de longueur au repos  $\ell$  voit cette longueur varier de  $\Delta\ell$  sous l'action d'une force  $\vec{F}$ .

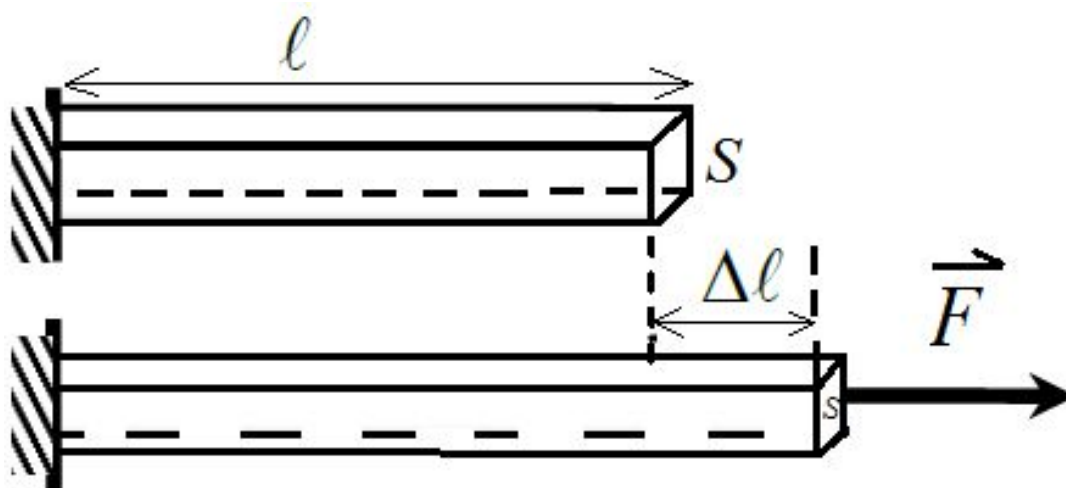


FIGURE 1 – Elasticité d'un solide



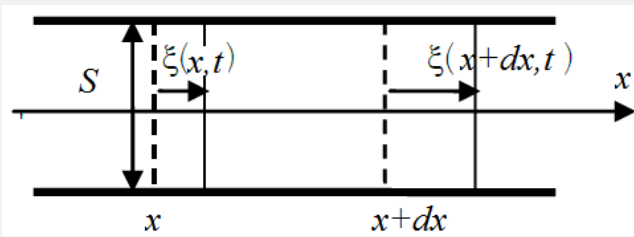
#### Loi de Hooke et module d'Young *à retenir*

La loi de Hooke stipule que la force pour faire varier la longueur  $\ell$  d'une barre solide de section  $S$  est proportionnelle à l'allongement  $\Delta\ell$  :

$$F = E S \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

où  $E$  est le module d'Young (ou module d'élasticité), typiquement de l'ordre de  $E \approx 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ .

**1 Etablissement de l'équation de D'Alembert dans le cas de la tige solide**  
exercice



On s'intéresse à une tige solide de masse volumique  $\mu$ , suivant la loi de Hooke avec le module d'Young  $E$ . On néglige la pesanteur.

Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ avec } c_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

La longueur du système à vide est

$$\ell = [(x + dx)] - [x] = dx$$

La longueur du système allongé est

$$\ell' = [(x + dx) + \xi(x + dx, t)] - [x + \xi(x, t)] = \ell + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \Rightarrow \Delta \ell = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

Le théorème de la résultante cinétique donne

$$\mu S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \mu S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} F_x(x + dx, t) - F_x(x, t) = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$$

Enfin la loi de Hooke donne

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( E S \frac{\Delta \ell}{\ell} \right) = E S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = E S \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

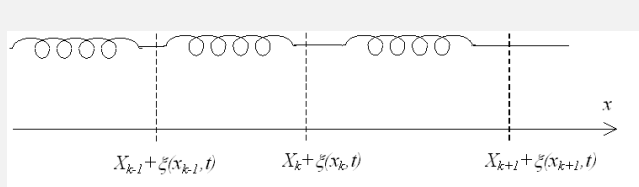
En remplaçant, on trouve

$$\mu S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = E S \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx$$

On a donc bien

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

**2 Etablissement de l'équation de D'Alembert dans le cas de la chaîne infinie de ressorts** exercice



On s'intéresse à une chaîne horizontale (d'axe  $Ox$ ) de ressorts sans masse, tous identiques, de longueur à vide  $l_0$ , de constante de raideur  $k$ , séparés par des particules ponctuelles toutes identiques, de masse  $m$ . La masse numéro  $n$  est à l'abscisse  $x_n(t)$ . On négligera la pesanteur.

Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ avec } c_0 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k \cdot (X_n + \xi_n - X_{n-1} - \xi_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} + \xi_{n+1} - X_n - \xi_n - l_0)$$

En prenant en compte ce qui se passe à l'équilibre, on trouve :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \cdot \xi_n)$$

Dans l'approximation des milieux continus, on va pouvoir écrire que la déformation  $\xi_n$  varie lentement devant  $a$  :

$$\xi_n(t) = \psi(x \approx n \cdot a, t)$$

Aussi, on pourra déterminer la déformation en  $x \approx (n - 1) \cdot a$  et en  $x \approx (n + 1) \cdot a$

$$\begin{cases} \xi_{n+1}(t) = \psi(x \approx (n + 1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) + \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \\ \xi_{n-1}(t) = \psi(x \approx (n - 1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformation devient alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec  $c_0 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$ .



### Valeurs de la vitesse du son dans différents solides *tableau*

Le tableau 1 présente des vitesses du son dans différents solides.

solide	plomb	plexiglass	cuivre	aluminium	fer	granit
$c_0$ en $km/s$	1,2	1,8	3,8	5,1	5,1	6,0

TABLE 1 – Vitesse du son dans différents solides

## 2. Ondes planes progressives monochromatiques



### Forme d'une OPPM *définition*

Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique, ou encore OPPM) vers les  $x$  croissants peut s'écrire :

$$h_\omega = A \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_0} \right) - \varphi_0 \right] = A \cdot \cos [\omega \cdot t - k \cdot x - \varphi_0]$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) vers les  $x$  décroissants peut s'écrire :

$$m_\omega = A \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t + \frac{x}{c_0} \right) - \varphi_0 \right] = A \cdot \cos [\omega \cdot t + k \cdot x - \varphi_0]$$

On peut généraliser avec la forme :

$$\psi = A \cdot \cos [\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0]$$

où  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ .

### 3 Vérification qu'une OPPM est solution de l'équation de D'Alembert *exercice*

Sous quelle condition  $A \cdot \cos[\omega \cdot t - k \cdot x - \varphi_0]$ ,  $A \cdot \cos[\omega \cdot t + k \cdot x - \varphi_0]$  et  $A \cdot \cos[\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0]$  sont-elles solutions de l'équation de D'Alembert ?

Il faut que  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ .

### Comportement temporel d'une OPPM se déplaçant vers la droite *animation*

Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) vers les  $x$  croissants est un sinus qui se déplace vers la droite.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### Comportement temporel d'une OPPM se déplaçant vers la gauche *animation*

Une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) vers les  $x$  décroissants est un sinus qui se déplace vers la gauche.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### Grandeurs temporelles d'une OPPM : pulsation, fréquence, période *définition*

- $\omega$  : pulsation (en  $rad \cdot s^{-1}$ );
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  : fréquence (en  $Hz$ );
- $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  : période (en  $s$ ).

### Grandeurs spatiales d'une OPPM : vecteur d'onde, longueur d'onde, nombre d'onde *définition*

- $\vec{k}$  : vecteur d'onde (en  $rad \cdot m^{-1}$ );
- $\sigma = \frac{|\vec{k}|}{2\pi}$  : nombre d'onde (en  $m^{-1}$ );
- $\lambda = \frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$  : longueur d'onde (en  $m$ ).

### Relation entre OPPM complexe et réelle *s'y retrouver*

une onde plane progressive monochromatique a pour amplitude :

$$\psi(\vec{r}, t) = \Re(\tilde{\psi}(\vec{r}, t))$$

où  $\tilde{\psi}$  est l'OPPM complexe associée.

L'amplitude complexe (en  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ), associée à une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  est :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi_0)}$$

où  $\psi_0$  et  $\varphi$  sont des constantes.

*remarque*

on aurait pu choisir le complexe conjugué  $\psi_0 \cdot e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi_0)}$  qui a la même partie réelle. Mais, une fois choisie la convention, il faut s'y tenir.

*remarque*

Si l'OPPM se propage suivant  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$ , et on peut réécrire :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi)}$$

**Intérêt des OPPM complexes** *s'y retrouver*

On pourra remplacer l'OPPM réelle  $\psi$  par sa forme complexe associée  $\tilde{\psi}$  dans toute équation suivie par  $\psi$ , pour peu que cette équation soit linéaire. L'intérêt est de rendre, avec les complexes, les calculs... plus simples qu'avec des fonctions trigonométriques!

**4 Vérification qu'une OPPM complexe est solution de l'équation de D'Alembert** *exercice*

Sous quelle condition  $\psi_0 \cdot e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi_0)}$  est-elle solution de l'équation de D'Alembert ?

Il faut que  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ .

**3. Lien entre ondes progressives et ondes stationnaires***remarque*

$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j \cdot k \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$  semble être de la forme  $F(x) \cdot G(t)$ , cependant seule compte l'onde réelle  $\psi = \Re(\tilde{\psi}) = \psi_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ . On voit ainsi qu'il ne s'agit pas d'une onde stationnaire.

**5 Onde stationnaire comme somme d'ondes progressives** *exercice*

Montrer que l'onde stationnaire apparaît comme la superposition

- d'une onde plane progressive monochromatique

$$\psi_+ = \frac{\psi_0}{2} \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_G - \varphi_F)$$

qui se propage vers les  $x$  croissants;

- et d'une onde plane progressive monochromatique

$$\psi_- = \frac{\psi_0}{2} \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi_G + \varphi_F)$$

de même amplitude qui se propage vers les  $x$  décroissants.

$$\psi = \psi_0 \cdot \cos(k \cdot x + \varphi_F) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_G)$$

peut se réécrire

$$\psi = \frac{\psi_0}{2} [\cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_G - \varphi_F) + \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi_G + \varphi_F)]$$

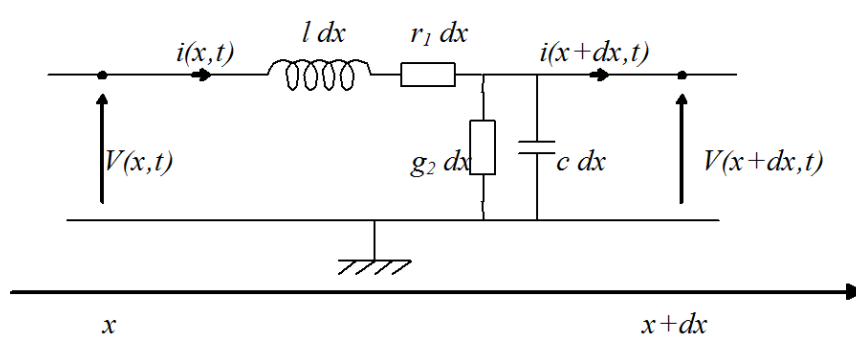
### ✳ Ondes stationnaires et réflexion s'y retrouver

cette onde stationnaire peut donc naître en particulier de la réflexion totale d'une OPPM incidente, du fait de la superposition de l'OPPM se propageant vers les  $x$  croissants (onde incidente) et de l'OPPM se propageant vers les  $x$  décroissants (onde réfléchie).

## II- Généralisation sur les ondes

### 1. Equations d'onde et relation de dispersion

#### 6 Equation de propagation dans un câble coaxial résistif *exercice*



On s'intéresse à un câble coaxial dispersif. Ce câble a une inductance propre par unité de longueur  $l$ , une capacité propre par unité de longueur  $c$ , une résistance par unité de longueur  $r_1$  et une conductance par unité de longueur  $g_2$ .

Déterminer l'équation d'onde (dite "des télégraphistes") suivie par la tension et l'intensité dans le câble et vérifier que l'on retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où  $r_1 = 0$  et  $g_2 = 0$ .

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + r_1 \cdot dx \cdot I(x,t) = -V(x+dx,t) + V(x,t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x,t) - I(x+dx,t) = c \cdot dx \cdot \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x+dx,t)$$

soit

$$-\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x,t)$$

On arrive à deux équations couplées :

$$c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x,t) = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad l \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + r_1 \cdot I(x,t) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. En dérivant la seconde par rapport à  $x$ , on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} \right) - r_1 \frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$$

et en utilisant la première,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x,t) \right) + r_1 \left( c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x,t) \right)$$

Ce qui nous mène à l'équation "des télégraphistes" que  $I(x,t)$  suit aussi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (r_1 \cdot c + l \cdot g_2) \frac{\partial V}{\partial t} + r_1 \cdot g_2 \cdot V(x,t)$$

On retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où  $r_1 = 0$  et  $g_2 = 0$ .

**Recherche des solutions d'une équation d'onde** *s'y retrouver*

On va chercher des solutions sous la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \Re(\tilde{\psi}(\vec{r}, t))$$

où

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{j(\tilde{k}x - \omega t + \varphi_0)}$$

où  $\psi_0$  et  $\varphi$  sont des constantes. Cette fois,  $\tilde{k}$  est *a priori* complexe.

**Relation de dispersion** *définition*

La relation de dispersion est l'équation entre le vecteur d'onde complexe  $\tilde{k}$  et la pulsation  $\omega$  des OPPM qui composent l'onde qui se propage dans ce milieu.

**7 Relation de dispersion dans le cas d'un câble coaxial résistif** *exercice*

1 Déterminer la relation de dispersion qui correspond à l'équation d'onde des télégraphistes.

Cela donne l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = l.c.\omega^2 + j.(r_1.c + l.g_2)\omega - r_1.g_2$$

**Solution d'une équation de dispersion** *s'y retrouver*

En général, on cherche un vecteur d'onde complexe

$$\tilde{k} = k_r + j.k_i \text{ avec } k_r = \Re(\tilde{k}) \text{ et } k_i = \Im(\tilde{k})$$

La forme de l'onde sera :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-k_i \cdot x} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k_r \cdot x - \varphi_0)}$$

**2. Milieu absorbant / Onde amortie****8 Vecteur d'onde complexe dans le cas du câble coaxial résistif** *exercice*

1 Dans le cas du câble coaxial résistif, pour une propagation vers les  $x$  croissants, montrer que  $k_i > 0$ .

On aboutissait à l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = l.c.\omega^2 + j.(r_1.c + l.g_2)\omega - r_1.g_2 = k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i$$

Dans le cas d'une propagation vers les  $x$  croissants, c'est à dire pour  $k_r > 0$ , on trouve :

$$k_i = \frac{(r_1.c + l.g_2)\omega}{2.k_r} > 0$$



### Onde amortie *s'y retrouver*

L'onde est de la forme :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-k_i \cdot x} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k_r \cdot x - \varphi_0)}$$

Donc l'amplitude de l'onde est

$$\psi_0 \cdot e^{-k_i \cdot x} = \psi_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$$

L'amplitude de l'onde décroît sur une taille caractéristique (appelée longueur de pénétration)

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{1}{\Im(\tilde{k})}$$

Puisque l'amplitude de l'onde décroît avec  $x$  si l'onde se propage vers les  $x$  croissants, on parle d'onde absorbée.



### "Photographie" d'une onde amortie sur une corde *schéma*

La figure 2 représente la "photographie" d'une onde amortie sur une corde. L'atténuation a lieu dans le sens de propagation de l'onde. L'onde perd de l'énergie au profit du milieu de propagation : il y a absorption de l'onde.

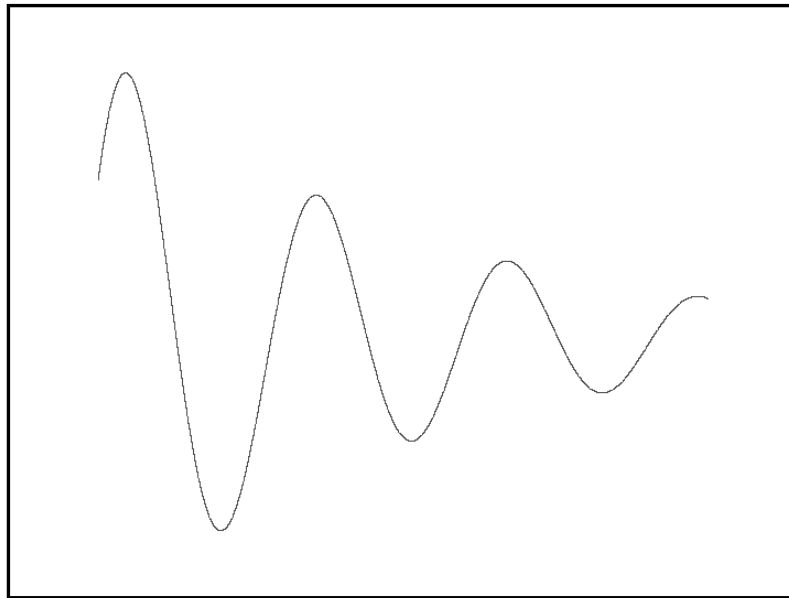


FIGURE 2 – "Photographie" d'une onde amortie sur une corde

## 3. Milieu dispersif



### Vitesse de phase *définition*

Pour une onde plane de pulsation  $\omega$  ayant une partie réelle du vecteur d'onde  $k_r$ , on définit une vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r}$$



**Milieu dispersif** *définition*

Un milieu est dit dispersif si la vitesse de phase dépend de la pulsation  $\omega$  de l'onde plane.

**9 Cas de l'équation de D'Alembert** *exercice*

Montrer qu'un milieu qui suit l'équation de D'Alembert est non dispersif.

L'équation de dispersion se réécrit

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} = (k_r^2 - k_i^2) + j.2.k_r.k_i$$

$\tilde{k}$  est alors réel :  $\tilde{k} = k = k_r = \pm \frac{\omega}{c_0}$  et  $k_i = 0$ .

**Exemple de la loi de Cauchy** *s'y retrouver*

en optique, on définit l'indice optique par  $n = \frac{c}{v}$  où  $v$  est la vitesse de l'onde électromagnétique dans un milieu (transparent) et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. La loi empirique de Cauchy relie  $n$  à la longueur d'onde (dans le vide)  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi.c}{\omega}$  :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

On voit donc que les milieux matériels sont dispersifs pour les ondes lumineuses :  $v_\varphi = \frac{c}{n}$  est fonction de  $\lambda$  donc de  $\omega$ .

**10 Équation de dispersion de Klein-Gordon** *exercice*

Dans certains cas, les équations de propagation mènent à la relation suivante

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 + \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2$$

entre le vecteur d'onde  $k = k_r + j.k_i$  et la pulsation  $\omega$ .

Montrer que le milieu est non absorbant mais dispersif.

Le vecteur d'onde est réel, et pour tout  $\omega > \omega_c$

$$k = k_r = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

On a alors pour tout  $\omega > \omega_c$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

La vitesse de phase dépend de  $\omega$  : le milieu est dispersif.

**III- Paquet d'ondes****1. Notion de paquet d'ondes****Nécessité du paquet d'ondes** *s'y retrouver*

une OPPM n'est pas physique car elle a une extension infinie dans l'espace et dans le temps. Elle ne finit jamais, et a débuté il y a un temps infini! // L'OPPM est un outil mathématique intéressant car on peut décomposer une onde sous la forme de superposition d'OPPM.

|



### Forme mathématique d'un paquet d'onde *définition*

La décomposition continue d'une onde plane complexe se propageant suivant  $Ox$  par une superposition d'OPPM peut s'écrire

$$\tilde{\psi} = \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

où la représentation de  $|\tilde{A}(\omega)|$  est le spectre de cette onde.



### Extension d'un paquet d'ondes *s'y retrouver*

Bien souvent  $\tilde{A}(\omega) \neq 0$  dans un domaine très limité, de largeur  $\Delta\omega$  : on parle de paquet d'ondes. Dans le domaine des fréquences, le paquet d'ondes a une extension  $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ .



### Paquet d'ondes *schéma*

| La figure 3 représente un paquet d'ondes. Il a été généré en superposant une vingtaine d'OPPM.

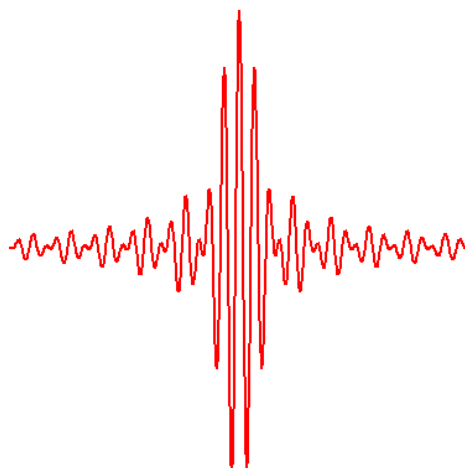


FIGURE 3 – Paquet d'ondes



### "Petit" paquet d'ondes *s'y retrouver*

On peut montrer que le paquet d'onde a, en un endroit, une durée  $\Delta t$  telle que

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \approx 1$$

De la même façon, un instantané montrerait que l'extension spatiale de l'onde est  $\Delta x$ , liée à la largeur en vecteur d'onde  $\Delta k$  par :

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$$

## 2. Vitesse de groupe

**Petit paquet d'ondes** *s'y retrouver*

On s'intéresse à un petit paquet d'ondes : on suppose que  $k = k_0 + \delta k$  et  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ , avec  $\delta\omega \ll \omega_0$  et  $\delta k \ll k_0$

**Vitesse de groupe** *définition*

On définit la vitesse de groupe par  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  au voisinage de  $(k_0; \omega_0)$  (le centre du paquet).  
C'est la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

**11 Enveloppe d'un paquet d'ondes** *exercice*

▷ Montrer que

$$\tilde{\psi} = \tilde{A}' \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)}$$

pour peu que l'on pose l'enveloppe

$$\tilde{A}' = \int \tilde{A}(\omega_0 + \delta\omega) \cdot e^{j \cdot \delta\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} d\delta\omega$$

On peut faire un développement limité autour de  $(k_0; \omega_0)$  :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) = k_0 + \frac{\delta\omega}{v_g}$$

En remplaçant dans l'onde plane complexe, on trouve

$$\tilde{\psi} = \int \tilde{A}(\omega_0 + \delta\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + \delta\omega \cdot t - k_0 \cdot x - \frac{\delta\omega}{v_g} x)} d\delta\omega$$

**Interprétation du paquet d'onde** *s'y retrouver*

on a donc trouvé une onde moyenne (autour de  $(k_0; \omega_0)$ ) :  $e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)}$ , modulée par une enveloppe  $\tilde{A}'$  qui se déplace donc vers les  $x$  croissants à la vitesse de groupe  $v_g$  car on retrouve le facteur  $e^{j \cdot \delta\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)}$ .

**Vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon** *schéma*

La figure 4 représente les vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon. On voit que la vitesse de groupe diffère *a priori* de la vitesse de phase. De plus, la vitesse de phase dépend de  $\omega$  : le milieu est dispersif.

**3. Propagation d'un paquet d'ondes****12 Propagation d'un paquet d'ondes suivant l'équation de D'Alembert** *exercice*

Montrer que vitesses de phase et de groupe sont égales dans le cas de l'équation de D'Alembert :

$$v_\varphi = v_g = c_0$$

Il n'y a pas de dispersion.

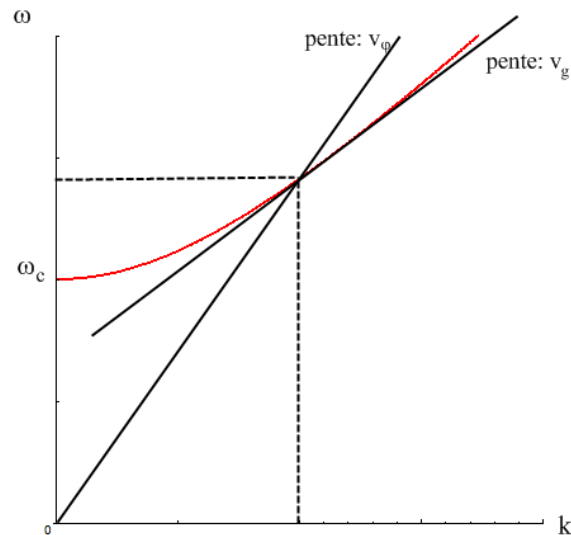


FIGURE 4 – Vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon

Dans le cas de l'équation de D'Alembert, l'équation de dispersion se réécrit

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c_0}$$

pour une onde se propageant vers les  $x$  croissants. Donc

$$v_\varphi = v_g = c_0$$



### Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant se caractérise par la transmission du paquet d'ondes identique à lui-même au cours de la propagation.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



### 13 Propagation d'un paquet d'ondes suivant l'équation de Klein-Gordon *exercice*

Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, montrer que vitesses de phase et de groupe sont différentes et que

$$v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} \text{ pour tout } \omega > \omega_c$$

La vitesse de groupe se calcule ainsi :

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{2 \cdot \omega}{2 \cdot c \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

la vitesse de groupe est :

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

et vitesses de phase et de groupe sont différentes car

$$v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

### 👁️ Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *schéma*

La figure 5 représente la propagation dans un milieu absorbant. Le paquet d'onde va se déformer : il va s'étaler et s'amenuiser.

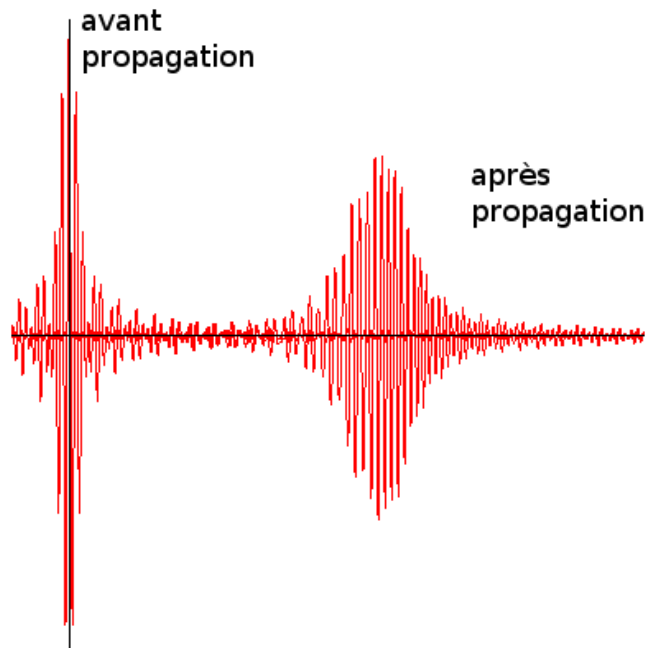


FIGURE 5 – Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant

### 👁️ Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif fait apparaître un élargissement de ce paquet d'ondes. Le fait que le milieu soit absorbant se caractérise par l'affaiblissement de l'amplitude du paquet d'ondes au cours de la propagation.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 🌟 Transmission de l'information *s'y retrouver*

pour transmettre une information, un émetteur doit envoyer à un récepteur une onde limitée dans le temps et l'espace : une impulsion, un petit paquet d'ondes.

Le récepteur détectera le passage de ce paquet d'ondes, c'est à dire, en gros, le passage du maximum de l'enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe.

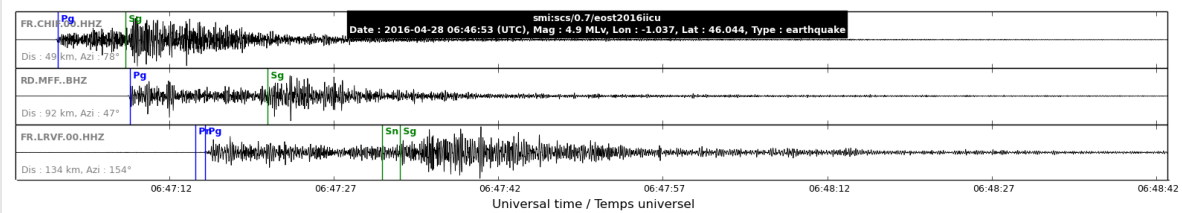
La transmission de l'information se fait donc à la vitesse  $v_g$ .

### ❤️ Effet de la dispersion et de l'absorption sur un paquet d'ondes *à retenir*

- la dispersion fait que l'enveloppe du paquet d'ondes s'élargit,
- l'absorption fait que l'enveloppe du paquet d'ondes s'affaisse.

## 1) Modélisation de la propagation d'un tremblement de terre *exercice*

On donne l'enregistrement du tremblement de terre de La Rochelle du 28 avril 2016, en trois endroits :



1) On assimile le milieu de propagation à une tige solide de masse volumique  $\mu$ , qui suit la loi de Hooke avec le module d'Young  $E$ . On néglige la pesanteur.

1.a) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ avec } c_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

1.b) Montrer qu'une OPPM est solution d'une telle équation différentielle.

1.c) Les enregistrements font-ils apparaître une OPPM?

2) En s'appuyant sur les enregistrements donnés, estimer :

2.a) la vitesse de phase  $V_p$  des ondes P (repérées sur les enregistrements par "Pp");

2.b) la vitesse de phase  $V_s$  des ondes S (repérées sur les enregistrements par "Sg");

2.c) la vitesse de groupe (à définir).

2.d) Le milieu de propagation (la Terre!) est-il dispersif?

3) Pour déterminer la position du séisme, il suffit de connaître les distances (notées  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ ) de celui-ci à trois stations qui l'ont enregistré : trois sphères de rayon  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  se croisent en un seul point qui est le foyer du séisme.

On pose, pour une station d'enregistrement :

$d$ , la distance à l'épicentre (à déterminer) ;

$t_0$ , la date du séisme (inconnue) ;

la vitesse de phase  $V_p$  des ondes P (supposée connue) ;

la vitesse de phase  $V_s$  des ondes S (supposée connue aussi).

3.a) Exprimer les dates d'arrivée des ondes P ( $t_p$ ) et S ( $t_s$ ) à la station.

3.b) Exprimer  $d$  en fonction de variables connues ( $V_p$ ,  $V_s$ ,  $t_s$  et  $t_p$ ).

### Correction :

1)

1.a) La longueur du système à vide est

$$\ell = [(x + dx)] - [x] = dx$$

La longueur du système allongé est

$$\ell' = [(x + dx) + \xi(x + dx, t)] - [x + \xi(x, t)] = \ell + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \Rightarrow \Delta \ell = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

Le théorème de la résultante cinétique donne

$$\mu S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \mu S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} F_x(x + dx, t) - F_x(x, t) = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$$

Enfin la loi de Hooke donne

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( E S \frac{\Delta \ell}{\ell} \right) = E S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = E S \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

En remplaçant, on trouve

$$\mu S dx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = E S \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx$$

On a donc bien

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

**1.b)** On remplace par une OPPM et ça marche !

**1.c)** Les enregistrements font apparaître des paquets d'OPPM (groupes).

**2)**

**2.a)** Entre le premier enregistrement à  $d_1 = 49$  km et le second à  $d_2 = 92$  km s'est écoulé  $\Delta t = 7,0$  s.

Soit la vitesse de phase des ondes  $P$  :  $v_p = \frac{(92-49) \times 10^3}{7,0} = 6,1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

**2.b)** la vitesse de phase des ondes  $S$  :  $v_s = \frac{(92-49) \times 10^3}{13,9} = 3,1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

**2.c)** la vitesse de groupe  $v_g \approx \frac{(134-49) \times 10^3}{30} = 2,8 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2.d)** Le milieu de propagation est dispersif car l'enveloppe du paquet d'ondes s'élargit.

**3)** On a pu déterminer le foyer du séisme, en connaissant les vitesses des ondes  $P$  et  $S$ . Cela nécessite l'utilisation d'au moins 3 stations d'enregistrement situées en des lieux différents et qui enregistrent les ondes  $P$  et  $S$ . L'onde emprunte le trajet le plus court. On considère que la propagation de l'onde se fait en ligne droite.

**3.a)** Avec une seule station, on peut écrire :

le temps d'arrivée de l'onde  $P$  est :  $t_p = t_0 + \frac{d}{V_p}$ ,

le temps d'arrivée de l'onde  $S$  est :  $t_s = t_0 + \frac{d}{V_s}$ .

**3.b)** En faisant la différence entre les deux relations précédentes, on arrive à :

$$t_s - t_p = d \left( \frac{1}{V_s} - \frac{1}{V_p} \right)$$

donc  $d = \frac{t_s - t_p}{\frac{1}{V_s} - \frac{1}{V_p}}$ .

**Éléments de correction :**

Ondes  $P$  :  $v_p = 6,1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ondes  $S$  :  $v_s = 3,1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , vitesse de groupe  $v_g \approx 2,8 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Et  $d = \frac{t_s - t_p}{\frac{1}{V_s} - \frac{1}{V_p}}$ .

# Les techniques mathématiques à connaître

## Intégration d'équations aux dérivées partielles

### Equation aux dérivées partielles

On cherche à déterminer une fonction  $\psi$  qui dépend de plusieurs variables et sur laquelle porte une équation aux dérivées partielles (EDP).

◆ Exemples d'EDP :

- équation de D'Alembert :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  ;
- équation de diffusion :  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  ;
- équation de Laplace :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ .

### Méthode de la séparation des variables

La méthode de séparation des variables consiste à poser  $\psi(x, t) = f(x)g(t)$  et à remplacer dans l'EDP, pour voir si on arrive à obtenir des équations différentielles sur  $f(x)$  et sur  $g(t)$  indépendamment.

◆ Exemple pour l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) \Rightarrow \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de  $t$  et le membre de droite que de  $x$  on en déduit qu'ils sont constants, c'est-à-dire qu'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que :

$$g''(t) - K g(t) = 0 \text{ et } f''(x) - \frac{K}{c^2} f(x) = 0$$

On a ainsi obtenu deux équations à variables séparées...

### Méthode des complexes

La méthode des complexes consiste à poser  $\psi(x, t) = \Re(\tilde{\psi}(x, t))$  avec  $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k} x)}$  et à remplacer dans l'EDP (uniquement si elle est linéaire).

Cela mène à une équation reliant  $\tilde{k}$  à  $\omega$  (relation de dispersion). Il s'agit ensuite de résoudre cette équation, en posant  $\tilde{k} = k_r + j k_i$  (où  $k_r = \Re(\tilde{k})$  et  $k_i = \Im(\tilde{k})$ ).

Il faut ensuite exprimer  $\tilde{\psi}(x, t)$  puis  $\psi = \Re(\tilde{\psi})$ .

◆ Exemple pour l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -j\omega = -D \tilde{k}^2$$

On pose donc  $\tilde{k} = k_r + j k_i$ , qui donne dans la relation de dispersion :

$$j\omega = D(k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 = k_i^2 \text{ et } k_r k_i = \frac{\omega}{2D}$$

Etc...



# Technique à maîtriser

jeudi 30 novembre 2017

## I- Les capacités exigibles

### 1. Etablir une équation d'onde



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Relier la raideur des ressorts fictifs à l'énergie de liaison et évaluer l'ordre de grandeur du module d'Young.

Établir l'équation d'onde dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus en utilisant un système infinitésimal

Associer qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.

### 2. Chercher des solutions à l'équation d'onde



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive par la forme de leur représentation réelle.

Déterminer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion.

### 3. Créer un paquet d'ondes



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

## II- Méthodes

### 1. Etablir une équation d'onde



**A) Equation de propagation dans un milieu continu** *méthode*

On part de l'étude d'un petit élément de longueur  $dx$ , et on prend garde à faire la différence entre les actions qui s'exercent à gauche ( $-\vec{F}(x)$ ) et à droite ( $+\vec{F}(x + dx)$ ).



**B) Equation de propagation dans un milieu discontinu** *méthode*

On part de l'étude d'un élément  $n$ , on observe l'équilibre, puis ce qui se passe hors équilibre, ce qui donne une équation de récurrence sur les déformations. Ensuite, on utilise l'hypothèse des milieux continus en faisant un développement limité au deuxième ordre des déformations pour les éléments  $n$ ,  $n - 1$  et  $n + 1$ .

On réinjecte dans la relation de récurrence pour trouver l'équation de propagation.

**C) Equation de propagation dans un câble coaxial** *méthode*

On part de l'étude d'un petit élément de longueur  $dx$ , et on écrit la loi des mailles et celle des nœuds.  
On découple les deux équations couplées en les re-dérivant.

**2. Chercher des solutions à l'équation d'onde****D) Etablir la relation de dispersion** *méthode*

Afin d'arriver à la relation de dispersion, on recherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme  $\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega t - \tilde{k} x - \varphi_0)}$ . NB : on aurait pu tout aussi bien choisir  $\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{+j \cdot (\omega t - \tilde{k} x - \varphi_0)}$ . Mais une fois fait le choix, on n'en change plus !  
On trouve ensuite  $\tilde{k} = f(\omega)$ .

**E) Forme de l'onde solution** *méthode*

On cherche une onde de la forme :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega t - \text{veck} \vec{r} - \varphi_0)} = \psi_0 e^{-j \cdot (\omega t - \tilde{k} x - \varphi_0)}$$

Il faut trouver la solution de la relation de dispersion en utilisant  $\tilde{k} = k_r + j \cdot k_i$  qui donne deux équations réelles.

Une fois déterminés  $k_r$  et  $k_i$ , on réinjecte dans la forme de l'onde :

$$\tilde{\psi} = \psi_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega t - \tilde{k} x - \varphi_0)} = \psi_0 \cdot e^{-k_i \cdot x} \cdot e^{-j \cdot (\omega t - k_r \cdot x - \varphi_0)}$$

**3. Créer un paquet d'ondes****F) Paquets d'ondes** *méthode*

L'onde complexe est la superposition d'ondes monochromatiques :

$$\tilde{\psi} = \int_0^\infty \tilde{A}(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega t - k \cdot x)} d\omega$$

où  $\tilde{A}(\omega)$  est le spectre de cette onde.

En faisant le développement limité autour de  $\omega_0, k_0$  :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + u \\ k(\omega) \approx k_0 + \frac{\partial k}{\partial \omega} u = k_0 + \frac{u}{v_g} \end{cases}$$

on peut déterminer le paquet d'onde par le changement de variable  $\omega \rightarrow u$  :

$$\tilde{\psi} = \int_{-\infty}^\infty \tilde{A}(\omega_0 + u) \cdot e^{j \cdot \left( u t - \frac{u}{v_g} x \right)} e^{j \cdot (\omega_0 t - k_0 x)} du$$

### III- Exercices

#### 1. Etablir une équation d'onde

##### 1.1) Chaîne de ressorts

On s'intéresse à une chaîne horizontale (d'axe  $Ox$ ) de ressorts sans masse, tous identiques, de longueur à vide  $l_0$ , de constante de raideur  $k$ , séparés par des particules ponctuelles toutes identiques, de masse  $m$ . La masse numéro  $n$  est à l'abscisse  $x_n(t)$ . On négligera la pesanteur.

1) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

1) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = 0 = -k \cdot (X_n - X_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} - X_n - l_0)$$

2) Le théorème de la résultante cinétique donne

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k \cdot (X_n + \xi_n - X_{n-1} - \xi_{n-1} - l_0) + k \cdot (X_{n+1} + \xi_{n+1} - X_n - \xi_n - l_0)$$

En prenant en compte ce qui se passe à l'équilibre, on trouve :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{k}{m} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \cdot \xi_n)$$

3) Dans l'approximation des milieux continus, on va pouvoir écrire que la déformation  $\xi_n$  varie lentement devant  $a$  :

$$\xi_n(t) = \psi(x \approx n \cdot a, t)$$

Aussi, on pourra déterminer la déformation en  $x \approx (n-1) \cdot a$  et en  $x \approx (n+1) \cdot a$

$$\begin{cases} \xi_{n+1}(t) = \psi(x \approx (n+1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) + \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \\ \xi_{n-1}(t) = \psi(x \approx (n-1) \cdot a, t) \approx \psi(x \approx n \cdot a, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformation devient alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

avec  $c_0 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

##### 1.2) Echelle de perroquet

On s'intéresse à un fil de torsion suivant un axe  $Oz$  vertical, le long duquel sont disposées à des distances  $a$  des barrettes horizontales identiques, de moment d'inertie  $J$  par rapport à  $Ox$ .

La barrette numéro  $n$  fait un angle  $\theta_n(t)$  avec un axe  $Ox$  horizontal. Le fil entre les barrettes numéro  $n$  et  $n+1$  exerce sur la barrette numéro  $n$  le moment

$$\vec{M}_{n+1 \rightarrow n} = \Gamma \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n) \vec{u}_z$$

1) Montrer que dans l'approximation continue, l'équation suivie par la déformation peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

1) A l'équilibre, le théorème du moment cinétique donne pour la barrette numéro  $n$  qui fait l'angle  $\theta_n(t) = \alpha_n$  avec  $Ox$  :

$$J \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = 0 = -\Gamma \cdot (\theta_{n-1} - \theta_n) + \Gamma \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n) = \Gamma \cdot (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} - 2\alpha_n) = \Gamma \cdot (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} - 2\alpha_n)$$

Hors équilibre, le théorème du moment cinétique donne pour la barrette numéro  $n$  fait maintenant l'angle  $\theta_n(t) = \alpha_n + \xi_n(t)$  :

$$J \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = J \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -\Gamma \cdot (\alpha_n + \xi_n - \alpha_{n-1} - \xi_{n-1}) + \Gamma \cdot (\alpha_{n+1} + \xi_{n+1} - \alpha_n - \xi_n)$$

En prenant en compte ce qui se passe à l'équilibre, on trouve :

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \frac{\Gamma}{J} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n)$$

Dans l'approximation des milieux continus, on va pouvoir écrire que la déformation  $\xi_n$  varie lentement devant  $a$  :

$$\xi_n(t) = \psi(z \approx n.a, t)$$

Aussi, on pourra déterminer la déformation en  $z \approx (n-1).a$  et en  $z \approx (n+1).a$

$$\begin{cases} \xi_{n+1}(t) = \psi(z \approx (n+1).a, t) \approx \psi(z \approx n.a, t) + \frac{\partial \psi}{\partial z} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{a^2}{2} \\ \xi_{n-1}(t) = \psi(z \approx (n-1).a, t) \approx \psi(z \approx n.a, t) - \frac{\partial \psi}{\partial z} a + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

L'équation de la déformation devient alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

avec  $c_0 = a \sqrt{\frac{\Gamma}{J}}$ .

### 1.3) Corde avec frottement

On considère une corde inextensive tendue principalement suivant un axe  $Ox$ , de masse linéique  $\mu_l$  soumise à une tension  $T_0$  avec une force de frottement fluide par unité de longueur  $\vec{f}_f = -\lambda \cdot \vec{v}$ .

On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension qu'exerce à l'instant  $t$  la partie de fil d'abscisse supérieure à  $x$  sur la partie de fil d'abscisse inférieure à  $x$ .

Déterminer l'équation de propagation des ondes sur une telle corde.

Le petit élément de longueur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est à l'altitude  $y(x, t)$  à l'instant  $t$ . Cet élément fait avec l'axe  $Ox$  un angle

$$\alpha(t) \approx \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

car cet angle est petit. Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) - \lambda \cdot dx \cdot \vec{v}$$

dont la projection suivant  $\vec{u}_x$  donne :

$$\mu_l \cdot dx \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$$

car le déplacement de la corde se fait selon une direction  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$ . Aussi, on pourra considérer  $T_x = |\vec{T}| \cos \alpha \approx |\vec{T}| = T_0$ , constante. Donc, la projection suivant  $\vec{u}_y$  de la tension est  $T_y = |\vec{T}| \sin \alpha \approx T_0 \alpha$ , ce qui permet d'exprimer la projection suivant cet axe du théorème du centre de masse :

$$\mu_l \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx - \lambda \cdot dx \frac{\partial y}{\partial t}$$

Comme l'angle est  $\alpha(t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}$ , soit une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

avec la célérité de l'onde  $c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_i}}$  et le temps caractéristique d'amortissement  $\tau = \frac{\mu_i}{\lambda}$ .

#### 1.4) Equation de propagation dans un câble coaxial sans perte

On s'intéresse à un câble coaxial sans perte. On notera l'inductance propre par unité de longueur  $l$  et la capacité propre par unité de longueur  $c$ .

Montrer que tension  $V$  et intensité  $I$  vérifient l'équation de D'Alembert. Que vaut la célérité des ondes dans le câble ?

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} \text{ soit } -\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \frac{\partial V}{\partial t}$$

L'étude électrocinétique du petit élément de longueur  $dx$  qui présente une inductance  $l \cdot dx$  et une capacité  $c \cdot dx$  nous amène à deux équations couplées :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. Ainsi, en dérivant par rapport à  $x$  la première et par rapport à  $t$  la seconde, on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant par rapport à  $x$  la seconde équation et par rapport à  $t$  la première, on trouve :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ainsi, tension  $V$  et intensité  $I$  vérifient ainsi la même équation de propagation, celle de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

avec la célérité  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$ .

## 2. Chercher des solutions à l'équation d'onde

### 2.5) Réécriture de l'équation de D'Alembert à une dimension

1) montrer que l'équation de D'Alembert à une dimension peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \psi = 0$$

où les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sont de type :

- $\psi = cste$ , qu'on exclut habituellement ;
- $\psi = f(u)$  ;
- $\psi = g(v)$ .

2) Quel sens donner à ces deux types de solutions ?

$$1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \text{ en}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$$

Les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sont de type :

- $\psi = cste$ , qu'on exclut habituellement ;
- $\psi = f(t, x)$ , telle que  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) f(t, x) = 0$  ;
- $\psi = g(t, x)$ , telle que  $\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) g(t, x) = 0$ .

2) Les premières sont des OPP se propageant vers les  $x$  croissants ; les secondes vers les  $x$  décroissants.

## 2.6) Equation de dispersion dans le cas de l'équation de propagation de D'Alembert

Déterminer l'équation de dispersion dans le cas de l'équation de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow \tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

## 2.7) Forme des ondes planes progressives

- 1) Montrer que  $\psi(t, x) = f(x - c_0.t)$  ou  $h\left(t - \frac{x}{c_0}\right)$  est solution de l'équation de D'Alembert.
- 2) De même, montrer que  $\psi(t, x) = g(x + c_0.t)$  ou  $m\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$  est aussi solution de l'équation de D'Alembert.

- 1) On va chercher  $f(t, x) = f(u)$ , où  $u$  est une fonction de  $x$  et de  $t$ . Comme  $f$  est telle que  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) f(t, x) = 0$ , on en déduit  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{df}{du} = 0$ . On voit que  $u = x - c_0.t$  convient.
- 2) On va chercher maintenant  $g(t, x) = g(v)$ , où  $v$  est une fonction de  $x$  et de  $t$ . Comme  $g$  est telle que  $\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) g(t, x) = 0$ , on en déduit  $\left( \frac{\partial v}{\partial t} - c_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dg}{dv} = 0$ . On voit que  $v = x + c_0.t$  convient.

## 2.8) Vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique

On définit la vitesse de phase comme la vitesse à laquelle il faut se déplacer pour que la phase  $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi$  soit constante.

- 1) Déterminer la vitesse de phase d'une onde plane progressive monochromatique vers la droite.
- 2) Même chose pour une onde plane progressive monochromatique vers la gauche.

- 1) Dans le premier cas,  $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$ , pour peu que

$$\omega t - kx - \varphi = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) - \varphi$$

Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant  $t + \Delta t$  qu'à l'instant  $t$ , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de  $+\Delta x$ , avec

$$\Delta x = \frac{\omega}{k} \Delta t = +c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les  $x$  croissants, avec une vitesse  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = +c_0$

2) Dans le deuxième cas,  $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$ , pour peu que  $x + c_0.t = x + \Delta x + c_0.(t + \Delta t)$ . Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant  $t + \Delta t$  qu'à l'instant  $t$ , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de  $\Delta x$ , avec

$$\Delta x = -c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les  $x$  décroissants, avec une vitesse algébrique  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -c_0$ .

## 2.9) Vitesse de phase d'une onde plane progressive

On définit la vitesse de phase comme la vitesse  $\vec{v}_\varphi = v_x \vec{u}_x$  à laquelle il faut se déplacer pour qu'on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant  $t + \Delta t$  qu'à l'instant  $t$ , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de  $v_x \Delta t$ .

- 1) Déterminer la vitesse de phase d'une onde plane progressive vers la droite.
- 2) Même chose pour une onde plane progressive vers la gauche.

1) Dans le premier cas,  $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$ , pour peu que  $x - c_0 \cdot t = x + \Delta x - c_0 \cdot (t + \Delta t)$ . Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant  $t + \Delta t$  qu'à l'instant  $t$ , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de  $+\Delta x$ , avec

$$\Delta x = +c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les  $x$  croissants, avec une vitesse  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = +c_0$

2) Dans le deuxième cas,  $\psi(t + \Delta t, x + \Delta x) = \psi(t, x)$ , pour peu que  $x + c_0 \cdot t = x + \Delta x + c_0 \cdot (t + \Delta t)$ . Aussi, on retrouve la même forme (la même "photographie") à l'instant  $t + \Delta t$  qu'à l'instant  $t$ , pour peu qu'on ait déplacé cette forme de  $\Delta x$ , avec

$$\Delta x = -c_0 \cdot \Delta t$$

La phase de l'onde se propage vers les  $x$  décroissants, avec une vitesse algébrique  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -c_0$ .

## 2.10) Equation de propagation dans un câble coaxial avec perte

On s'intéresse à un câble coaxial dispersif. Ce câble a une inductance propre par unité de longueur  $l$ , une capacité propre par unité de longueur  $c$ , une résistance par unité de longueur  $r_1$  et une conductance par unité de longueur  $g_2$ .

- 1) Déterminer l'équation "des télégraphistes" suivie par la tension et l'intensité dans le câble.
- 2) Vérifier que l'on retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où  $r_1 = 0$  et  $g_2 = 0$ .

- 1) Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + r_1 \cdot dx \cdot I(x, t) = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x + dx, t)$$

soit

$$-\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot dx \cdot V(x, t)$$

On arrive à deux équations couplées :

$$c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + r_1 \cdot I(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. En dérivant la seconde par rapport à  $x$ , on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \right) - r_1 \frac{\partial I(x, t)}{\partial x}$$

et en utilisant la première,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) \right) + r_1 \left( c \frac{\partial V}{\partial t} + g_2 \cdot V(x, t) \right)$$

Ce qui nous mène à l'équation "des télégraphistes" que  $I(x, t)$  suit aussi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (r_1 \cdot c + l \cdot g_2) \frac{\partial V}{\partial t} + r_1 \cdot g_2 \cdot V(x, t)$$

- 2) On retrouve l'équation de D'Alembert dans le cas où  $r_1 = 0$  et  $g_2 = 0$ .

**2.11) Equation de dispersion dans le cas de l'équation de propagation de D'Alembert**

Déterminer l'équation de dispersion dans le cas de l'équation de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow \tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

**2.12) Equation de dispersion dans le cas d'une corde subissant un frottement fluide**

Dans le cas de la corde subissant une force de frottement fluide, on aboutit à l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}$$

Déterminer alors l'équation de dispersion.

Cela donne l'équation de dispersion

$$(-j.\omega)^2 + \frac{-j.\omega}{\tau} = c_0^2 \cdot (j.\tilde{k})^2$$

soit l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{j.\omega}{\tau.c_0^2}$$

**2.13) Equation de dispersion dans le cas d'un câble coaxial résistif**

Dans le cas d'un câble coaxial résistif, on aboutit à l'équation de propagation dite des "télégraphistes" :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} = l.c \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} + (r_1.c + l.g_2) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + r_1.g_2 \cdot \tilde{\psi}$$

Déterminer alors l'équation de dispersion.

Cela donne l'équation de dispersion

$$\tilde{k}^2 = l.c.\omega^2 + j.(r_1.c + l.g_2)\omega - r_1.g_2$$

**2.14) Equation de dispersion dans le cas d'une chaîne de pendules couplés**

La propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse  $M$  et longueur  $L$ , couplés par des ressorts de raideur  $K$ , disposés à une distance  $a$  les uns des autres dans l'approximation des milieux continus suit l'équation :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \psi = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$  avec  $c^2 = a^2 \cdot \omega_p^2$ .

Déterminer l'équation de dispersion.

L'équation de dispersion est celle de Klein Gordon :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2.k^2$$

**2.15) Equation de dispersion de Klein Gordon**

On s'intéresse à un milieu qui vérifie la relation de dispersion de Klein-Gordon :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2.c^2$$



- 1) Calculer en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$  et  $c$  :
  - 1.a) la vitesse de phase  $v_\varphi$ ,
  - 1.b) la vitesse de groupe  $v_g$ .
- 2) Exprimer  $v_g$  en fonction de  $c$  et  $v_\varphi$ .
- 3) Comparer chacune des vitesses à  $c$ .

1)

1.a) la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

1.b) la vitesse de groupe :

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

2)

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

3)  $v_g < c < v_\varphi$ .

### 2.16) Diverses ondes à la surface de l'eau

On peut montrer que la relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur  $h$  est donnée par :

$$\omega^2 = \left( g \cdot k + \frac{\gamma \cdot k^3}{\mu} \right) th(k \cdot h)$$

où  $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur,  $\mu = 1,0 kg/L$  la masse volumique de l'eau et  $\gamma = 72 \cdot 10^{-3} SI$  la tension superficielle à l'interface eau-air.

- 1) Calculer la vitesse de groupe d'une onde :
  - 1.a) de marée ( $\lambda = 1000 km$  et  $h = 5 km$ ),
  - 1.b) de houle ( $\lambda = 5 m$ ),
  - 1.c) de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau profonde ( $\lambda = 1 cm$ ),
  - 1.d) de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe sur une cuve à onde ( $\lambda = 2 cm$  et  $h = 1 mm$ ).

1) NB : en eaux profondes,  $th(k \cdot h) \approx 1$ . On trouve :1.a) pour une onde de marée de  $\lambda = 1000 km$  et  $h = 5 km$ ,

$$v_g = 800 km/h$$

1.b) pour une onde de houle ( $\lambda = 5 m$ ),

$$v_g = 5 km/h$$

1.c) pour une onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe en eau profonde ( $\lambda = 1 cm$ ),

$$v_g = 30 cm \cdot s^{-1}$$

1.d) et pour une onde de capillarité pour une goutte d'eau qui tombe sur une cuve à onde ( $\lambda = 2 cm$  et  $h = 1 mm$ ),

$$v_g = 20 cm \cdot s^{-1}$$

**2.17) Onde absorbée**

1) Une onde plane se déplace dans un milieu absorbant. On suppose que la puissance absorbée par un volume élémentaire est proportionnelle à ce volume et à l'intensité de l'onde au voisinage du volume considéré.

1.a) Montrer alors que l'intensité de l'onde décroît exponentiellement avec la distance parcourue dans le milieu (loi de Beer-Lambert).

1.b) Que dire alors de l'intensité en décibels ?

2) Application : une fibre optique présente une absorption de  $0,1dB.km^{-1}$ . Au bout de quelle longueur l'intensité d'entrée aura-t-elle diminué de moitié ?

1) La puissance incidente sur une tranche de section transversale  $S$  comprise entre les abscisses  $z$  et  $z+dz$  est  $I(z).S$  où  $I(z)$  est l'intensité de l'onde à l'abscisse  $z$ . De même, la puissance transmise est  $I(z+dz).S$ .

La puissance absorbée est proportionnelle au volume  $S.dz$  traversé et à l'intensité incidente, on a donc :  $I(z+dz).S - I(z).S = -\beta.S.I(z).dz$  où  $\beta$  est un coefficient positif.

1.a) On a donc  $\frac{dI}{dz} = -\beta.I(z)$  qui s'intègre en :

$$I(z) = I_0.e^{-\beta.z}$$

L'intensité décroît exponentiellement.

1.b) L'intensité en décibels est  $I_{dB} = 10 \log \left( \frac{I(z)}{I_{ref}} \right)$ . C'est donc une fonction affine décroissante de  $z$  de pente  $-\frac{10.\beta}{\ln(10)}$  :

$$I_{dB} = 10.\log \left( \frac{I_0}{I_{ref}} \right) - \frac{10.\beta}{\ln(10)} z$$

2)  $\frac{10.\beta}{\ln(10)} = 0,1dB.km^{-1}$ . La longueur  $L$  au bout de laquelle  $\frac{I(L)}{I_0} = \frac{1}{2}$  est :

$$L = \frac{2}{\beta} = 30km$$

**2.18) Relation entre les vitesses de phase et de groupe**

1) Démontrer la relation de Rayleigh entre vitesses de phase et de groupe qui fait intervenir comme variable la longueur d'onde  $\lambda$  :

$$v_g = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}$$

2) On suppose que la relation de dispersion s'écrit  $\omega = A.k^\alpha$  où  $A$  et  $\alpha$  sont indépendants de  $k$ . Exprimer la vitesse de groupe en fonction de  $v_\phi$  et  $\alpha$ .

1) On peut écrire

$$v_g = \frac{d(v_\phi.k)}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = v_\phi + k \frac{d\lambda}{dk} \frac{dv_\phi}{d\lambda}$$

qui donne la formule de Rayleigh car  $\lambda = \frac{2.\pi}{k}$ , d'où  $k \frac{d\lambda}{dk} = k \frac{-2.\pi}{k^2} = -\lambda$ .

2) On peut faire la dérivée logarithmique de la relation de dispersion, et on trouve :

$$v_g = \alpha.v_\phi$$

**3. Créer un paquet d'ondes****3.19) Paquet d'onde à spectre rectangulaire**

Établir l'expression de l'amplitude du paquet d'ondes si le paquet d'ondes est à spectre rectangulaire :

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{A_0}{\Delta\omega} \text{ si } \omega \in \left[ \omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2} \right] \\ A(\omega) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Un signal physique non périodique représenté par une onde plane peut être mis sous la forme d'une superposition continue d'O.P.P.M, (un paquet d'ondes), son amplitude pouvant s'écrire :

$$\psi(x, t) = \Re \left( \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - k(\omega) \cdot x)} \cdot d\omega \right)$$

La répartition  $A(\omega)$  des amplitudes des composantes spectrales de l'onde définit son spectre. On supposera que la largeur spectrale  $\Delta\omega$  de ce paquet d'ondes est faible devant la pulsation « moyenne »  $\omega_m$  du paquet.

On notera  $v_g$  la vitesse de groupe correspondante.

On trouve :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot \text{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega}{2} \left( t - \frac{x}{v_g} \right) \right] \cdot \cos(\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)$$

### 3.20) Paquet d'onde à spectre gaussien

Établir l'expression de l'amplitude du paquet d'ondes si le paquet d'ondes est à spectre gaussien :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \Delta\omega}} e^{-\frac{(\omega - \omega_m)^2}{2 \cdot \Delta\omega^2}}$$

On donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \cdot x^2 + j \cdot \beta \cdot x} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4 \cdot \alpha^2}}$$

pour tout réel  $\beta$  et tout complexe  $\alpha$  d'argument compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $+\frac{\pi}{4}$ .

Un signal physique non périodique représenté par une onde plane peut être mis sous la forme d'une superposition continue d'O.P.P.M, (un paquet d'ondes), son amplitude pouvant s'écrire :

$$\psi(x, t) = \Re \left( \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - k(\omega) \cdot x)} \cdot d\omega \right)$$

La répartition  $A(\omega)$  des amplitudes des composantes spectrales de l'onde définit son spectre. On supposera que la largeur spectrale  $\Delta\omega$  de ce paquet d'ondes est faible devant la pulsation « moyenne »  $\omega_m$  du paquet.

On notera  $v_g$  la vitesse de groupe correspondante.

On trouve :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot e^{-\frac{(\Delta\omega)^2}{2} \left( t - \frac{x}{v_g} \right)^2} \cdot \cos(\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)$$

### 3.21) Interférence d'un paquet d'onde

On s'intéresse à un paquet d'onde de largeur spectrale  $\Delta\omega$ , faible devant la pulsation « moyenne »  $\omega_m$  du paquet.

1) Calculer l'amplitude du paquet d'ondes suivant :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{n=+\frac{N-1}{2}} A_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t - k_n \cdot x)$$

où  $\omega_n = \omega_m + \frac{n}{N} \Delta\omega$ . On supposera pour simplifier les calculs que  $N$  est impair.

2) Quelle durée caractéristique  $\Delta t$  peut être attribuée aux bouffées d'ondes de ce paquet ? Commenter sa dépendance vis-à-vis de sa largeur spectrale  $\Delta\omega$ .

1) On peut changer  $\psi(x, t)$  en :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot \Re \left( e^{j \cdot (\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{n=+\frac{N-1}{2}} e^{j \cdot \frac{n}{N} \Delta\omega \cdot \left( t - \frac{x}{v_g} \right)} \right)$$

Il s'agit ensuite de calculer la série géométrique. On trouve pour finir :

$$\psi(x, t) = A_0 \cdot \frac{\sin \left[ \frac{\Delta\omega}{2} \left( t - \frac{x}{v_g} \right) \right]}{\sin \left[ \frac{\Delta\omega}{2 \cdot N} \left( t - \frac{x}{v_g} \right) \right]} \cdot \cos(\omega_m \cdot t - k_m \cdot x)$$

- 2) On peut associer à chaque " bouffée " du paquet d'ondes une durée

$$\Delta t \approx \frac{1}{\Delta \omega}$$

d'autant plus courte que la largeur spectrale est étendue.

#### 4. Techniques mathématiques - Intégration d'équations aux dérivées partielles

##### 4.22) Détermination de solution de l'équation de D'Alembert par séparation des variables

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions  $\psi(x, t)$  à l'EDP  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  pour le domaine de définition  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

- 1)  $\psi(x, t) = F(x).G(t)$  vérifie :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , qui devient

$$F''(x).G(t) = \frac{1}{c_0^2} F(x).G''(t) \Leftrightarrow c_0^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de  $x$ , le second que de  $t$  : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera  $-\omega^2$ . On trouve la solution de  $\frac{G''(t)}{G(t)} = -\omega^2$  :  $G(t) = G_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_G)$ . De même, la solution de  $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega^2}{c_0^2}$  est :  $F(x) = F_0 \cos\left(\frac{\omega}{c_0}x + \varphi_F\right)$ .

On peut donc réécrire

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi_F) \cos(\omega t + \varphi_G)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$ .

##### 4.23) Détermination de solution de l'équation de diffusion par séparation des variables

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions  $\psi(x, t)$  à l'EDP  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \psi}{\partial t}$  pour le domaine de définition  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

- 1)  $\psi(x, t) = F(x).G(t)$  vérifie :  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , qui devient

$$F''(x).G(t) = \frac{1}{D} F(x).G'(t) \Leftrightarrow D \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} = cste$$

en effet, le premier terme ne dépend que de  $x$ , le second que de  $t$  : il ne peut s'agir que d'une constante. Si cette constante est positive, les fonctions sont exponentielles, et divergent à l'infini : ce n'est pas acceptable. Aussi, cette constante est négative, et on la notera  $-\omega$ . On trouve la solution de  $\frac{G'(t)}{G(t)} = -\omega$  :  $G(t) = G_0 e^{-\omega t}$ . De même, la solution de  $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\omega}{D}$  est :  $F(x) = F_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}x + \varphi_F\right)$ .

On peut donc réécrire

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-\omega t} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}}x + \varphi\right)$$

##### 4.24) Détermination de solution de l'équation de Laplace en polaire par séparation des variables

- 1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions  $\psi(r, \theta)$  à l'EDP

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

pour le domaine de définition  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in [0; 2\pi]$ .

1)  $\psi(r, \theta) = F(r).G(\theta)$  vérifie :

$$\frac{G(\theta)}{r} \frac{d}{d\theta} (r F'(r)) + \frac{F(r)}{r^2} \frac{d^2 G}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow -\frac{G''}{G} = +\frac{r}{F} \frac{d}{dr} (r F'(r)) = cste = K$$

en effet, le premier terme ne dépend que de  $\theta$ , le second que de  $r$  : il ne peut s'agir que d'une constante.

$$G'' + K G = 0$$

Si cette constante est négative, les fonctions sont exponentielles, et ne peuvent être  $2\pi$ -périodiques : ce n'est pas acceptable. Donc

$$G(\theta) = A \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi)$$

avec  $\sqrt{K} \in \mathbb{N}$ . D'autre part,

$$\frac{d}{dr} (r F'(r)) = F'(r) + r F'' = K \frac{F}{r} \Rightarrow r^2 F'' + r F' - K F = 0$$

On note que  $F = cste$  est solution. On peut aussi chercher des solutions sous la forme  $F(r) = B r^n$  :

$$\Rightarrow n(n-1) + n - K = 0 \Rightarrow n^2 = K \Rightarrow n = \pm\sqrt{K}$$

Soit :  $\psi = C e^{-\sqrt{K}r} \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi) + C' e^{+\sqrt{K}r} \cos(\sqrt{K}\theta + \varphi)$ . NB : les solutions en  $e^{+\sqrt{K}r}$  divergent à l'infini, on ne garde que :  $\psi = C e^{-\alpha r} \cos(\alpha\theta + \varphi)$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

#### 4.25) Détermination de solution de l'équation de D'Alembert grâce aux complexes

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions  $\psi(x, t)$  à l'EDP

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

pour le domaine de définition  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

1) On pose  $\psi(x, t) = \Re(\tilde{\psi})(x, t)$  avec  $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)}$  et on remplace dans l'EDP :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -\omega^2 = -c^2 \tilde{k}^2$$

On pose donc  $\tilde{k} = k_r + j k_i$ , qui donne dans la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2 (k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 - k_i^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \text{ et } k_r k_i = 0$$

Donc :

- soit  $k_r = 0$ , et la première équation devient  $-k_i^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ , ce qui est impossible,

- soit  $k_i = 0$ , et la première équation devient  $k_r^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ , ce qui est possible :  $k_r = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right)$

Aussi, on trouve :

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)} = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t \pm (\frac{\omega}{c})x)}$$

soit la superposition de deux types de solutions :

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t + (\frac{\omega}{c})x)} + A' e^{j\varphi'} e^{-j(\omega t - (\frac{\omega}{c})x)}$$

qu'on doit réécrire

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{-j(\omega t + (\frac{\omega}{c})x - \varphi)} + A' e^{-j(\omega t - (\frac{\omega}{c})x - \varphi')}$$

pour passer à la partie réelle :

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t + \left(\frac{\omega}{c}\right)x - \varphi\right) + A' \cos\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right)x - \varphi'\right)$$

#### 4.26) Détermination de solution de l'équation de diffusion grâce aux complexes

1) Chercher, par la méthode de séparation des variables, des solutions  $\psi(x, t)$  à l'EDP

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

pour le domaine de définition  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1) On pose  $\psi(x, t) = \Re(\tilde{\psi})(x, t)$  avec  $\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)}$  et on remplace dans l'EDP :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \Rightarrow -j\omega = -D \tilde{k}^2$$

On pose donc  $\tilde{k} = k_r + j k_i$ , qui donne dans la relation de dispersion :

$$j\omega = D(k_r^2 - k_i^2 + 2j k_r k_i)$$

c'est-à-dire deux équations réelles :

$$k_r^2 = k_i^2 \text{ et } k_r k_i = \frac{\omega}{2D}$$

Donc :

- soit  $k_r = -k_i$ , et la seconde équation devient  $-k_r^2 = \frac{\omega}{2D}$ , ce qui est impossible,

- soit  $k_r = +k_i$ , et la seconde équation devient  $k_r^2 = \frac{\omega}{2D}$ , ce qui est possible :  $k_r = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

Aussi, on trouve :

$$\tilde{\psi}(x, t) = \tilde{A} e^{-j(\omega t - \tilde{k}x)} = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x \pm j \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x)}$$

soit la superposition de deux types de solutions :

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{j\varphi} e^{-j(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x + j \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x)} + A' e^{j\varphi'} e^{-j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - j \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x)}$$

qu'on doit réécrire

$$\tilde{\psi}(x, t) = A e^{-j(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - \varphi)} e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} + A' e^{-j(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - \varphi')} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x}$$

pour passer à la partie réelle :

$$\psi(x, t) = A e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} \cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - \varphi\right) + A' e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - \varphi'\right)$$

Le premier type de solution divergeant à l'infini, il reste :

$$\psi(x, t) = C e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} x - \alpha\right).$$

# Travaux dirigés

vendredi 1er décembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## Le câble coaxial

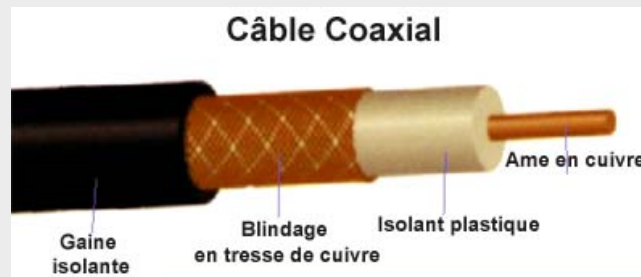
Site tunisien "Centre national de l'informatique pour l'enfant"  
disponible à l'adresse <http://www.cnipe.nat.tn>

### Un câble pour transporter les signaux de télévision et les données informatiques

Le câble coaxial (en anglais coaxial cable) a longtemps été le câblage de prédilection, pour la simple raison qu'il est peu coûteux et facilement manipulable (poids, flexibilité, ...).

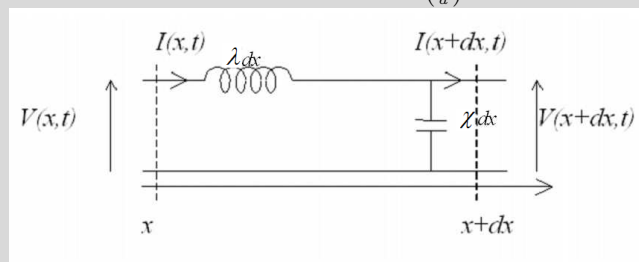
Un câble coaxial est constitué d'une partie centrale (appelée âme), c'est-à-dire un fil de cuivre, enveloppé dans un isolant, puis d'un blindage métallique tressé et enfin d'une gaine extérieure.

- La gaine isolante permet de protéger le câble de l'environnement extérieur. Elle est habituellement en caoutchouc (parfois en chlorure de polyvinyle (PVC), éventuellement en téflon).
- Le blindage en tresse de cuivre (enveloppe métallique) entourant les câbles permet de protéger les données transmises sur le support des parasites (autrement appelé bruit) pouvant causer une distorsion des données.
- L'isolant plastique entourant la partie centrale est constitué d'un matériau diélectrique permettant d'éviter tout contact avec le blindage, provoquant des interactions électriques (court-circuit).
- L'âme en cuivre, accomplissant la tâche de transport des données, est généralement composée d'un seul brin en cuivre ou de plusieurs brins torsadés.



### Enoncé

Un élément de longueur  $dx$  d'un câble coaxial dont la gaine isolante, qui est comprise entre les rayons  $a$  et  $b$ , a une permittivité relative  $\epsilon_r = 2,25$ , a pour capacité  $\chi dx = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\ln(\frac{b}{a})} dx$  et pour inductance  $\lambda dx = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{b}{a}) dx$ .



1) Déterminer la célérité  $c_0$  des ondes électriques qui se propagent dans ce câble coaxial et la comparer à celle de la lumière dans le vide.

## Correction

1) On fait l'étude électrocinétique du petit élément de longueur  $dx$  qui présente une inductance  $\lambda \cdot dx$  et une capacité  $\chi \cdot dx$ . Une loi des mailles donne :  $\lambda \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = -V(x+dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$ . La loi des nœuds donne :  $I(x, t) - I(x+dx, t) = \chi \cdot dx \frac{\partial V(x+dx, t)}{\partial t}$  soit  $-\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx \chi \cdot dx \frac{\partial V}{\partial t}$ . Cela nous amène à deux équations couplées :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -\chi \frac{\partial V}{\partial t}$$

On découple les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. Ainsi, en dérivant par rapport à  $x$  la première et par rapport à  $t$  la seconde, on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lambda \cdot \chi \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant par rapport à  $x$  la seconde équation et par rapport à  $t$  la première, on trouve :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \lambda \cdot \chi \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

D'où une célérité

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \approx 0,67 c = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide.



# Devoir non surveillé

vendredi 1ier décembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## Dépasser la vitesse de la lumière

par Alain Haché

*La Recherche n° 360 daté janvier 2003 à la page 52*

**Des impulsions lumineuses qui se déplacent plus vite que la lumière : abus de langage ou science-fiction ? Ni l'un ni l'autre, le phénomène est bien réel. Il est même très général : des impulsions électriques peuvent aussi se propager plus vite que la lumière, sur plusieurs centaines de mètres, et dans des fils tout à fait ordinaires.**

La théorie de la relativité restreinte a été proposée en 1905 par Albert Einstein. Une conséquence directe de cette théorie est qu'aucun objet possédant une masse ne peut se déplacer plus vite que la lumière. On en déduit toutefois un peu rapidement que  $c$  est la vitesse limite dans notre Univers. Rien vraiment ne pourrait-il aller plus vite ? Pas tout à fait. Au milieu du XXe siècle, les physiciens Léon Brillouin et Arnold Sommerfeld ont calculé les premiers que, dans certaines conditions, une impulsion lumineuse pourrait se déplacer plus vite que  $c$ . L'onde électromagnétique deviendrait alors «supraluminique».

Il n'y a pas là de contradiction avec le postulat d'Einstein. Celui-ci interdit seulement qu'une onde transporte de l'énergie ou de l'information plus vite que la lumière. Mais une impulsion de durée limitée, ou un signal modulé quelconque, possède deux vitesses : la vitesse de phase et la vitesse de groupe. En outre, la propagation supraluminique ne devait pas avoir lieu dans le vide, mais dans des milieux matériels particuliers, dont l'indice de réfraction décroît lorsque la fréquence de l'onde augmente. On parle de milieux ayant une dispersion anormale.

Récemment, nous avons poussé le concept encore plus loin, en démontrant que l'effet supraluminique existe pour un type d'onde aussi quotidien que la lumière, mais de nature un peu différente : le signal électrique. C'est d'autant plus paradoxal en apparence que les ondes électriques sont transportées par les mouvements des électrons, auxquels leur masse interdit d'espérer se déplacer aussi vite que  $c$ .

Nous avons donc étudié la propagation de signaux électriques dans un fil ayant une propriété de conduction périodique. Pour ce faire, nous avons utilisé des fils métalliques coaxiaux, du même type que les câbles qui relient votre téléviseur à son antenne. Ils sont constitués d'un fil central entouré d'un matériau isolant, qui le sépare d'un autre fil, creux, enveloppant l'ensemble. Le signal est transmis en appliquant une tension entre le fil central et l'enveloppe. Cette configuration particulière rend le câble moins sensible aux champs électriques et magnétiques externes. Chaque fil coaxial est caractérisé par une impédance, qui dépend principalement de sa géométrie diamètre, épaisseur, *etc* et qui est analogue à l'indice de réfraction des matériaux optiques : une onde électrique est partiellement réfléchi lorsqu'elle passe d'un fil à un autre d'impédance différente.

N'importe quel technicien en électronique vous dira que de telles réflexions sont nuisibles, et qu'il convient de les éviter en s'assurant que l'impédance de l'émetteur, du fil transmetteur et du récepteur sont identiques. Pour la propagation supraluminique des signaux électriques, au contraire, elles sont indispensables. Lorsque plusieurs segments d'impédance alternante sont raccordés à la suite les uns des autres, les parties réfléchies et transmises du signal interfèrent l'une avec l'autre de la même manière que la lumière dans un cristal photonique. Nous avons calculé que, théoriquement, cela peut mener à des vitesses de groupe supérieures à  $c$ .

Pour tester cette hypothèse, nous avons étudié la propagation d'impulsions électriques dans un câble coaxial de plus de 150 mètres de long, fabriqué par l'alternance de deux types de câbles, de même longueur environ 5 mètres mais d'impédance différente. Pour des segments de cette longueur, la bande interdite est située autour de 10 mégahertz. L'entrée et la sortie du câble étaient reliées à un même oscilloscope, ce qui permettait de mesurer facilement l'écart temporel entre les sommets de l'impulsion d'entrée et celle de sortie [fig. 1]. En accord avec nos prédictions théoriques, l'enveloppe du signal se propage jusqu'à trois fois la vitesse de la lumière !

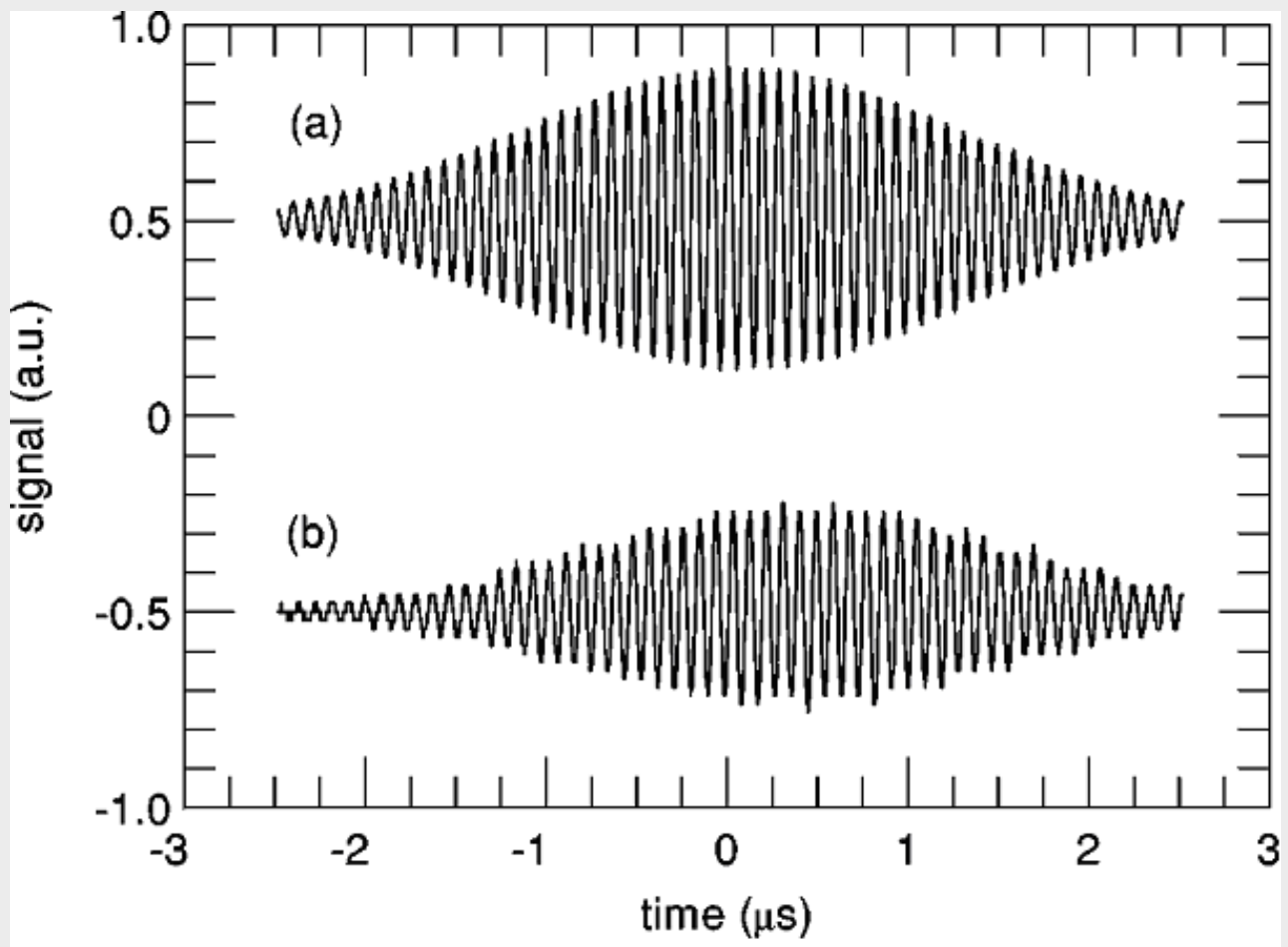


Figure 1 - (a) : onde envoyée et (b) : reçue

C'est la première fois qu'un signal quelconque est observé à des vitesses supérieures à  $c$  sur une distance aussi grande. Plus important encore, c'est la première fois qu'un effet supraluminique est observé dans une structure aussi simple qu'un fil électrique que l'on peut acheter chez n'importe quel fournisseur de matériel électronique.

### La physique respectée

La réalisation de l'expérience n'est toutefois pas aussi simple qu'il y paraît. Comme les vitesses de groupe les plus grandes s'observent [fig. 2] aux fréquences qui sont au centre de la bande interdite, là où la majeure partie du signal est réfléchi jusqu'à 98 % dans notre cas, le signal transmis est souvent très faible et difficile à analyser. Comme dans toutes les expériences similaires, l'effet supraluminique est obtenu au prix d'une transmission réduite du signal [fig. 3].

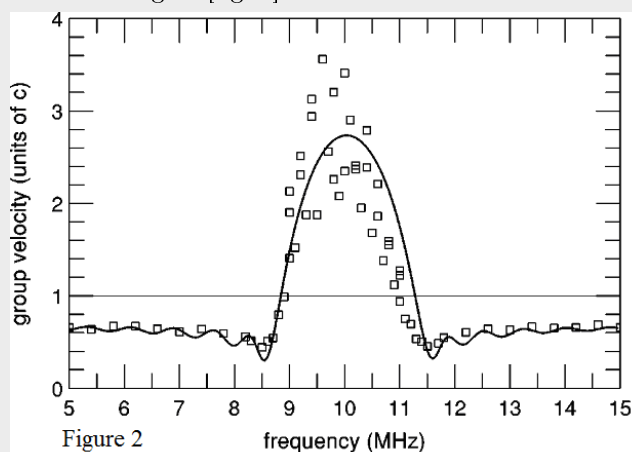


Figure 2

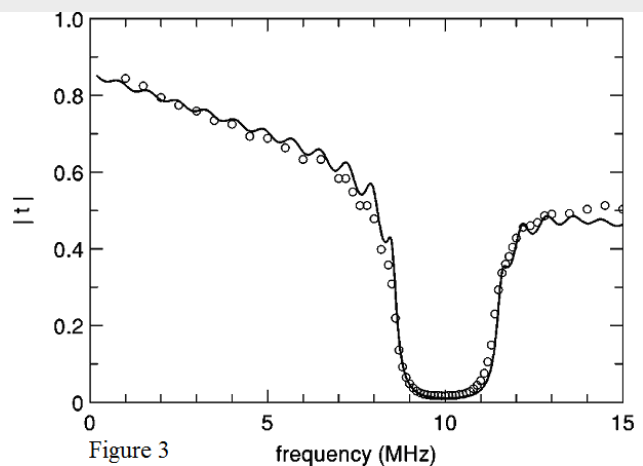


Figure 3

Aurions-nous inventé la télécommunication supraluminique par câble? La perspective de transmettre des informations trois fois plus vite que la lumière est tentante. Hélas, le temps de transmission d'un bit d'information doit être calculé à partir du moment où nous commençons à produire et à transmettre le signal, par exemple sous la forme d'une impulsion. Dans notre expérience, le signal a la forme d'une cloche et dure environ un millionième de seconde. Le signal commence donc à être émis bien avant son maximum sommet. Or, le temps entre le début du signal émis et le sommet de l'impulsion de sortie est suffisamment long pour que l'information véhiculée soit plus lente que  $c$ . Si, pour contourner ce problème, nous réduisons la durée de l'impulsion, une autre difficulté surgit : lorsque la longueur de l'impulsion est plus courte que les segments de câbles individuels, elle se brise en deux morceaux distincts à chaque fois qu'elle passe d'un segment coaxial à un autre. Le résultat est un signal de sortie distordu et, surtout, plus lent que  $c$ . En résumé, même si le sommet de l'impulsion électrique est supraluminique, nous ne pouvons pas l'utiliser pour envoyer de l'information utile à une vitesse supérieure à  $c$ .

Nous n'avons pas violé le principe de causalité d'Einstein, selon lequel dans tout événement physique, la cause doit précéder l'effet il reste impossible de ressentir la piqûre d'un moustique avant qu'il nous pique! Et, comme une partie du signal est réfléchi et revient à l'émetteur, l'énergie transmise par le fil est en tout temps inférieure à ce qui arriverait à l'autre bout si l'impulsion voyageait dans l'air ou le vide. L'énergie du signal n'est donc pas supraluminique, ce qui satisfait la relativité restreinte.

Ces résultats ne sont toutefois pas dénués d'utilité pratique. Au contraire, cette technique pourrait un jour accélérer les signaux électroniques transmis, par exemple, dans une puce d'ordinateur. Dans un fil conducteur uniforme, un signal électrique voyage toujours à une fraction de la vitesse de la lumière  $2/3c$  dans le cas d'un fil coaxial ordinaire. En modulant dans l'espace l'impédance d'un circuit, par exemple en ajoutant une texture aux fils conducteurs, on pourrait accélérer la transmission de l'information jusqu'à la limite théorique, c'est-à-dire  $c$ . Nous recherchons actuellement si cette limite est atteignable en pratique. À condition de disposer de circuits électroniques insensibles aux signaux réfléchis et capables de détecter de faibles signaux transmis, nous améliorerions ainsi, par exemple, la synchronisation rapide de signaux.

## Enoncé

### 1) Vitesses de l'onde

**1.a)** En dehors de la zone de fréquences "de la bande interdite, là où la majeure partie du signal est réfléchi jusqu'à 98 %", estimer une valeur (à peu près constante) de la vitesse de groupe d'après la figure 2. Est-ce cohérent avec ce qui est déclaré dans le texte? Montrer que pour ces fréquences, la vitesse de phase peut être la même.

**1.b)** Recopier l'allure de la figure 1, et y faire figurer ce qui permet de déterminer une vitesse relative à l'onde dont parle le document. Calculer numériquement cette vitesse.

### 2) Dispositif

**2.a)** On s'intéresse à un câble coaxial (selon l'axe  $x$ ), sans pertes. Donner son équivalent électrique à constantes réparties et montrer que l'équation d'onde est celle de D'Alembert. Quelle est donc la vitesse qui apparaît dans cette équation?

**2.b)** On s'intéresse enfin à une portion de câble coaxial d'environ 5 mètres entre les abscisses  $x = x_1$  et  $x = x_2$ . Comme "les parties réfléchies et transmises du signal interfèrent l'une avec l'autre" en  $x = x_1$  et  $x = x_2$ , la tension sera supposée nulle en ces positions. Quelle doit-être la forme de l'onde adaptée à un tel dispositif? Montrer qu'alors la fréquence est fixée, et la comparer à celle donnée dans le document.

## Correction

### 1) Vitesses de l'onde

**1.a)** En dehors de la zone de fréquences "de la bande interdite, là où la majeure partie du signal est réfléchi jusqu'à 98 %", la vitesse de groupe d'après la figure 2 est à peu près  $\frac{3}{5}c = 0,6c$ . Dans le texte on trouve la phrase suivante : "dans un fil conducteur uniforme, un signal électrique voyage toujours à une fraction de la vitesse de la lumière  $\frac{2}{3}c$  (soit  $0,67c$ ) dans le cas d'un fil coaxial ordinaire." C'est donc cohérent.

Si on suppose que la vitesse de phase est la même :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2}{3}c$ , alors  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2}{3}c$  : ça marche (le milieu est non dispersif à ces fréquences).

### 1.b)

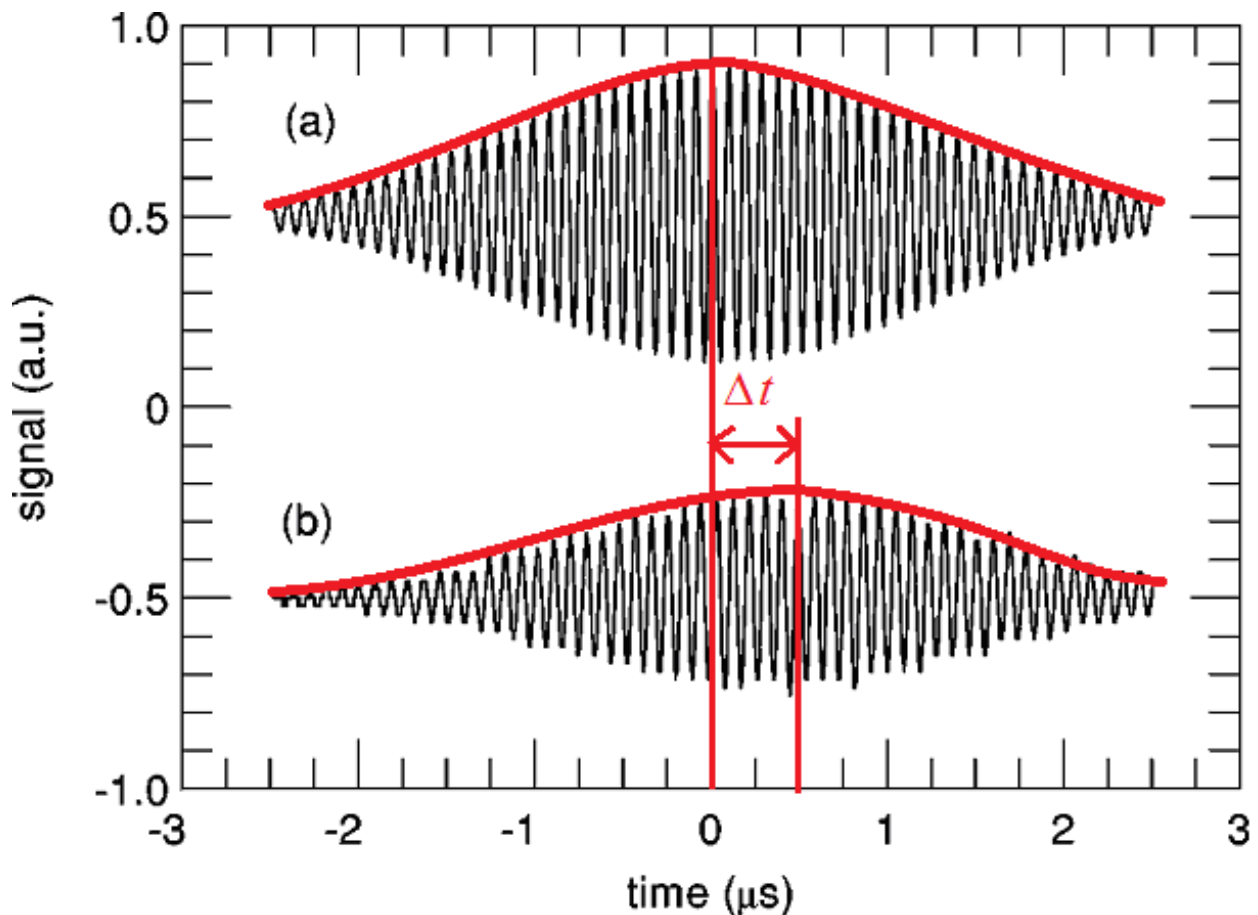


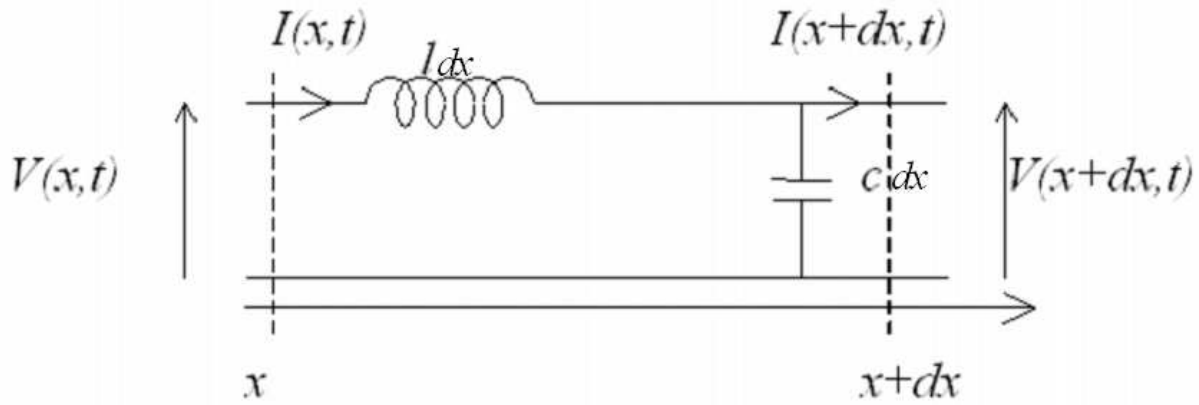
Figure 1 - (a) : onde envoyée et (b) : reçue

$\Delta t$  permet de déterminer une vitesse relative à l'onde dont parle le document : c'est la vitesse de déplacement du sommet du paquet d'onde, donc

$$v_g = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{150}{0,5 \times 10^{-6}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 2) Dispositif

#### 2.a)



En électrocinétique (dans l'ARQS), on néglige la propagation des grandeurs électriques : tension et intensité ne dépendent que du temps. Aussi les éléments du circuit (dipôles) sont des constantes localisées : on notera l'inductance propre par unité de longueur  $l$  et la capacité propre par unité de longueur  $c$ .

Une loi des mailles donne :

$$l \cdot dx \cdot \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -V(x + dx, t) + V(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx$$

La loi des nœuds donne :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = c \cdot dx \cdot \frac{\partial V(x + dx, t)}{\partial t} \text{ soit } -\frac{\partial I}{\partial x} dx \approx c \cdot dx \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

L'étude électrocinétique du petit élément de longueur  $dx$  qui présente une inductance  $l \cdot dx$  et une capacité  $c \cdot dx$  nous amène à deux équations couplées :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -c \frac{\partial V}{\partial t}$$

On découplera les précédentes équations en les dérivant, les dérivations par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  commutant. Ainsi, en dérivant par rapport à  $x$  la première et par rapport à  $t$  la seconde, on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant par rapport à  $x$  la seconde équation et par rapport à  $t$  la première, on trouve :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = l \cdot c \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ainsi, tension  $V$  et intensité  $I$  vérifient ainsi la même équation de propagation, celle de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

avec la célérité  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$  qui est la vitesse de phase  $v_\varphi$ .

**2.b)** Comme "les parties réfléchies et transmises du signal interfèrent l'une avec l'autre" en  $x = x_1$  et  $x = x_2$ , la tension sera supposée nulle en ces positions : il y a un nœud de tension en ces positions.

La forme de l'onde adaptée à un tel dispositif est donc l'onde stationnaire :

$$V = V_0 \cos(\omega t + \varphi_F) \cos(kx + \varphi_G)$$

avec

$$\begin{cases} \cos(kx_1 + \varphi_G) = 0 \\ \cos(kx_2 + \varphi_G) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx_1 + \varphi_G = \frac{\pi}{2} + n_1 \pi \\ kx_2 + \varphi_G = \frac{\pi}{2} + n_2 \pi \end{cases} \Rightarrow k(x_2 - x_1) = n\pi$$

où  $n$  est entier, ce qui donne

$$x_2 - x_1 = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{v_\varphi}{2\nu}$$

Donc la fréquence est fixée : pour  $n = 1$ , on trouve

$$\nu = \frac{\frac{2}{3}c}{2(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{2}{3}3 \times 10^8}{2 \times 5} = 20 \times 10^6 \text{ Hz}$$

alors que le texte parle de 10 mégahertz.