

Ondes électromagnétiques dans les milieux

Notes de cours

mardi 13 février 2018

I- Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

1. Plasma de conductivité imaginaire pure



Plasma localement neutre sans collisions de conductivité imaginaire pure *s'y retrouver*

un plasma est un milieu ionisé, constitué :

- d'ions positifs quasi-fixes ;
- d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e , de vitesse \vec{v}_e .

Le plasma est peu dense, de sorte qu'on pourra négliger les interactions entre les particules chargées.



1 Étude des électrons du plasma *exercice*

Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - k z)} \vec{u}_x$ existe dans le plasma.

- ▷ Montrer que la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .
- ▷ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la vitesse complexe d'un électron.
- ▷ En déduire la conductivité complexe du plasma.

▷ Comme le champ magnétique de l'onde est de norme $\|B\| = \frac{\|E\|}{c}$, la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .

▷ Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron est

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -j\omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E}$$

soit

$$\vec{v}_e = -j \frac{e}{\omega m_e} \vec{E}$$

▷ Comme

$$\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -n_e e \vec{v}_e = \gamma \vec{E}$$


on trouve conductivité du plasma :

$$\tilde{\gamma} = j \frac{n_e e^2}{\omega m_e}$$




Conductivité du plasma à retenir


Dans le cas d'un plasma, la conductivité est imaginaire pure : $\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$.
 ω_p est appelée pulsation plasma.

 **remarque**

On a trouvé pour une onde dont le complexe associé est $e^{-j(\omega t - k z)}$ une conductivité de partie imaginaire est positive, cette dernière aurait été négative pour une onde avec un complexe $e^{+j(\omega t - k z)}$.

 **Absence d'effet Joule dans le plasma** *s'y retrouver*

Puisque la conductivité est imaginaire pure, \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase. Ainsi, la puissance échangée par effet Joule est de moyenne nulle.

 **2 Équations de propagation et de dispersion dans un plasma** *exercice*

On admet que la conductivité complexe du plasma peut s'écrire $\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$.

- ▷ Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le plasma.
- ▷ En déduire la relation de dispersion.

▷ Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

qui devient d'après la loi d'Ohm :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \tilde{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

▷ On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j(\omega t - \tilde{k} z - \varphi)} \vec{u}$. En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\tilde{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} + \omega \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2}{\omega}$$

On trouve la relation de dispersion :

$$\tilde{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

qui est la relation de Klein Gordon.

 **3 Comportement du plasma vis-à-vis de l'onde** *théorème*

- Pour $\omega > \omega_p$, il existe une solution réelle à l'équation de Klein Gordon : $k = k_r$ donc

$$\vec{E} = \tilde{E}_0 e^{-j(\omega t - k_r z)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_r z + \varphi_0) \vec{u}_x$$

L'onde se propage sans atténuation (pas d'effet Joule).

- Pour $\omega < \omega_p$, la solution de l'équation de Klein Gordon est imaginaire pure $k = j k_i$, donc

$$\vec{E} = \tilde{E}_0 e^{-j(\omega t - j k_i z)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_i z} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_x$$

(c'est une onde évanescence).

⇒

- pour $\omega > \omega_p$, le plasma est transparent pour l'onde électromagnétique ;

- pour $\omega < \omega_p$, l'onde électromagnétique ne se propage pas dans le plasma (c'est une onde évanescente).



Application à la propagation à travers l'ionosphère *schéma*

La figure 1 représente l'ionosphère qui peut être considérée comme un plasma. Les ondes radio haute fréquence traversent l'ionosphère (communication avec les satellites). Mais les ondes basses fréquences s'y réfléchissent.

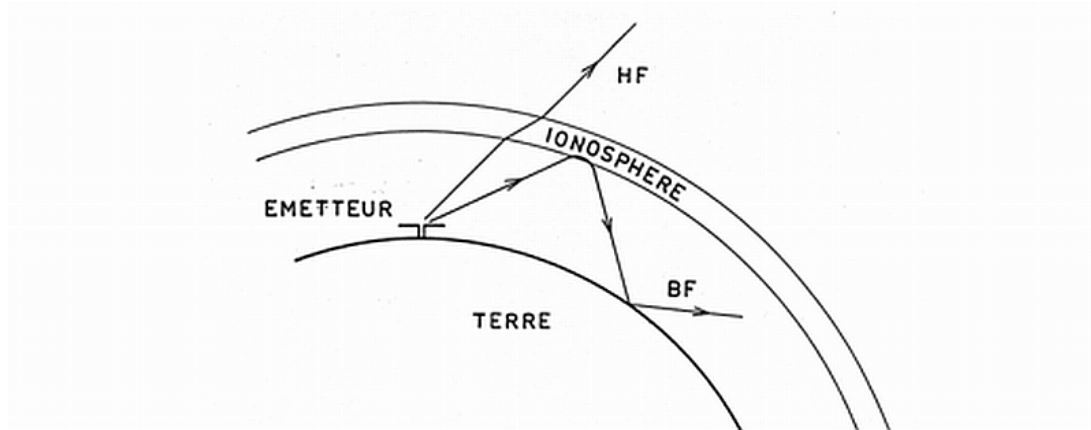


FIGURE 1 – Application à la propagation à travers l'ionosphère

2. Conducteur ohmique de conductivité réelle (à basse fréquence)



Conducteur ohmique dans l'ARQS *s'y retrouver*

un conducteur ohmique est un métal constitué :

- d'ions positifs quasi-fixes ;
- d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e , de vitesse \vec{v}_e .

Le métal est dense, de sorte que les interactions entre les particules chargées sont importantes.



Conductivité du conducteur ohmique *à retenir*

Dans le cas d'un métal à basses fréquences, on a déjà montré que la conductivité est réelle : $\tilde{\gamma} = \gamma_r$ avec $\gamma_r \in \mathbb{R}$.



4 Equations de propagation et de dispersion dans un conducteur ohmique

exercice

- ▷ Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le conducteur ohmique.
- ▷ En déduire la relation de dispersion.

▷ Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \tilde{\vec{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \cdot \tilde{\vec{j}})$$

f	50 Hz	10 kHz	1 MHz
δ	9 mm	0,7 mm	70 μm

TABLE 1 – Épaisseurs de peau dans le cas du cuivre

qui devient d’après la loi d’Ohm :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \cdot \tilde{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

qui est une équation de diffusion. \triangleright On s’intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$. En remplaçant dans l’équation de propagation, on trouve la relation de dispersion :

$$\tilde{k}^2 = j \omega \mu_0 \gamma_r$$

5 Comportement du conducteur ohmique vis-à-vis de l’onde *théorème*

En posant $j = e^{j \frac{\pi}{2}}$, l’équation de dispersion devient

$$\tilde{k}^2 = \omega \mu_0 \gamma_r e^{j \frac{\pi}{2}}$$

soit

$$\tilde{k} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_r} e^{j \frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_r} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma_r}{2}} (1 + j) = \pm \frac{1 + j}{\delta}$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma_r}}$.

On ne gardera que la solution positive qui correspond à la propagation vers les z croissants. Donc

$$\vec{E} = \tilde{E}_0 e^{-j(\omega t - (\frac{1+j}{\delta})z)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{u}_x$$

L’onde se propage avec atténuation (effet Joule). \Rightarrow

L’onde électromagnétique ne pénètre que sur une faible **épaisseur de peau** dans le conducteur ohmique : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma_r}}$.

Épaisseurs de peau dans le cas du cuivre *tableau*

Le tableau 1 présente les différentes valeurs de l’épaisseur de peau dans le cas du cuivre, en fonction de la fréquence.

Effet de peau *s’y retrouver*

L’effet de peau ou effet pelliculaire (ou plus rarement effet Kelvin) est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à ne circuler qu’en surface des conducteurs. Ce phénomène d’origine électromagnétique existe pour tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs.

Il provoque la décroissance de la densité de courant à mesure que l’on s’éloigne de la périphérie du conducteur. Il en résulte une augmentation de la résistance du conducteur.

Cet effet peut être utilisé pour alléger le poids des lignes de transmission à haute fréquence en utilisant des conducteurs tubulaires, ou même des tuyaux, sans perte de courant.



Conducteur parfait *définition*

On pourra considérer qu'un conducteur est parfait si les ondes électromagnétiques ne pénètrent quasiment pas dans le matériau, c'est-à-dire si

$$\gamma \rightarrow \infty \Leftrightarrow \delta \ll \lambda$$

3. Propagation dans les conducteurs dans le cas général : conductivité complexe



6 Étude mécanique de l'électron dans un métal réel *exercice*

On s'intéresse à un électron de charge q , de masse m supposé ponctuel qui ressent :

- une force de frottement fluide $-f \cdot \dot{r} \cdot \vec{u}_r$ (très faible, due à l'interaction avec les ions du réseau métallique) ;
- la force de Lorentz due au champ électrique extérieur variable $q \cdot \vec{E}_{ext}(z, t)$.

En effet, une onde électromagnétique polarisée rectilignement impose

$$\vec{E}_{ext}(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) \vec{u}_x$$

▷ En posant le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{f}$ montrer que la densité volumique de courant complexe \tilde{j} est de la forme

$$\tilde{j} = \tilde{\gamma}(\omega) \cdot \tilde{E} \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j \cdot \tau \cdot \omega}$$

▷ Montrer que les charges relaxent sur un temps caractéristique θ .

▷ Le principe fondamental de la dynamique donne, projeté suivant \vec{u}_x :

$$m \cdot \ddot{x} = -f \cdot \dot{x} + q \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - kz)$$

Pour résoudre cette équation, on cherche les solutions sous forme complexe : $x = \Re(\tilde{x})$ avec $\tilde{x} = x_0 \cdot e^{j(kz - \omega \cdot t + \varphi)}$:

$$m \cdot (-j \cdot \omega)^2 \cdot \tilde{x} + f \cdot (-j \cdot \omega) \cdot \tilde{x} = q \cdot E_0 e^{-j \cdot (\omega \cdot t - kz)}$$

On trouve donc comme vitesse complexe de la particule chargée

$$\tilde{v} = -j \cdot \omega \cdot \tilde{x} \vec{u}_x = \frac{q \cdot E_0 e^{-j \cdot (\omega \cdot t - kz)}}{-j \cdot m \cdot \omega + f} \vec{u}_x$$

On en déduit la densité volumique de courant :

$$\tilde{j} = n \cdot q \cdot \tilde{v} = \frac{n \cdot q^2}{-j \cdot m \cdot \omega + f} \tilde{E} = \frac{\frac{n \cdot q^2}{f}}{1 - j \cdot \frac{m}{f} \omega} \tilde{E}$$

où n est la densité volumique des électrons. En posant le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{f}$ et la conductivité en basse fréquence $\gamma_0 = \frac{n \cdot q^2}{f}$, on arrive à

$$\tilde{j} = \tilde{\gamma}(\omega) \cdot \tilde{E} \quad \text{avec} \quad \tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j \cdot \tau \cdot \omega}$$

▷ L'équation locale de conservation de la charge est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Si la loi d'Ohm s'applique (c'est à dire pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$), $\vec{j} = \gamma_0 \cdot \vec{E}$ et la conservation de la charge devient

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \cdot \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

d'après l'équation de Maxwell Gauss. L'équation de conservation de la charge donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Aussi, on peut poser le temps caractéristique

$$\theta = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0}$$

On peut donc voir que les charges relaxent ($\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$) sur un temps caractéristique θ .



Conductivité d'un métal réel à retenir

Pour un métal, la conductivité est complexe :

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 - j\tau\omega} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\frac{1}{\tau} - j\omega}$$



Pulsations caractéristiques : s'y retrouver

Il existe trois pulsations caractéristiques $\frac{1}{\tau} < \omega_p < \frac{1}{\theta}$ car la pulsation plasma est définie comme la moyenne arithmétique des deux précédentes

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{1}{\theta}} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau \cdot \epsilon_0}}$$



Exemple d'ordres de grandeur pour ces trois pulsations caractéristiques dans le cas de l'aluminium. *tableau*

Le tableau 2 présente un exemple d'ordres de grandeur pour ces trois pulsations caractéristiques.

$\frac{1}{\tau}$	ω_p	$\frac{1}{\theta}$
$10^{14} Hz$	$2 \cdot 10^{16} Hz$	$10^{18} Hz$

TABLE 2 – Ordres de grandeur pour les trois pulsations caractéristiques dans le cas de l'aluminium.



7 Équations de propagation et de dispersion dans un métal *exercice*

- ▷ Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le métal.
- ▷ En déduire la relation de dispersion.

▷ Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{E}) = -\overrightarrow{rot} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \tilde{\vec{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right)$$

qui devient d'après la loi d'Ohm :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}$$

▷ On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k}z - \varphi)} \vec{u}$.
En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\tilde{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} - j\omega \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2 \cdot \tau}{1 - j \cdot \omega \cdot \tau} \Rightarrow$$

On trouve la relation de dispersion :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$



Comportements du conducteur réel vis à vis de l'onde s'y retrouver

- si $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes hertziennes), l'onde est **amortie** avec l'épaisseur de peau $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}}$,
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes visibles), l'onde ne se propage pas et est amortie : il s'agit d'une **onde évanescente**. Le corollaire est une réflexion totale de l'onde incidente sur le métal,
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ (c'est le cas à partir du domaine UV), il y a **propagation avec dispersion, mais sans absorption**,
- si $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ (c'est le cas pour les rayonnements X), il y a **propagation sans dispersion ni absorption**, comme dans le vide.



le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence. *schéma*

La figure 2 représente le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence. Dans le cas de la ionosphère (partie supérieure de l'atmosphère), un plasma assimilable à un métal, avec une pulsation plasma $\omega_p \sim 10MHz$, on distinguera

- les grandes ondes (pour lesquelles $\omega \ll \omega_p$) qui se réfléchissent sur la ionosphère
- les ondes courtes, FM TV ou satellite (pour lesquelles $\omega \gg \omega_p$) pour qui la ionosphère est transparente.

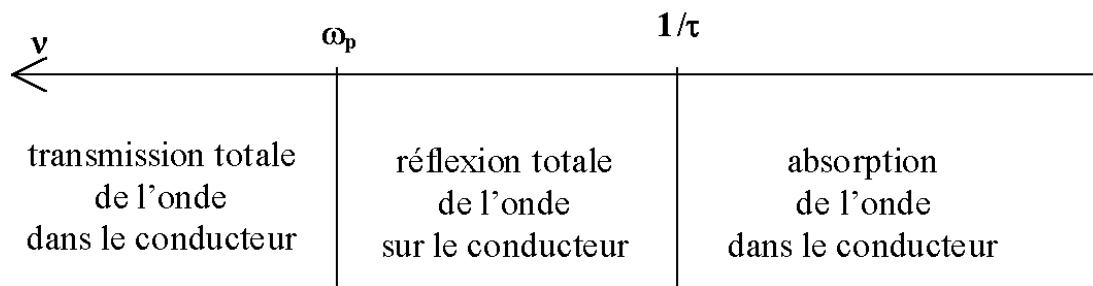


FIGURE 2 – le comportement d'un conducteur réel vis à vis d'une OPPM en fonction de la fréquence.

II- Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu d'indice complexe

1. Milieu DLHI d'indice complexe



Milieu DLHI s'y retrouver

Le milieu est DLHI, c'est à dire

- diélectrique : non conducteur, sans charges ;
- linéaire : l'effet (\vec{p}) est proportionnel à la cause (\vec{E}) ;
- homogène : le facteur de proportionnalité ne dépend pas de l'endroit où l'on se trouve dans le milieu ;
- isotrope : ce facteur de proportionnalité est le même dans toutes les directions.



8 Des équations de Maxwell à l'équation de D'Alembert dans un milieu diélectrique *exercice*

- ▷ Réécrire les équations de Maxwell pour les champs complexes associés dans le milieu diélectrique, en remplaçant ε_0 par $\tilde{\varepsilon}_r \varepsilon_0$, les charges et courants étant nuls.
- ▷ Démontrer l'équation de d'Alembert pour le champ électrique.
- ▷ Démontrer l'équation de d'Alembert pour le champ magnétique.

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{z} - \varphi)} \vec{u}$.

- ▷ Trouver la relation de dispersion.

▷ Maxwell flux : $\text{div} \tilde{\vec{B}} = 0$;

Maxwell Faraday : $\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{E}} = -\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t}$;

Maxwell Ampère : $\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon}_r \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}$;

Maxwell Gauss : $\text{div} (\tilde{\vec{E}}) = 0$.

▷ le laplacien vectoriel du champ électrique complexe est

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \tilde{\vec{E}}) - \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{E}}) = -\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{E}}) \text{ d'après Maxwell Gauss}$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{\vec{E}} = -\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{E}}) = -\vec{\text{rot}} \left(\frac{-\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}}) \text{ d'après Maxwell Faraday}$$

$$\text{Maxwell Ampère} \Rightarrow \Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

▷ le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \tilde{\vec{B}} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \tilde{\vec{B}}) - \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}}) = -\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}}) \text{ d'après Maxwell flux}$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{\vec{B}} = -\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{B}}) = -\vec{\text{rot}} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right) \text{ d'après Maxwell Ampère}$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{\vec{B}} = -\frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \tilde{\vec{E}}) = -\frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t} \right) \text{ d'après Maxwell Faraday}$$

Donc

$$\Delta \tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{\varepsilon}_r}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{B}}}{\partial t^2}$$

▷ en remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\tilde{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_r \Rightarrow \tilde{k}^2 = \tilde{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

**Indice complexe du milieu : définition**

La relation de dispersion peut se simplifier en

$$\tilde{k} = \pm \tilde{n} \frac{\omega}{c}$$

\tilde{n} (sans dimension) est appelé indice du milieu diélectrique. Il est complexe, on peut écrire : $\Re(\tilde{n}) = n_r$ et $\Im(\tilde{n}) = -n_i$.

**Structure de l'onde dans un milieu diélectrique à retenir**

L'onde plane progressive monochromatique qui se propage avec un vecteur d'onde $\tilde{k} = \tilde{k} \cdot \vec{u}_z = \tilde{n} \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$ est telle que

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{k}}{\omega} \wedge \tilde{\vec{E}} = \tilde{n} \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \tilde{\vec{E}}$$

**Forme des ondes : s'y retrouver**

$$\tilde{\vec{E}} = \left[E_+ e^{-n_i \frac{\omega z}{c}} e^{-j \cdot (\omega \cdot (t - n_r \frac{z}{c}) - \varphi_+)} + E_- e^{+n_i \frac{\omega z}{c}} e^{-j \cdot (\omega \cdot (t + n_r \frac{z}{c}) - \varphi_-)} \right] \cdot \vec{u}$$

L'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement est de la forme $\tilde{\vec{E}} = E_0 e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k} z - \varphi)} \vec{u}$, soit pour le champ réel

$$\vec{E} = \left[\begin{array}{l} E_+ \cdot e^{-n_i \frac{\omega z}{c}} \cos \left(\omega \cdot \left(t - n_r \frac{z}{c} \right) - \varphi_+ \right) \\ + E_- \cdot e^{+n_i \frac{\omega z}{c}} \cos \left(\omega \cdot \left(t + n_r \frac{z}{c} \right) - \varphi_- \right) \end{array} \right] \cdot \vec{u}$$

2. Dispersion**9 Forme de l'onde dans une zone de transparence : exercice**

dans la plus grande partie du spectre, on se trouve hors d'une des zones de résonance, soit $n_i \simeq 0$.

- ▷ Montrer que l'onde est non amortie.
- ▷ Déterminer la vitesse de phase.

$$n_i \simeq 0 \Rightarrow n \simeq n_r \in \Re$$

Aussi, l'onde

$$\tilde{\vec{E}} = \left[E_+ e^{-j \cdot (\omega \cdot (t - n_r \frac{z}{c}) - \varphi_+)} + E_- e^{-j \cdot (\omega \cdot (t + n_r \frac{z}{c}) - \varphi_-)} \right] \cdot \vec{u}$$

est une *onde non amortie* : il n'y a pas d'absorption. La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{c}{n_r}$$

La partie réelle de l'indice du milieu diélectrique (n_r) apparaît donc comme l'indice optique pour les milieux transparents.

**la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde. schéma**

La figure 3 représente la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde (données : K.F. Palmer and D. Williams, Optical Properties of water in the near infrared, Journal of the Optical Society of America, V.64, pp. 1107-1110, August, 1974.)

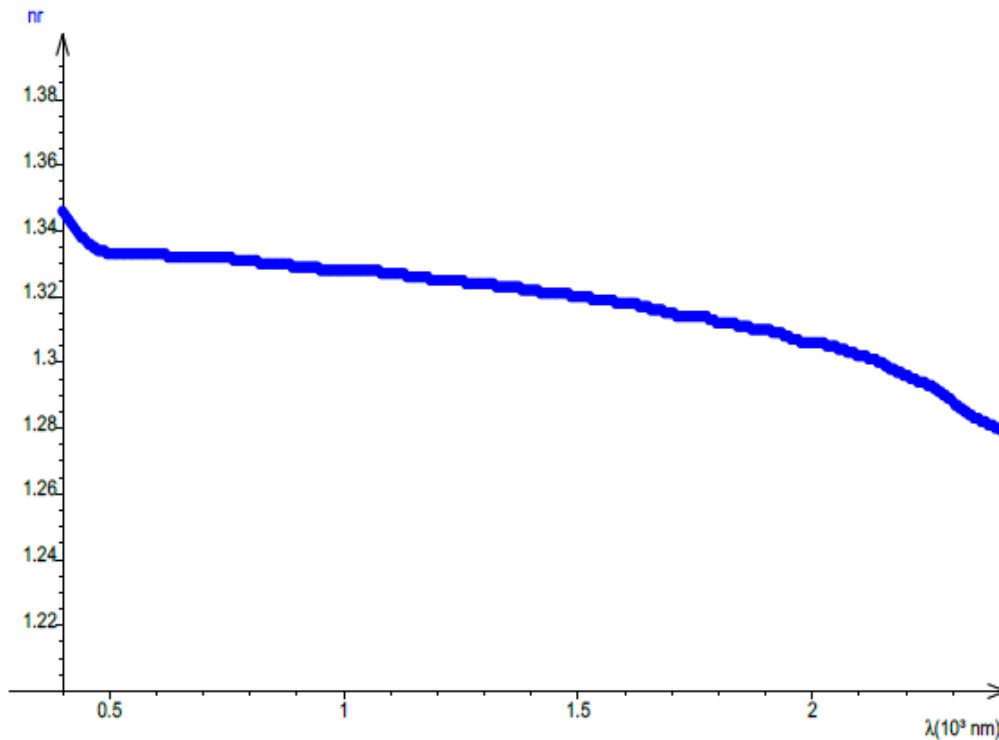


FIGURE 3 – la partie réelle (n_r) de l'indice optique de l'eau en fonction de la longueur d'onde.



Variation de l'indice avec la longueur d'onde - formule de Cauchy *s'y retrouver*

On remarque que n_r est une fonction croissante de la fréquence ν . Ceci est pris en compte par exemple dans la formule de Cauchy en optique :

$$n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Puisque $n_r = f(\nu)$, la vitesse de phase de l'onde dépend de la fréquence : on est en présence d'un *milieu dispersif*.



Milieu dispersif *définition*

Le milieu de propagation est dit dispersif si la vitesse de phase de l'onde n'est pas constante : $v_\varphi = f(\omega) \neq cste$

3. Absorption



10 Forme de l'onde dans une zone d'absorption *exercice*

▷ Montrer que l'onde est amortie dans les zones de résonance où $n_i \neq 0$.

Comme

$$n_i \neq 0 \Rightarrow \tilde{n} \in \mathbb{C}$$

Aussi, l'onde :

$$\tilde{\vec{E}} = \left[E_+ \cdot e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot (t - n_r \frac{z}{c}) - \varphi_+)} + E_- \cdot e^{+n_i \frac{\omega \cdot z}{c}} \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot (t + n_r \frac{z}{c}) - \varphi_-)} \right] \cdot \vec{u}$$

est donc d'une *onde amortie* : l'amplitude de l'onde est atténuée par le terme $e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}}$ car il y a absorption.



Absorption *définition*

Si $n_i \neq 0 \Rightarrow \tilde{n} \in \mathbb{C}$, l'onde qui se propage est une *onde amortie* : l'amplitude de l'onde est atténuée par le terme $e^{-n_i \frac{\omega \cdot z}{c}}$. Il y a absorption de l'onde par le milieu de propagation.



l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde. *schéma*

La figure 4 représente l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde (données : K.F. Palmer and D. Williams, Optical Properties of water in the near infrared, Journal of the Optical Society of America, V.64, pp. 1107-1110, August, 1974.)

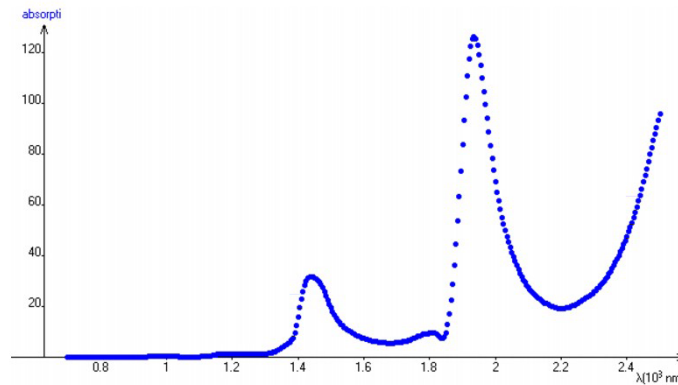


FIGURE 4 – l'absorption spécifique de l'eau en fonction de la longueur d'onde.

4. Retour sur les paquets d'ondes



"Petit" paquet d'ondes *s'y retrouver*

On s'intéresse à un petit paquet d'ondes : on suppose que $k = k_0 + \delta k$ et $\omega = \omega_0 + \delta \omega$, avec $\delta \omega \ll \omega_0$ et $\delta k \ll k_0$



Vitesse de groupe *définition*

On définit la vitesse de groupe par

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

au voisinage de $(k_0; \omega_0)$.



11 Enveloppe d'un paquet d'ondes *théorème*

On peut faire un développement limité autour de $(k_0; \omega_0)$:

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \frac{dk}{d\omega}(\omega - \omega_0) = k_0 + \frac{\delta\omega}{v_g}$$

En remplaçant dans l'onde plane complexe, on trouve

$$\tilde{\psi} = \int \tilde{A}(\omega_0 + \delta\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + \delta\omega \cdot t - k_0 \cdot x - \frac{\delta\omega}{v_g} x)} d\delta\omega$$

⇒

$$\tilde{\psi} = \tilde{A}' \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)}$$

pour peu que l'on pose l'enveloppe

$$\tilde{A}' = \int \tilde{A}(\omega_0 + \delta\omega) \cdot e^{j \cdot \delta\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)} d\delta\omega$$

Interprétation du paquet d'onde *s'y retrouver*

on a donc trouvé une onde moyenne (autour de $(k_0; \omega_0)$: $e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x)}$), modulée par une enveloppe \tilde{A}' qui se déplace donc vers les x croissants à la vitesse de groupe v_g car on retrouve le facteur $e^{j \cdot \delta\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)}$.

12 Propagation d'un paquet d'ondes suivant l'équation de D'Alembert *exercice*

Montrer que vitesses de phase et de groupe sont égales dans le cas de l'équation de D'Alembert :

$$v_\varphi = v_g = c_0$$

Il n'y a pas de dispersion.

Dans le cas de l'équation de D'Alembert, l'équation de dispersion se réécrit

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c_0}$$

pour une onde se propageant vers les x croissants. Donc

$$v_\varphi = v_g = c_0$$

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif ni absorbant se caractérise par la transmission du paquet d'ondes identique à lui-même au cours de la propagation.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon *schéma*

La figure 5 représente les vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon. On voit que la vitesse de groupe diffère *a priori* de la vitesse de phase. De plus, la vitesse de phase dépend de ω : le milieu est dispersif.

13 Propagation d'un paquet d'ondes suivant l'équation de Klein-Gordon *exercice*

Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, montrer que vitesses de phase et de groupe sont différentes et que

$$v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

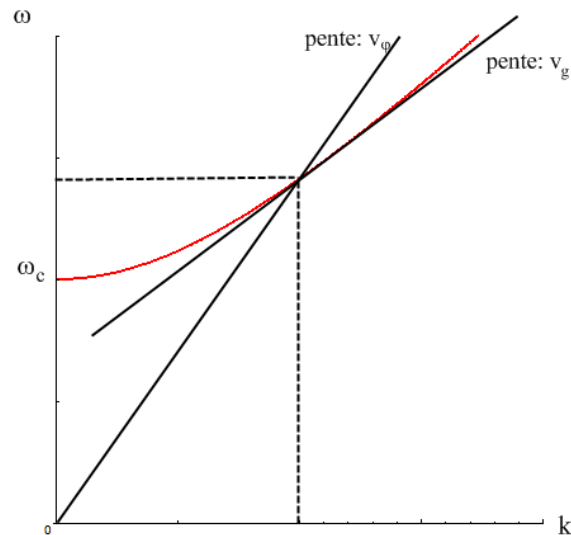


FIGURE 5 – Vitesses de phase et de groupe dans le cas de la dispersion de Klein-Gordon

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} \text{ pour tout } \omega > \omega_c$$

La vitesse de groupe se calcule ainsi :

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{2 \cdot \omega}{2 \cdot c \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

la vitesse de phase est :

$$v_\varphi = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

et vitesses de phase et de groupe sont différentes car

$$v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *schéma*

La figure 6 représente la propagation dans un milieu absorbant. Le paquet d'onde va se déformer : il va s'étaler et s'amenuiser.

Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant *animation*

La propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif fait apparaître un élargissement de ce paquet d'ondes. Le fait que le milieu soit absorbant se caractérise par l'affaiblissement de l'amplitude du paquet d'ondes au cours de la propagation.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

remarque

Bien souvent, dans les zones d'absorption, la partie réelle de l'indice optique varie brutalement. Donc le milieu est extrêmement dispersif, et les signaux envoyés sont fortement déformés. On ne peut donc pas toujours s'intéresser à un paquet d'ondes clairement identifié. La vitesse de groupe perd ainsi tout son sens. Il ne faut donc pas s'étonner si le calcul donne des valeurs supérieures à c pour v_g (on parle alors de *dispersion anormale*).

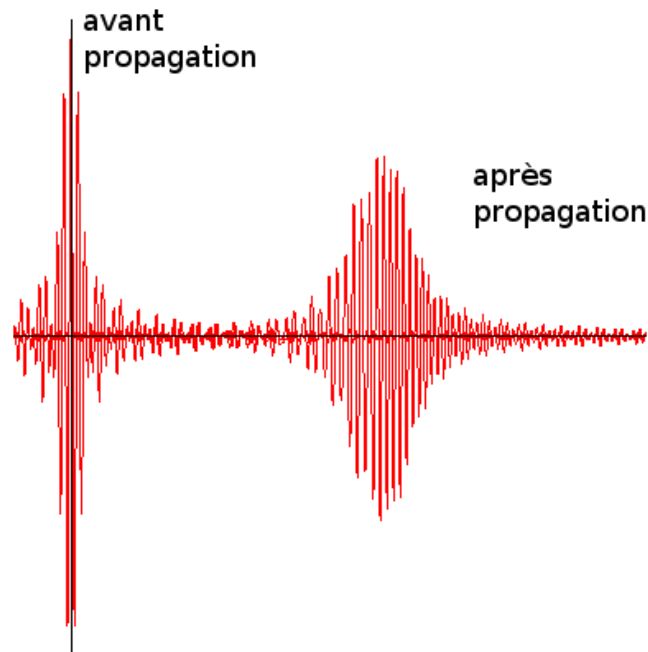


FIGURE 6 – Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et absorbant

III- Interface entre deux milieux de propagation

✪ Incidence normale *s'y retrouver*

On s'intéresse à une interface en $z = 0$.

Dans le milieu $z < 0$ d'indice \tilde{n}_1 se propagent :

- l'onde incidente : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_i = \tilde{n}_1 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$;
- l'onde réfléchie : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \tilde{n}_1 (-\vec{u}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = -\frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$.

Dans le milieu $z > 0$ d'indice \tilde{n}_2 se propage :

- l'onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_t = \tilde{n}_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_t}{c} = \frac{\tilde{n}_2}{c} \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_y$.

♥ Relation de passage sur un dioptre *à retenir*

On admet qu'à l'interface ($z = 0$), le champ électromagnétique est continu :

$$\begin{cases} \forall t \vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t) = \vec{E}_t(z=0, t) \\ \forall t \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) = \vec{B}_t(z=0, t) \end{cases}$$

📎 Coefficients de réflexion et transmission *définition*

Les coefficients en amplitude sont :

- coefficients de réflexion tels que :
 $\vec{E}_r(z=0, t) = \tilde{r}_E \vec{E}_i(z=0, t)$
 et $\vec{B}_r(z=0, t) = \tilde{r}_B \vec{B}_i(z=0, t)$;
- coefficients de transmission tels que :
 $\vec{E}_t(z=0, t) = \tilde{t}_E \vec{E}_i(z=0, t)$
 et $\vec{B}_t(z=0, t) = \tilde{t}_B \vec{B}_i(z=0, t)$.

Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2$
- coefficient de transmission : $T = 1 - R$.



Coefficients de réflexion dans le cas d'une interface vide/métal *s'y retrouver*

On peut montrer que dans le domaine optique, dans le cas d'une interface vide/métal

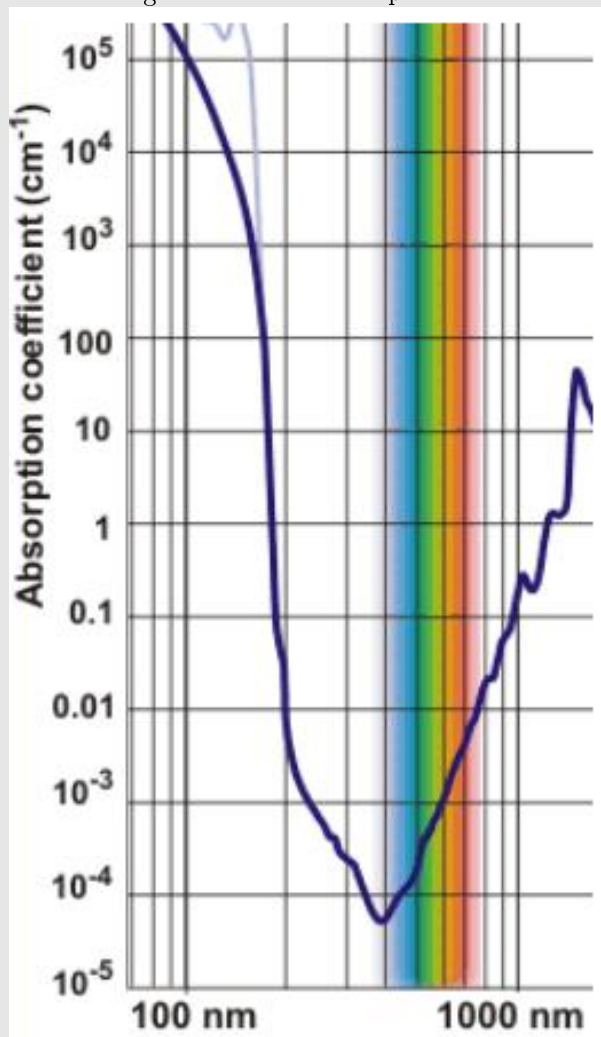
$\tilde{r}_E = -1$, ce qui est à relier à un déphasage de π supplémentaire (cf. optique ondulatoire) ;

$R = 1 \Rightarrow T = 0$, le métal se comporte comme un miroir.

§ 1) Modélisation de l'absorption et de la dispersion dans l'eau *exercice*

1) Données relatives à l'eau

La partie réelle n_r de l'indice de l'eau varie de 1,329 à 1,343 d'un bout à l'autre du spectre visible, entre le rouge et le bleu. L'absorption de l'eau est donnée par le graphique suivant :



1.a) L'eau est-elle un milieu dispersif dans le visible ? Modéliser les variations de la partie réelle de l'indice de l'eau grâce à la formule de Cauchy : $n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$.

1.b) L'indice de l'eau a-t-il une partie imaginaire non nulle n_i dans le visible ? Justifier.

2) Application à la couleur de la mer

2.a) Dans quelle partie du spectre visible l'absorption de l'eau est-elle la plus faible ?

2.b) Proposer une interprétation à la couleur de la mer.

3) Arc en ciel

Un rayon de lumière monochromatique pénètre dans une goutte d'eau assimilée à une sphère homogène d'indice n sous une incidence i , il subit une réflexion à l'intérieur de la sphère avant de sortir.

3.a) Faire un schéma.

3.b) Calculer la déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident en fonction de i et r , l'angle du premier rayon réfracté.

3.c) Montrer que cette déviation D passe par un extremum lorsque $\sin^2 i = \frac{4-n^2}{3}$.

D est extrémale lorsqu'il y a accumulation de lumière : c'est l'arc en ciel (la symétrie de révolution donne un arc).

3.d) Applications numériques pour l'arc-en-ciel : calculer la déviation D lorsqu'elle est extrémale, pour le bleu et pour le rouge. Expliquez pourquoi l'arc en ciel est coloré.

Correction :

1) Données relatives à l'eau

1.a) L'eau est-elle un milieu dispersif dans le visible car n_r varie avec λ . On a donc

$$\begin{cases} n_r(\lambda_1 = 400\text{nm}) = n_1 = 1,343 \\ n_r(\lambda_2 = 750\text{nm}) = n_2 = 1,329 \end{cases}$$

Si on modélise les variations de la partie réelle de l'indice de l'eau grâce à la formule de Cauchy : $n_r = A + \frac{B}{\lambda^2}$,

$$\begin{cases} n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2} \\ n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{n_1 - n_2}{\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}} = \frac{1,343 - 1,329}{\frac{1}{(400 \times 10^{-9})^2} - \frac{1}{(750 \times 10^{-9})^2}} = 3,13 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2}$$

et $A = 1,34$.

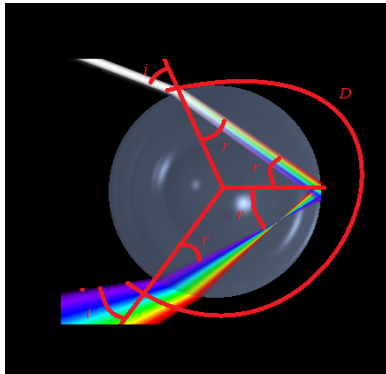
1.b) L'eau est un milieu absorbant, aussi, l'indice de l'eau a une partie imaginaire non nulle n_i dans le visible.

2) Application à la couleur de la mer

2.a) L'absorption de l'eau est la plus faible pour les longueurs d'onde les plus faibles, c'est-à-dire pour le bleu.

2.b) Après avoir traversé une épaisseur suffisante dans la mer, la lumière initialement blanche est bleue : les autres longueurs d'onde ont été absorbées. C'est ce que l'on voit en plongée. A la surface de l'eau, la réflexion au fond (sur le sable), renvoie une lumière principalement bleue.

3) Arc en ciel



3.a) Schéma :

3.b) $D = \pi + 2i - 4r$.

3.c) On dérive $D = \pi + 2i - 4r$: $dD = 2 di - 4 dr$, et si D est extrémal : $di = 2 dr$.

Loi de Snell-Descartes : $\sin i = n \sin r$, qu'on dérive :

$$\cos i di = n \cos r dr = n \sqrt{1 - \sin^2 r} di/2 = n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} \frac{di}{2}$$

$$\Rightarrow 4(1 - \sin^2 i) = n^2 - \sin^2 i \Leftrightarrow \sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$$

$$\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}}$$

3.d) Donc $i = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$, $r = \arcsin \frac{\sqrt{4 - n^2}}{n}$ et

$$D = \pi + 2i - 4r = \pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sqrt{4 - n^2}}{n}$$

Pour le bleu ($\lambda = \lambda_1 = 400 \text{ nm}$), $n = n_1 = 1,343$,

$$D = D_1 = \pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n_1^2}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sqrt{4 - n_1^2}}{n_1} = 139^\circ$$

Pour le rouge ($\lambda = \lambda_2 = 750 \text{ nm}$), $n = n_2 = 1,329$,

$$D = D_2 = \pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n_2^2}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sqrt{4 - n_2^2}}{n_2} = 137^\circ$$

L'arc rouge n'est pas dans la même direction que l'arc bleu car l'eau est un milieu dispersif.

Éléments de correction :

Pour le bleu ($\lambda = \lambda_1 = 400 \text{ nm}$), $D = 139^\circ$ et pour le rouge ($\lambda = \lambda_2 = 750 \text{ nm}$), $D = 137^\circ$.

Technique à maîtriser

jeudi 15 février 2018

I- Les capacités exigibles

1. Modélisation d'un milieu



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Décrire le modèle d'un plasma localement neutre sans collisions.
 Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations.
 Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée en moyenne temporelle entre le champ et les porteurs de charges.
 Traiter le cas particulier d'un conducteur ohmique de conductivité réelle.

2. Propagation dans un milieu



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Établir une relation de dispersion pour des ondes planes progressives harmoniques.
 Associer les parties réelle et imaginaire de \tilde{k} aux phénomènes de dispersion et d'absorption.
 Reconnaître une onde évanescente (onde stationnaire atténuée).
 Dans le cas particulier d'un conducteur ohmique de conductivité réelle, repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion.
 Connaître l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.

3. Interface entre deux milieux



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Dans le cas de d'une onde plane progressive harmonique sous incidence normale entre deux demi-espaces d'indices complexes n_1 et n_2 , exploiter la continuité (admise) du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression du coefficient de réflexion en fonction des indices complexes.
 Distinguer les comportements dans le domaine de transparence et dans le domaine réactif du plasma.
 Établir les expressions des coefficients de réflexion et transmission du champ pour un métal réel. Passer à la limite d'une épaisseur de peau nulle.
 Dans le cas d'une interface vide-conducteur ohmique dans le domaine optique visible, identifier le comportement du métal dans ce domaine, avec celui d'un plasma localement neutre peu dense en-dessous de sa pulsation de plasma.
 Associer la forme du coefficient complexe de réflexion à l'absence de propagation d'énergie dans le métal en moyenne temporelle.
 Identifier l'incidence de Brewster et utiliser cette configuration pour repérer la direction absolue d'un polariseur.

II- Méthodes

1. Modélisation d'un milieu
2. Propagation dans un milieu
3. Interface entre deux milieux

A) Coefficients de réflexion et de transmission dans le cas de l'incidence normale *méthode*

Les trois OPPM impliquées dans le processus sont

l'onde incidente, de vecteur d'onde $\vec{k}_i = \frac{2\pi \cdot n_1}{\lambda} \vec{u}_z$, de champ électrique complexe $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_i \cdot z)}$ et magnétique $\vec{B}_i = \frac{n_1 \cdot \vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}_i$;

l'onde réfléchie, de vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\frac{2\pi \cdot n_1}{\lambda} \vec{u}_z$, de champ électrique complexe $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cdot e^{j \cdot (\omega t + k_r \cdot z)}$ et magnétique $\vec{B}_r = \frac{-n_1 \cdot \vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}_r$;

l'onde transmise de vecteur d'onde $\vec{k}_t = \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda} \vec{u}_z$, de champ électrique complexe $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_t \cdot z)}$ et magnétique $\vec{B}_t = \frac{n_2 \cdot \vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}_t$.

Les coefficients en amplitude pour \vec{E} sont

- en réflexion r_E tel que $\vec{E}_{0r} = r_E \cdot \vec{E}_{0i}$,
- en transmission t_E tel que $\vec{E}_{0t} = t_E \cdot \vec{E}_{0i}$.

Les coefficients en amplitude pour \vec{B} sont

- en réflexion r_B tel que $\vec{B}_{0r} = r_B \cdot \vec{B}_{0i}$,
- en transmission t_B tel que $\vec{B}_{0t} = t_B \cdot \vec{B}_{0i}$.

On peut définir les coefficients énergétiques suivants :

- en réflexion $R = \frac{\langle \Phi_r \rangle}{\langle \Phi_i \rangle}$;
- en transmission $T = \frac{\langle \Phi_t \rangle}{\langle \Phi_i \rangle}$.

Les conditions de passage sur les champs électromagnétiques (continus) permettent de déterminer tous ces coefficients.

III- Exercices

1. Modélisation d'un milieu

1.1) Conductivité d'un plasma

Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ existe dans le plasma.

- 1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la vitesse complexe d'un électron.
- 2) Montrer que la conductivité complexe du plasma peut s'écrire

$$\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

1) Comme le champ magnétique de l'onde est de norme $\|B\| = \frac{\|E\|}{c}$, la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron est

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -j \omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E}$$

soit

$$\vec{v}_e = -j \frac{e}{\omega m_e} \vec{E}$$

2) Comme

$$\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -n_e e \vec{v}_e = \gamma \vec{E}$$

on trouve conductivité du plasma :

$$\tilde{\gamma} = j \frac{n_e e^2}{\omega m_e} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

pour peu qu'on pose

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$$

1.2) Pulsation plasma

La conductivité complexe du plasma peut s'écrire

$$\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

1) Montrer que ω_p a bien la dimension d'une pulsation.

1) Il faut vérifier que c'est une pulsation. En reprenant

$$\left(-j\omega + \frac{\tilde{\gamma}}{\varepsilon_0}\right) \tilde{\rho} = 0 \Rightarrow \tilde{\rho} = 0$$

et la conductivité imaginaire $\tilde{\gamma} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$, on trouve

$$\left(-j\omega + \frac{\omega_p^2}{\omega}\right) \tilde{\rho} = 0 \Rightarrow \tilde{\rho} = 0$$

qui montre bien que ω_p a la dimension d'une pulsation.

1.3) Absence d'effet Joule dans le plasma

1) Montrer qu'il y a absence de puissance échangée en moyenne temporelle entre le champ et les porteurs de charges dans un plasma.

1) Puisque la conductivité est imaginaire pure, \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase. Ainsi, la puissance échangée par effet Joule est de la forme :

$$P_d = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d^3\tau = \iiint |\tilde{\gamma}| E_0^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot d^3\tau$$

de moyenne nulle.

1.4) Neutralité locale d'un conducteur

1) Montrer qu'un conducteur est localement non chargé.

1) En appliquant la conservation locale de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ en complexe et en utilisant Maxwell Gauss :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\gamma} \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\tilde{\gamma}}{\varepsilon_0} \tilde{\rho} = 0$$

En injectant $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 e^{-j(\omega t - k z)}$ dans la dernière équation, on trouve :

$$\left(-j\omega + \frac{\tilde{\gamma}}{\varepsilon_0}\right) \tilde{\rho} = 0 \Rightarrow \tilde{\rho} = 0$$

2. Propagation dans un milieu

2.5) Propagation dans un métal réel pour les ondes hertziennes

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$ qui se propage dans un métal réel.

On admet que la relation de dispersion est :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

On suppose que $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes hertziennes).

1) Montrer que $\tilde{k} = \pm \frac{1+j}{\delta}$.

2) En déduire que l'onde est amortie.

1)

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega} \right) \simeq \frac{\omega^2}{c^2} j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega}$$

La relation de dispersion se simplifie en

$$\tilde{k}^2 \simeq j \cdot \mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega$$

On trouve donc

$$\tilde{k} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega} = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

avec l'épaisseur de peau $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot \gamma_0 \cdot \omega}}$.

2) Aussi, le champ complexe est

$$\vec{E} = E_+ \cdot e^{-\frac{z}{\delta(\omega)}} e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \frac{z}{\delta(\omega)} - \varphi_+)} \cdot \vec{u} + E_- \cdot e^{+\frac{z}{\delta(\omega)}} e^{-j \cdot (\omega \cdot t + \frac{z}{\delta(\omega)} - \varphi_-)} \cdot \vec{u}$$

Puisque le champ ne peut avoir une amplitude qui diverge en $z \rightarrow \infty$, $E_- = 0$. Aussi, le champ complexe est

$$\vec{E} = E_+ \cdot e^{-\frac{z}{\delta(\omega)}} e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \frac{z}{\delta(\omega)} - \varphi_+)} \cdot \vec{u}$$

Il s'agit d'une onde amortie.

2.6) Propagation dans un métal réel pour les ondes visibles

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\vec{E} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$ qui se propage dans un métal réel.

On admet que la relation de dispersion est :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

On suppose que $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ (c'est le cas pour les ondes visibles).

1) Montrer que $\tilde{k} = \pm \frac{j}{\delta'}$.

2) En déduire que l'onde est évanescente.

1)

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{-j \cdot \tau \cdot \omega^2} \right) \simeq -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

La relation de dispersion se simplifie en

$$\tilde{k}^2 \simeq -\frac{\omega_p^2}{c^2}$$

On trouve donc

$$\tilde{k} = \pm j \frac{\omega_p}{c} = \pm \frac{j}{\delta'}$$

où l'épaisseur de peau est maintenant $\delta' = \frac{c}{\omega_p}$.

2)

$$\tilde{\vec{E}} = E_+ \cdot e^{-\frac{z}{\delta'}} e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \varphi_+)} \cdot \vec{u} + E_- \cdot e^{+\frac{z}{\delta'}} e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \varphi_-)} \cdot \vec{u}$$

Puisque le champ ne peut avoir une amplitude qui diverge en $z \rightarrow \infty$, $E_- = 0$. La forme de l'onde est

$$\vec{E} = E_+ \cdot e^{-\frac{z}{\delta'}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_+) \vec{u}$$

L'onde ne se propage pas et est amortie : il s'agit d'une onde évanescente. Le corollaire est une réflexion totale de l'onde incidente sur le métal.

2.7) Propagation dans un métal réel pour les ondes UV

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$ qui se propage dans un métal réel.

On admet que la relation de dispersion est :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

Supposons que $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ (c'est le cas à partir du domaine UV).

- 1) Montrer qu'on retrouve l'équation de dispersion de Klein-Gordon.
- 2) En déduire qu'il y a propagation avec dispersion, mais sans absorption.

1)

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{-j \cdot \tau \cdot \omega^2} \right)$$

La relation de dispersion se simplifie en

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On trouve donc

$$\tilde{k} = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

On retrouve l'équation de dispersion de Klein-Gordon.

2) Aussi, le champ complexe est

$$\tilde{\vec{E}} = E_+ \cdot e^{-j \cdot \left(\omega \cdot t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z + \varphi_+ \right)} \cdot \vec{u} + E_- \cdot e^{-j \cdot \left(\omega \cdot t + \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z - \varphi_- \right)} \cdot \vec{u}$$

Il y a propagation avec dispersion, mais sans absorption.

2.8) Propagation dans un métal réel pour les ondes X

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \tilde{k}z - \varphi)} \vec{u}$ qui se propage dans un métal réel.

On admet que la relation de dispersion est :

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{\omega \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot \tau)} \right)$$

Supposons enfin que $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ (c'est le cas pour les rayonnements X).

- 1) Montrer qu'il y a propagation sans dispersion ni absorption, comme dans le vide.

1)

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\omega_p^2 \cdot \tau}{-j \cdot \tau \cdot \omega^2} \right)$$

La relation de dispersion se simplifie en

$$\tilde{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$$

On trouve donc

$$\tilde{k} = \pm \frac{\omega}{c}$$

On se retrouve dans le cas du vide : l'onde n'interagit plus avec les électrons du métal, car la fréquence est trop grande. Aussi, le champ complexe est

$$\tilde{\vec{E}} = E_+ \cdot e^{-j \cdot [\omega \cdot (t - \frac{z}{c}) - \varphi_+]} \cdot \vec{u} + E_- \cdot e^{-j \cdot [\omega \cdot (t + \frac{z}{c}) - \varphi_-]} \cdot \vec{u}$$

Il y a propagation sans dispersion ni absorption, comme dans le vide.

2.9) Indice optique et vitesse de l'onde

1) L'indice optique correspond-il à une vitesse de phase ou à une vitesse de groupe ?

1) L'indice optique est relatif à une longueur d'onde : il correspond à la vitesse de phase.

2.10) Vitesses de phase et de groupe dans un milieu vérifiant la loi de Cauchy

On s'intéresse à un milieu vérifiant la loi de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

On donne la relation de Rayleigh entre vitesses de phase et de groupe :

$$v_g = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$$

- 1) Exprimer la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de phase, de n , de B et de λ .
- 2) Comparer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- 3) Que se passe-t-il si le milieu est non dispersif ?

$$1) v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{A + \frac{B}{\lambda^2}}$$

$$\text{D'où : } \frac{dv_\varphi}{d\lambda} = \frac{2 \cdot c \cdot \frac{B}{\lambda^3}}{n^2} = \frac{2 \cdot v_\varphi \cdot \frac{B}{\lambda^3}}{n}$$

$$v_g = v_\varphi \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot B}{n \cdot \lambda^2} \right)$$

- 2) $v_g < v_\varphi$.
- 3) Si le milieu est non dispersif, $B = 0 \Rightarrow v_g = v_\varphi$.

2.11) Propagation dans un plasma

On peut montrer que dans un plasma, la relation de dispersion est de la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On se place dans le cas d'une onde de pulsation $\omega > \omega_p$, la pulsation plasma.

- 1) Indice du milieu :
 - 1.a) Pourquoi a-t-on le droit de parler d'indice ?
 - 1.b) Quel est l'indice $n(\omega)$ du milieu ?
- 2) Exprimer les vitesses :
 - 2.a) v_φ de phase ;
 - 2.b) v_g de groupe ;
 - 2.c) et les comparer à c .

1) Indice du milieu :

1.a) Puisque k est réel, le milieu est transparent : il n'y a pas d'absorption.

1.b) L'indice est tel que $k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$, or $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$. Donc :

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

2) Vitesses :

2.a) de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, donc

$$v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

2.b) de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$ avec $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$, d'où

$$v_g = n \cdot c = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

2.c) Comme $n(\omega) < 1$,

$$v_\varphi > c \quad \text{et} \quad v_g < c$$

3. Interface entre deux milieux

3.12) Coefficients de transmission et réflexion

On s'intéresse à une interface en $z = 0$. Dans le milieu $z < 0$ l'indice optique est \tilde{n}_1 et dans le milieu $z > 0$ l'indice est \tilde{n}_2 .

L'onde incidente a pour champ électrique

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$$

- 1) Déterminer la forme des différentes ondes électromagnétiques.
- 2) Calculer les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} .
- 3) En déduire les coefficients de transmission et réflexion en énergie.

1) Dans le milieu $z < 0$ d'indice \tilde{n}_1 se propagent :

- l'onde incidente : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_i = \tilde{n}_1 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0i} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$;
- l'onde réfléchi : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \tilde{n}_1 (-\vec{u}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = -\frac{\tilde{n}_1}{c} \vec{E}_{0r} e^{-j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \vec{u}_y$.

Dans le milieu $z > 0$ d'indice \tilde{n}_2 se propage :

- l'onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_x$ et $\vec{B}_t = \tilde{n}_2 \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}_t}{c} = \frac{\tilde{n}_2}{c} \vec{E}_{0t} e^{-j(\omega t - \tilde{k}_2 z)} \vec{u}_y$.

2) Les coefficients en amplitude pour \vec{E} sont

- en réflexion r_E tel que $\vec{E}_{0r} = r_E \cdot \vec{E}_{0i}$,
- en transmission t_E tel que $\vec{E}_{0t} = t_E \cdot \vec{E}_{0i}$.

Les coefficients en amplitude pour \vec{B} sont

- en réflexion r_B tel que $\vec{B}_{0r} = r_B \cdot \vec{B}_{0i}$,
- en transmission t_B tel que $\vec{B}_{0t} = t_B \cdot \vec{B}_{0i}$.

A l'interface ($z = 0$), le champ électromagnétique est continu :

$$\begin{cases} \forall t \vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t) = \vec{E}_t(z=0, t) \\ \forall t \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) = \vec{B}_t(z=0, t) \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

3) Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = \left| \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} \right|^2$
- coefficient de transmission : $T = 1 - R$.

3.13) Réflexion du diamant

On rappelle que les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} à l'interface entre deux milieux d'indices \tilde{n}_1 et \tilde{n}_2 sont :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

Le diamant est transparent, translucide ou opaque.

Son indice de réfraction est particulièrement élevé : $n \approx 2,4$.

1) Qu'est-ce qui donne au diamant son éclat caractéristique, dit « adamantin » ?

1) Pour l'interface air (ou vide) / diamant Aussi,

$$\tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{-1,4}{3,4}$$

Le coefficient de réflexion en énergie est :

$$R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = \left(\frac{-1,4}{3,4} \right)^2 = 0,17$$

Donc l'onde est bien réfléchie.

3.14) Déphasage de π pour une réflexion sur un dioptre d'indice supérieur

On rappelle que les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} sont :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

1) Justifier qu'il existe un déphasage de π pour une réflexion sur un dioptre d'indice supérieur.

1) En incidence normale, $r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$. Donc, si $n_1 < n_2$, r_E est réel négatif : on doit introduire π comme déphasage dans le champ électrique. On peut généraliser à n'importe quelle incidence.

3.15) Déphasage de π pour une réflexion sur un miroir

On rappelle que $\tilde{k} \approx \pm j \frac{\omega_p}{c}$ pour la propagation dans un métal dans le domaine visible c'est-à-dire si $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$.

On rappelle aussi que les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} à l'interface entre deux milieux d'indices \tilde{n}_1 et \tilde{n}_2 sont :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

1) Montrer que le métal se comporte comme un miroir parfait.

2) Justifier qu'il existe un déphasage de π pour une réflexion sur un miroir.

1) Pour l'interface air (ou vide) / métal, on a les indices $\tilde{n}_1 = 1$ et $\tilde{n}_2 = \frac{\tilde{k}}{\omega} = j \frac{\omega_p}{\omega}$.

Aussi,

$$\tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{1 - j \frac{\omega_p}{\omega}}{1 + j \frac{\omega_p}{\omega}} = \frac{\omega - j \omega_p}{\omega + j \omega_p} \approx \frac{-j \omega_p}{j \omega_p} = -1$$

Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = 1$

- coefficient de transmission : $T = 1 - R = 0$.

Donc toute l'onde est réfléchie.

- 2) On a vu que $\tilde{r}_E = -1$, ce qui revient à un déphasage de π .

3.16) Interface vide/plasma

On rappelle que $\tilde{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ pour la propagation dans un plasma.

On rappelle aussi que les coefficients de transmission et réflexion pour les champs \vec{E} et \vec{B} à l'interface entre deux milieux d'indices \tilde{n}_1 et \tilde{n}_2 sont :

$$\begin{cases} \tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = -\tilde{r}_B \\ \tilde{t}_E = \frac{2\tilde{n}_1}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2} \tilde{t}_B \end{cases}$$

- 1) Montrer que le plasma se comporte comme un miroir parfait si $\omega < \omega_p$.

- 1) Pour l'interface air (ou vide) / plasma, on a les indices $\tilde{n}_1 = 1$ et $\tilde{n}_2 = \frac{\tilde{k}}{\omega} = j\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}$.
Aussi,

$$\tilde{r}_E = \frac{\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2}{\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2} = \frac{1 - j\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}}{1 + j\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}}$$

Les coefficients en énergie sont :

- coefficient de réflexion : $R = |\tilde{r}_E|^2 = |\tilde{r}_B|^2 = 1$ car $|\tilde{r}_E| = 1$,
- coefficient de transmission : $T = 1 - R = 0$.

Donc toute l'onde est réfléchie.

3.17) Polarisation d'une onde réfléchie à l'incidence de Brewster

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 . Une OPPH incidente de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane.

On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

On admet que les coefficients de réflexion en amplitude du champ électrique sont, pour une onde incidente polarisée rectilignement :

- dans le plan d'incidence $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

- 1) Montrer qu'il existe une incidence $\theta_1 = \theta_B$ telle que l'onde est totalement polarisée.
- 2) Exprimer θ_B en fonction de n_1 et n_2 uniquement.

- 1) r_{\perp} semble pouvoir s'annuler pour $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Or $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ devient aux petits angles $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$. $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$, or $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, donc : $r_{\perp} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}$, qui devient aux petits angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}$, donc : $r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$. On voit donc que

$$r_{\perp} \neq 0$$

Cependant, $r_{//} = 0$ si $\tan(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \infty$. C'est le cas si

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

- 2) Or la relation de Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ devient pour $\theta_1 = \theta_B$: $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = n_2 \cos \theta_B$. On en déduit donc :

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

3.18) Coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre deux diélectriques

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 . Une OPPH incidente de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchi et transmise gardent une structure d'onde plane.

On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchi avec la normale.

On admet que les coefficients de réflexion en amplitude du champ électrique sont, pour une onde incidente polarisée rectilignement :

- dans le plan d'incidence $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

De même, les coefficients de transmission en amplitude du champ électrique sont :

- dans le plan d'incidence $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$;
- perpendiculairement au plan d'incidence $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

- 1) En incidence normale, déterminer les coefficients de réflexion
 - 1.a) $r_{//}$,
 - 1.b) r_{\perp} ,
 - 1.c) et conclure.
- 2) En incidence normale, déterminer les coefficients de transmission
 - 2.a) $t_{//}$,
 - 2.b) t_{\perp} ,
 - 2.c) et conclure.

$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$ devient aux petits angles $n_1 \theta_1 = n_2 \cdot \theta_2$.

1) Coefficients de réflexion en incidence normale :

$$1.a) \quad r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}, \text{ or } \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \text{ donc : } r_{//} = \frac{\frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2}}{\frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2}} \text{ qui devient aux}$$

petits angles : $r_{//} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $r_{//} =$

$$\frac{\frac{\theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{1 - \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}}{\frac{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{1 + \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 - \theta_1^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}} \frac{1 + \theta_1^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}, \text{ qui tend vers } r_{//} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}, \text{ soit :}$$

$$r_{//} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

1.b) $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$, or $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$, donc : $r_{\perp} = \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}$, qui devient aux petits angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$, soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits

angles : $r_{\perp} = \frac{\theta_1 - \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}}$, donc :

$$r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

1.c) Conclusion :

$$r_{//} = r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

Il n'y a pas de différence entre les deux polarisations.

2) Coefficients de transmission en incidence normale :

2.a) $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$ devient aux petits angles : $t_{//} = \frac{4 \cdot \theta_2}{2 \cdot \theta_1 + 2 \cdot \theta_2}$ soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $t_{//} = \frac{2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}$, donc

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

2.b) $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$ devient aux petits angles : $t_{\perp} = \frac{2\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$ soit encore, compte tenu de la relation de Descartes aux petits angles : $t_{\perp} = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \theta_1}{\theta_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1}$, donc

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

2.c) Conclusion :

$$t_{//} = t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$$

Il n'y a pas de différence entre les deux polarisations.

3.19) Coefficients de Fresnel pour une onde polarisée dans le plan d'incidence

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 .

Une OPPH incidente polarisée rectilignement dans le plan d'incidence de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchi et transmise gardent une structure d'onde plane. On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchi avec la normale.

1) Ecrire les conditions aux limites :

1.a) sur le champ électrique,

1.b) et sur le champ magnétique.

2) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

2.a) $r_{//} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$ ou $r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$,

2.b) et $t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$ ou $t_{//} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$.

1) Conditions aux limites :

1.a) La partie tangentielle du champ électrique est continue, soit

$$E_{0_i} \cdot \cos \theta_1 - \cos \theta_1 \cdot \tilde{E}_{0_r} = \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0_t}$$

1.b) La partie normale du champ magnétique est continue, soit le champ magnétique lui même :

$$n_1 \cdot E_{0_i} + n_1 \cdot \tilde{E}_{0_r} = n_2 \cdot \tilde{E}_{0_t}$$

2) Coefficients de Fresnel :

2.a) On peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} n_2 \cdot \cos \theta_1 (E_{0_i} - \tilde{E}_{0_r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0_t} \\ n_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot (E_{0_i} + \tilde{E}_{0_r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0_t} \end{cases}$$

soit $(n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2) E_{0_i} = (n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1) \cdot \tilde{E}_{0_t}$ ce qui nous donne :

$$r_{//} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$$

qu'on peut transformer en

$$r_{//} = \frac{n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$r_{//} = \frac{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1} = \frac{\sin(2\theta_1) - \sin(2\theta_2)}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$$

d'après $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$, ou bien encore :

$$r_{//} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

d'après $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

2.b) $n_2 \cdot \tilde{E}_{0t} = n_1 \cdot E_{0i} + n_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = n_1 \cdot E_{0i} \cdot (1 + r_{//})$, aussi :

$$t_{//} = \frac{n_1}{n_2} (1 + r_{//}) = \frac{n_1}{n_2} \left(1 + \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}\right)$$

soit :

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$$

qu'on peut transformer en

$$t_{//} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$t_{//} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_1} = \frac{4 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}$$

d'après $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$.

3.20) Coefficients de Fresnel pour une onde polarisée orthogonalement au plan d'incidence

On considère le plan $z = 0$ qui sépare deux milieux linéaires isotropes et homogènes, non magnétiques, d'indices n_1 et n_2 .

Une OPPH incidente polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu (1), qui occupe le demi-espace $z < 0$, vers l'interface $z = 0$: le plan d'incidence est le plan xOz . Elle atteint ce plan sous une incidence $\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_i)$. On admettra que les ondes réfléchie et transmise gardent une structure d'onde plane. On notera $\theta_2 = (\vec{u}_z, \vec{k}_t)$ l'angle de réfraction et $-\theta_1 = (\vec{u}_z, \vec{k}_r)$ l'angle que fait l'onde réfléchie avec la normale.

1) Ecrire les conditions aux limites :

1.a) sur le champ électrique,

1.b) et sur le champ magnétique.

2) Montrer que les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique sont

2.a) $r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$ ou $r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$,

2.b) et $t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_2 + n_2 \cdot \cos \theta_1}$ ou $t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

1) Conditions aux limites :

1.a) La partie tangentielle du champ électrique est continue, soit le champ électrique lui-même :

$$E_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}$$

1.b) La partie normale du champ magnétique est continue, soit

$$n_1 \cdot E_{0i} \cdot \cos \theta_1 - \cos \theta_1 \cdot n_1 \cdot \tilde{E}_{0r} = \cos \theta_2 \cdot n_2 \cdot \tilde{E}_{0t}$$

2) Coefficients de Fresnel :

2.a) On peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} n_2 \cdot \cos \theta_2 (E_{0i} + \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \\ n_1 \cdot \cos \theta_1 (E_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = n_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \tilde{E}_{0t} \end{cases}$$

soit $(n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2) E_{0i} = (n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \tilde{E}_{0t}$ ce qui nous donne :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

qu'on peut transformer en

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$r_{\perp} = \frac{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2} = \frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{\sin (\theta_2 + \theta_1)}$$

d'après $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$.

2.b) $E_{0_i} + \tilde{E}_{0_r} = \tilde{E}_{0_t}$, aussi :

$$t_{\perp} = 1 + r_{\perp} = 1 + \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

soit :

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}$$

qu'on peut transformer en

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2}$$

Or la formule de Snell Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$, donne :

$$t_{\perp} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2} = \frac{2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_2)}$$

d'après $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$.

Travaux dirigés

vendredi 16 février 2018

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

L'ouverture et le T-Stop

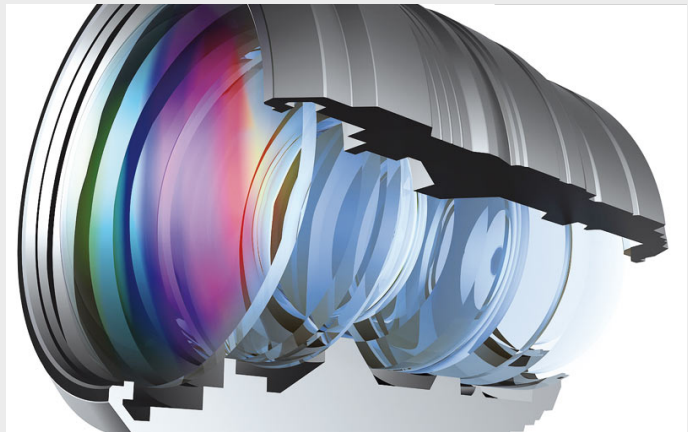
En photographie, l'indice de lamination (IL ou EV en anglais : exposure value) est une mesure de l'exposition lumineuse sur une échelle logarithmique : IL augmente d'une unité à chaque fois que la quantité de lumière qui arrive sur le capteur est divisée par 2. L'indice de lamination dépend du temps de pose (également appelé vitesse d'obturation) et de l'ouverture (qui fixe la profondeur de champ).

L'ouverture est le rapport de la longueur focale de l'objectif sur le diamètre du diaphragme. Par exemple, un objectif de 50mm qui ouvre à $f/2$ a un diaphragme de diamètre $50/2=25\text{mm}$.

Les valeurs courantes d'ouverture possibles sont 1,4 ; 2 ; 2.8 ; 4 ; 5.6 ; 8 ... Elles sont en progression géométrique de raison 1,4 environ (racine de 2) de sorte que la quantité de lumière soit divisée par 2 d'une valeur à la suivante (la quantité de lumière traversante étant proportionnelle à la surface et donc au carré du diamètre du diaphragme).

On parle aussi de l'ouverture photométrique ou T-Stop, notée T, qui prend en compte la perte de lumière à l'intérieur de l'objectif. Le nombre de lentilles ainsi que la qualité de leur traitement de surface influe beaucoup sur la transmittance de l'objectif. L'ouverture photométrique est toujours inférieure à l'ouverture relative puisqu'il y a toujours une perte de lumière dans l'objectif. Un objectif ouvrant à $N=1,4$ aura un T supérieur, par exemple 2.

L'ouverture photométrique est particulièrement intéressante, même si celle-ci n'est pratiquement jamais affichée par les constructeurs. Des mesures effectuées par un laboratoire indépendant (voir <http://luminous-landscape.com/an-open-letter-to-the-major-camera-manufacturers/>) ont montré que la perte de luminosité due à la transmittance peut aller jusqu'à 1 IL sur des objectifs assez réputés.



Énoncé

1) Estimer, grâce aux lois de l'électromagnétisme, le pourcentage de l'intensité lumineuse transmise au capteur d'un appareil photographique par un objectif.

Correction

L'indice optique du verre est $n \in [1,5; 1,9]$. L'approximation de Gauss permet de dire qu'on est dans le cas d'une incidence quasi-normale sur les dioptries air-verre sur les surfaces des lentilles.

A l'interface entre deux milieux diélectriques d'indices n_1 et n_2 , une onde incidente normale à l'interface est réfléchie et transmise. Il y a continuité des champs électriques et magnétiques à l'interface.

Le calcul des coefficients de réflexion en champ électrique r_E et en champ magnétique r_B conduit à $r_E = -r_B = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$. On en déduit le coefficient de réflexion en énergie : $R_1 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$. L'intensité transmise est $T_1 = (1 - R_1)$ pour une interface.

En estimant le nombre de lentilles à $p = 7$ (cf. schéma), on arrive à $2p$ interfaces dont un coefficient de transmission en énergie

$$T = T_1^{2p} = \left(1 - \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}\right)^{2p}$$

AN : on trouve 0,56 pour $n = 1,5$ et 0,24 pour $n = 1,9$.

Comme indiqué dans le document, on perd 1 IL (ou un diaphragme), soit 50% semble le bon ordre de grandeur.

NB : les traitements anti-reflet essaient d'augmenter T .

Devoir non surveillé

vendredi 16 février 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

La précision du GPS

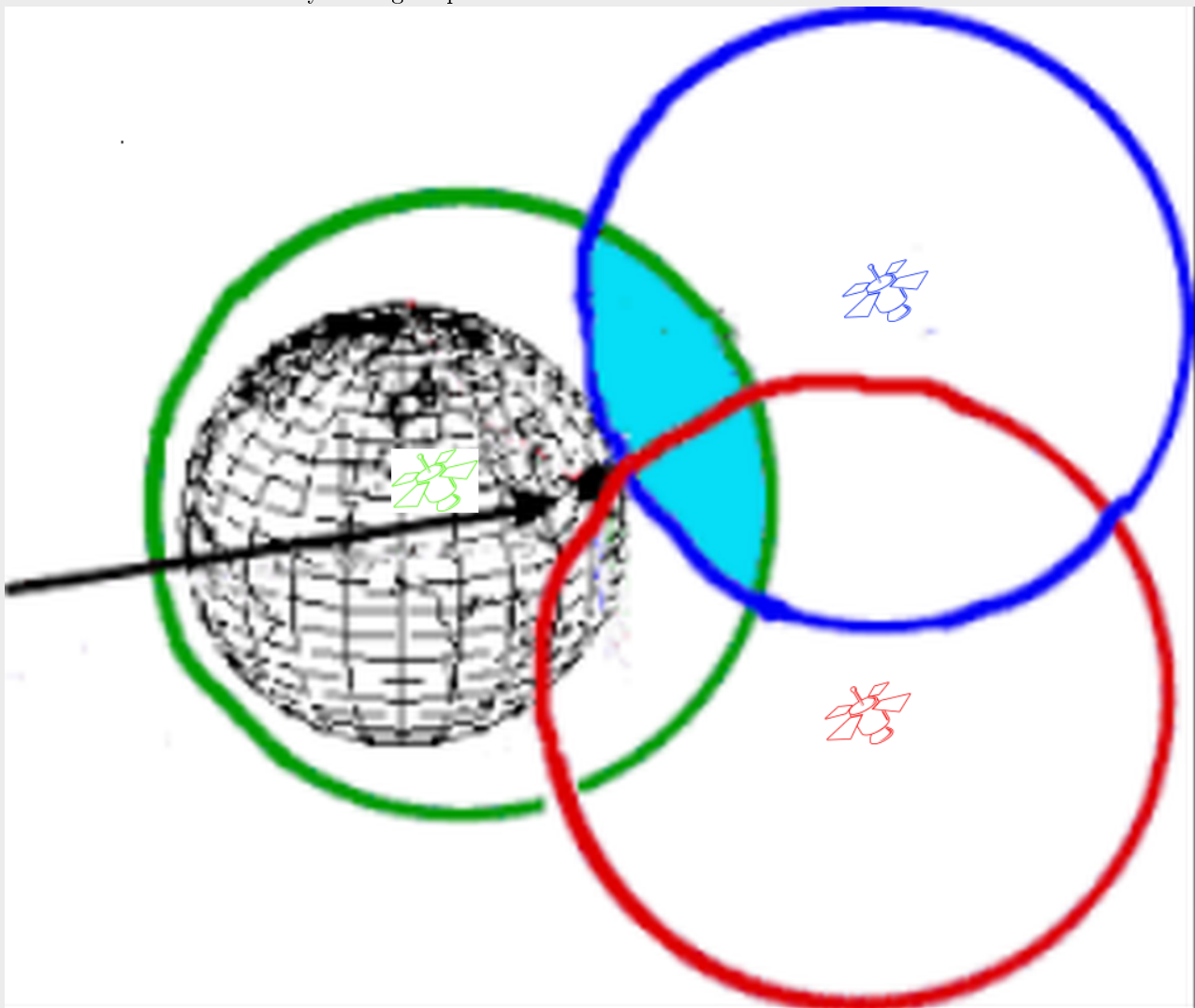
"le GPS"

disponible à l'adresse <http://www.guidett.com/GPS>

Les erreurs sur la mesure du "pseudorange"

Principe du GPS

Le principe de détermination de position par GPS est assez simple, en connaissant la position des satellites et la distance entre le récepteur et 3 des satellites (« pseudorange ») alors les coordonnées du récepteur sont entièrement déterminées. Voyez la figure pour vous en convaincre!



Comme la mesure est perturbée par l'incertitude sur l'horloge du récepteur, outre les trois inconnues relatives à la position spatiale il faut ajouter une inconnue pour résoudre la correction sur l'horloge du récepteur. Le nombre minimal de satellites nécessaire est donc de quatre.

Les signaux GPS

Chaque satellite envoie deux signaux radio, dans deux fréquences différentes (ce sont les « porteurs » des messages), chaque signal transporte un certain nombre de messages.

- L1 : le premier « porteur » est ajusté à 1575,42 MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 19 cm ;
- L2 : le second est à 1227,6 MHz, d'où une longueur d'onde de 24,4 cm.

Les informations sont transmises sous forme de modulations des porteurs (L1, L2) par des signaux binaires (des 0 et des 1). Il y a deux types de messages : les codes PRN qui permettent d'identifier le satellite et de calculer la distance entre ce dernier et le récepteur et les messages de navigation qui permettent de savoir précisément la position du satellite.

Mesure du pseudorange

Il existe une méthode précise pour déterminer la distance au satellite, fondée sur le signal porteur (onde sinusoïdale). En multipliant le nombre de cycles effectués entre le satellite et le récepteur par la longueur d'onde du porteur on obtient la distance avec une précision de moins de 2mm. La difficulté principale de cette technique consiste à déterminer le nombre initial de cycles effectués... ce problème est appelé « initial cycle ambiguity ».

Les mesures de la distances entre récepteur et satellites sont entachées d'erreurs (systématiques et aléatoires), leur origine est de trois types : erreurs dues aux satellites (trajectoire, horloge), erreurs dues au récepteur (horloge, bruit électronique, chemins multiples, variation du centre de phase de l'antenne) et finalement les erreurs engendrées par la transmission du signal (ionosphère, troposphère). Un certain nombre de ces erreurs peuvent être compensées ou modélisées afin de les corriger, ceci dépend du type de récepteur et du mode de mesure. [...]

Perturbation de l'ionosphère

La ionosphère est la partie supérieure de l'atmosphère, l'interaction entre les UV et les rayons X du rayonnement solaire résultent en une ionisation des gaz. De nombreuses particules chargées, électrons et ions positifs, sont alors présentes dans cette partie de l'atmosphère, elles ralentissent la propagation du message radio. Par conséquent la valeur du pseudorange est surestimée. Le « délai ionosphérique » est proportionnel à la quantité d'électrons libres rencontrés sur le chemin, le « TEC » (Total Electron Content). Le TEC dépend de l'heure, du jour de l'année, de l'activité solaire ainsi que de la latitude. En moyenne ce délai correspond à une erreur de 5 à 15 m sur le pseudorange, cependant en cas de forte activité solaire et pour des satellites peu élevés sur l'horizon l'erreur peut atteindre jusqu'à 150 m.

La ionosphère est un milieu dispersif (c'est-à-dire que que l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde) son effet est différent sur les deux porteurs L1 et L2. Les récepteurs capables d'acquérir les deux signaux peuvent donc effectuer une correction en comparant les pseudoranges déduits des messages de L1 et L2. Pour les autres il y a des modèles ionosphériques qui permettent d'effectuer des corrections, ces dernières font partie du message de navigation (facteurs de correction basés sur le modèle de Klobuchar).

Perturbation de la troposphère

La troposphère est la partie électriquement neutre de l'atmosphère qui s'étend jusqu'à une altitude d'environ 50 km. C'est un milieu non-dispersif pour les fréquences inférieures à 15 GHz, par conséquent les deux porteurs L1 et L2 subissent les mêmes retards, et la méthode de correction utilisant les deux bandes n'est donc plus applicable ici.

Le retard troposphérique dépend de la pression, de la température et de l'humidité le long du chemin optique. Pour un satellite situé au zénith l'erreur sur le pseudorange est de 2,3 m tandis que pour une élévation de 5° elle est de 30 m environ.

Cette perturbation est partiellement compensée par l'application d'un modèle mathématique tenant compte de deux composantes principales « dry » (sec) et « wet » (humide). La composante « dry » est modélisée de manière très satisfaisante tandis que la seconde « wet » est beaucoup plus délicate, des données météorologiques moyennes permettent dans la plupart des cas d'obtenir des corrections raisonnables.

Énoncé

On donne la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide : $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Principe de la mesure

On suppose que l'espace entre le récepteur sur Terre et le satellite est assimilable au vide.

1.a) Rappeler les équations de Maxwell dans le vide.

1.b) Montrer que, dans le vide, les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} vérifient la même équation de propagation dont on précisera la célérité.

1.c) Pour le champ électrique dans le vide, on cherche une solution sous forme d'onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x , se propageant suivant \vec{u}_z , d'amplitude E_m , de pulsation ω et de

vecteur d'onde de norme k . Écrire l'expression mathématique d'une telle onde. A quelle(s) condition(s) sur ω et k cette onde est-elle solution de l'équation de propagation précédemment trouvée?

1.d) Exprimer la durée τ que met le signal pour aller du satellite au récepteur, distants de d , et montrer que la mesure de cette durée permet d'accéder à d .

1.e) En utilisant les valeurs données des fréquences des signaux L1 et L2, déterminer, avec le nombre de chiffres significatifs adapté, les longueurs d'onde de ces deux signaux et comparer à celles données par le document.

1.f) Le document dit que "en multipliant le nombre de cycles effectués entre le satellite et le récepteur par la longueur d'onde du porteur on obtient la distance avec une précision de moins de 2 mm". Quelle est donc l'incertitude absolue sur le nombre de cycles?

2) Propagation dans l'ionosphère

On assimile l'ionosphère à un plasma, c'est-à-dire un milieu ionisé, constitué :

- d'ions positifs quasi-fixes ;
- d'électrons de charge $-e$, de masse m_e , de densité n_e , de vitesse \vec{v}_e (non relativistes).

Le plasma est peu dense, de sorte qu'on pourra négliger les interactions entre les particules chargées.

Une onde électromagnétique de champ électrique complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ existe dans l'ionosphère.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la conductivité complexe du plasma est $\tilde{\gamma} = j\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$. On donnera l'expression de ω_p .

2.b) Déterminer l'équation de propagation de l'onde dans le plasma. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $\tilde{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

2.c) Quel est donc le comportement de l'ionosphère vis-à-vis de l'onde? On mènera la discussion suivant le signe de $\omega - \omega_p$. Que doivent vérifier les fréquences des signaux L1 et L2?

2.d) Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de c , ω_p et ω . Vérifier que "la ionosphère est un milieu dispersif (c'est-à-dire que que l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde) : son effet est différent sur les deux porteurs L1 et L2."

2.e) Exprimer la vitesse de groupe v_g en fonction de c , ω_p et ω . Vérifier que l'ionosphère "ralentit la propagation du message radio".

On suppose que le signal GPS traverse une épaisseur ℓ d'ionosphère avec la densité électronique n_e , la distance totale entre le satellite et le récepteur étant d .

2.f) Montrer que la durée de propagation du signal pour aller du satellite au récepteur est $\tau' = \tau + \Delta t$ avec le « délai ionosphérique » Δt qu'on exprimera.

2.g) Dans la limite où $\omega \gg \omega_p$, montrer que Δt est bien "proportionnel à la quantité d'électrons libres rencontrés sur le chemin".

2.h) Le document stipule que "les récepteurs capables d'acquérir les deux signaux peuvent effectuer une correction en comparant les pseudorange déduits des messages de L1 et L2". Expliquer comment.

Correction

1) Principe de la mesure

1.a) Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“Maxwell flux” : } \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \text{“Maxwell Gauss” : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \text{“Maxwell Faraday” : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{“Maxwell Ampère” : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

1.b) Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{E}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E})$$

d'après Maxwell Gauss car dans le vide $\rho = 0$.

$$\Delta \vec{E} = -\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

d'après Maxwell Faraday. Puisque dans le vide il n'y a pas de courants ($\vec{j} = \vec{0}$), l'équation de Maxwell Ampère donne :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{B}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

d'après Maxwell flux.

$$\Delta \vec{B} = -\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

d'après Maxwell Ampère puisque dans le vide il n'y a pas de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$$\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

d'après Maxwell Faraday. Donc

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Donc, dans le vide, les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} vérifient la même équation de propagation, celle de D'Alembert $\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ dont la célérité est c .

1.c) On peut associer à l'OPPM réelle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t - k z + \varphi) \vec{u}_x$$

l'OPPM complexe :

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_m \cdot e^{-i(\omega \cdot t - k z)}$$

qu'on injecte dans l'équation de propagation (linéaire) : $\omega^2 = \frac{k^2}{c^2}$.

1.d) La durée que met le signal pour aller du satellite au récepteur, distant de d , n'est rien d'autre que $\tau = \frac{d}{c}$ donc la mesure de cette durée permet d'accéder à d , connaissant c .

1.e) On voit donc que la longueur d'onde est $\lambda = \frac{c}{\nu}$, d'où :

- pour L1 : $\nu_1 = 1575,42$ MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda_1 = \frac{2,99792458 \times 10^8}{1575,42 \times 10^6} = 19,0294$ cm, soit à peu près 19 cm comme le dit le document ;
- pour L2 : $\nu_2 = 1227,6$ MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda_2 = \frac{2,99792458 \times 10^8}{1227,6 \times 10^6} = 24,421$ cm, soit à peu près 24,4 cm.

1.f) Si on note N le nombre de cycles effectués entre le satellite et le récepteur et λ la longueur d'onde du porteur, la distance est $\ell = N \lambda$, d'incertitude relative $\frac{\Delta \ell}{\ell} \approx \frac{\Delta N}{N}$ car $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx 10^{-5}$, négligeable. Donc

$$\delta N = N \frac{\Delta \ell}{\ell} = N \frac{\Delta \ell}{N \lambda} = \frac{\Delta \ell}{\lambda} = \frac{0,2}{2} = 0,1$$

2) Propagation dans l'ionosphère

2.a) Étude des électrons du plasma

Comme le champ magnétique de l'onde est de norme $\|B\| = \frac{\|E\|}{c}$, la partie magnétique de la force de Lorentz appliquée à un électron est négligeable pour peu que la vitesse de celui soit faible devant c .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron est

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -j \omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E}$$

soit

$$\vec{v}_e = -j \frac{e}{\omega m_e} \vec{E}$$

Comme

$$\vec{j} = \sum_k n_k \cdot q_k \cdot \vec{v}_k = -n_e e \vec{v}_e = \gamma \vec{E}$$

on trouve conductivité du plasma :

$$\tilde{\gamma} = j \frac{n_e e^2}{\omega m_e} = j \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

avec la pulsation plasma $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$.

2.b) Équations de propagation et de dispersion dans un plasma

Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{grad} (div \vec{E}) - \overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{E}) = -\overrightarrow{rot} \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{rot} \vec{B})$$

d'après Maxwell Gauss. L'équation de Maxwell Ampère donne pour les champs complexes :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \cdot \tilde{\vec{j}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} \right)$$

qui devient d'après la loi d'Ohm :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} + j \frac{1}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}$$

On s'intéresse à une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement $\tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k}z - \varphi)} \vec{u}$. En remplaçant dans l'équation de propagation,

$$-\vec{k}^2 = \frac{-\omega^2}{c^2} + \mu_0 \left(j \frac{n_e e^2}{\omega m_e} \right) (-j \omega) = \frac{-\omega^2}{c^2} + \omega \frac{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega_p^2}{\omega}$$

On trouve la relation de dispersion : $\vec{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ qui est la relation de Klein Gordon (cqfd).

2.c) Comportement du plasma vis-à-vis de l'onde

- Pour $\omega > \omega_p$, il existe une solution réelle à l'équation de Klein Gordon : $k = k_r$ donc

$$\vec{\tilde{E}} = \tilde{E}_0 e^{-j(\omega t - k_r z)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_r z + \varphi_0) \vec{u}_x$$

L'onde se propage sans atténuation (pas d'effet Joule).

- Pour $\omega < \omega_p$, la solution de l'équation de Klein Gordon est imaginaire pure $k = j k_i$, donc

$$\vec{\tilde{E}} = \tilde{E}_0 e^{-j(\omega t - j k_i z)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-k_i z} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_x$$

(c'est une onde évanescence).

Bien entendu, pour que le signal GPS passe à travers l'ionosphère, il faut que les fréquences associées à L1 et L2 soient supérieures à $\frac{\omega_p}{2\pi}$.

2.d) "La ionosphère est un milieu dispersif (c'est-à-dire que que l'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde) : son effet est différent sur les deux porteurs L1 et L2." car $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, d'où $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

dépend de ω , donc de la longueur d'onde.

2.e) La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{2\omega}{2c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}}$ soit $v_g = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c$. L'ionosphère "ralentit la propagation du message radio" car $v_g < c$.

2.f) La durée que met le signal pour aller du satellite au récepteur est

$$\tau' = \frac{d - \ell}{c} + \frac{\ell}{v_g} = \tau + \Delta t$$

avec le « délai ionosphérique » $\Delta t = \frac{\ell}{v_g} - \frac{\ell}{c}$.

2.g) Le « délai ionosphérique » pour une épaisseur ℓ d'ionosphère est

$$\Delta t = \frac{\ell}{v_g} - \frac{\ell}{c} = \ell \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\ell}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \approx \frac{\ell}{c} \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\ell}{2c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Comme $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$, $\Delta t = \frac{e^2}{2c\varepsilon_0 m_e \omega^2} n_e \ell$ est bien proportionnel à la quantité d'électrons libres $n_e \ell$ rencontré sur le chemin.

2.h) Pour

- le signal L1 : on mesure $\tau'_1 = \tau + \Delta t_1$ avec $\Delta t_1 = \frac{e^2}{2c\varepsilon_0 m_e \omega_1^2} n_e \ell$;
- le signal L2 : on mesure $\tau'_2 = \tau + \Delta t_2$ avec $\Delta t_2 = \frac{e^2}{2c\varepsilon_0 m_e \omega_2^2} n_e \ell$.

Donc

$$\tau'_1 - \tau'_2 = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \frac{e^2}{2c\varepsilon_0 m_e} n_e \ell$$

Ainsi

$$\Delta t_1 = \frac{\tau'_1 - \tau'_2}{\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)} \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\tau'_1 - \tau'_2}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)}$$

d'où

$$\tau = \tau'_1 - \Delta t_1 = \tau'_1 - \frac{\tau'_1 - \tau'_2}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)}$$

et ainsi $d = c \left(\tau'_1 - \frac{\tau'_1 - \tau'_2}{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)} \right)$.