

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## Notes de cours

mardi 6 février 2018

### I- Ondes électromagnétiques dans le vide

#### 1. Caractéristiques des ondes électromagnétiques dans le vide

##### 1 Equation de d'Alembert suivie par les champs électromagnétiques dans le vide *théorème*

▷ Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

d'après Maxwell Gauss car dans le vide  $\rho = 0$ .

$$\Delta \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Faraday. Puisque dans le vide il n'y a pas de courants ( $\vec{j} = \vec{0}$ ), l'équation de Maxwell Ampère donne :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

▷ Le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell flux.

$$\Delta \vec{B} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Ampère puisque dans le vide il n'y a pas de courants ( $\vec{j} = \vec{0}$ ).

$$\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Faraday. Donc

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

⇒

dans le vide illimité, les équations de Maxwell entraînent

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

avec :  $\psi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ .

Dans le vide, la vitesse (de phase et de groupe) de propagation des ondes électromagnétique est la vitesse de la lumière,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 2 Structure d'une onde électromagnétique plane dans le vide *théorème*

en effet, Maxwell flux impose  $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ . Or, pour une onde plane se propageant suivant  $\vec{u}_z$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ , aussi  $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ , qui a pour solution  $B_z = 0$  (on ne retient pas les solutions constantes).

De même, Maxwell Gauss impose  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ . Donc  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$ .

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux à la direction de propagation : on dit que l'onde est transverse.

D'autre part, en cartésien, puisque  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ , on peut écrire  $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ . Aussi,

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'après Maxwell Faraday.

Or, pour une onde se propageant suivant  $\vec{u}_z$  (vers les  $z$  croissants),  $(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0$ , ce qui nous permet de déduire

$$\vec{u}_z \wedge \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E} - \vec{B} \right) = 0$$

Comme on exclue les solutions constantes, pour une onde se propageant suivant  $\vec{u}_z$  (vers les  $z$  croissants),

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

On voit donc que  $\vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{E}$ .  $\Rightarrow$

L'onde électromagnétique dans le vide est transverse :  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont orthogonaux à la direction de propagation.

$(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal direct.

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|.$$

Tout ce qui précède peut se résumer par

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

## Structure d'une onde plane progressive qui se propage suivant $z$ croissant. *schéma*

| La figure 1 représente la structure d'une onde plane progressive qui se propage suivant  $z$  croissant.

## Caractère vectoriel des ondes électromagnétiques *s'y retrouver*

| Les ondes électromagnétiques sont vectorielles, transverses.

## 2. Ondes planes progressives monochromatiques

### OPPH/OPPM et OPPHH *définition*

Une onde harmonique (ou monochromatique) est qualifiée de « plane » et progressive quand les surfaces équiphasées sont des plans :

$$\text{OPPH} : E = E(r) \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

Si en outre l'amplitude est uniforme l'onde est qualifiée de « plane et homogène » :

$$\text{OPPHH} : E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

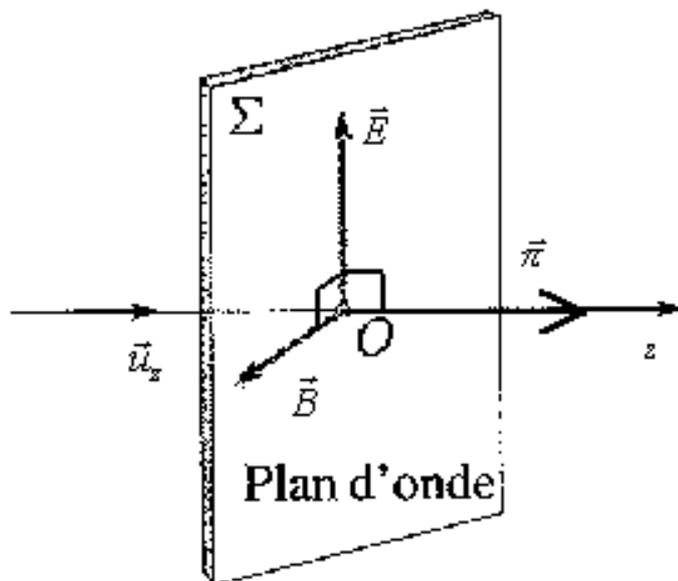


FIGURE 1 – Structure d’une onde plane progressive qui se propage suivant  $z$  croissant.

a) Divers domaines des ondes électromagnétiques

**Tous les domaines des ondes électromagnétiques : schéma**

La figure 2 représente les divers domaines des ondes électromagnétiques. On discerne :

- l’ARQS, approximation des régimes quasistationnaires, où les phénomènes ondulatoires ne se font pas sentir ( $\lambda \gg$  taille du système) ;
- les ondes hertziennes, pour lesquelles on dispose de détecteurs qui suivent les variations de l’amplitude de l’onde (si  $\nu < 10$  GHz) ;
- les ondes lumineuses (infra rouge, visible et ultra violet), pour lesquelles les détecteurs sont quadratiques ;
- les rayonnements ionisants (rayons X et  $\gamma$ ), pour  $\lambda < 1$  nm  $\Leftrightarrow \nu > 3 \times 10^{18}$  Hz.

**Les ondes hertziennes schéma**

La figure 3 représente la subdivision du domaine des ondes hertziennes. On voit que les longueurs d’ondes sont de tailles "humaines".

**Les ondes lumineuses : schéma**

La figure 4 représente le domaine des ondes lumineuses. Le visible n’est qu’une petite partie du spectre.

b) Utilisation des complexes pour les OPPM

**Notation complexe s’y retrouver**

On peut associer à l’OPPM réelle

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$$

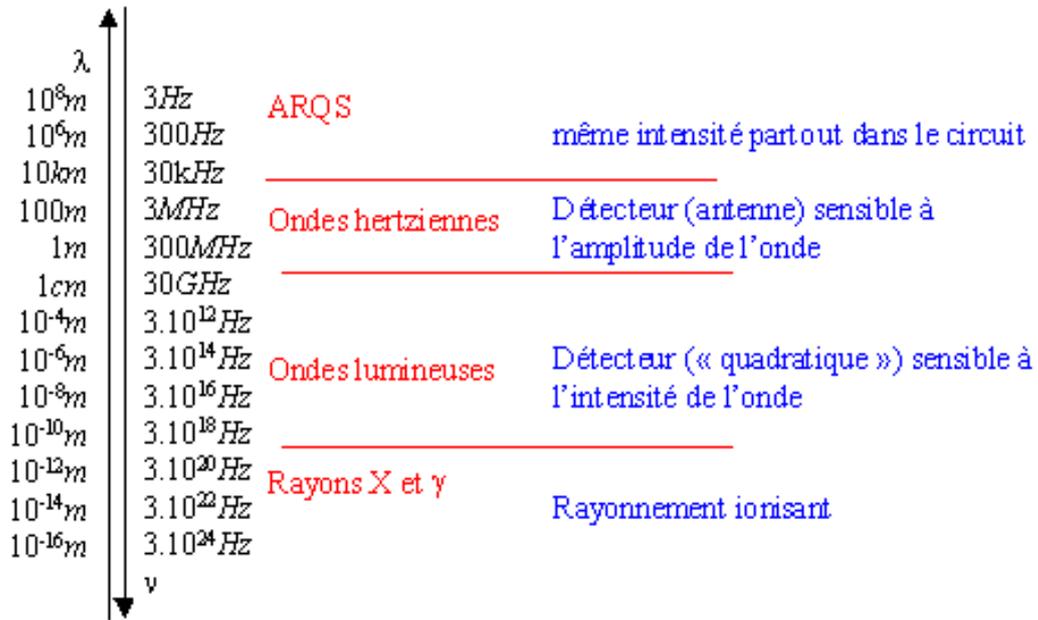


FIGURE 2 – Tous les domaines des ondes électromagnétiques :

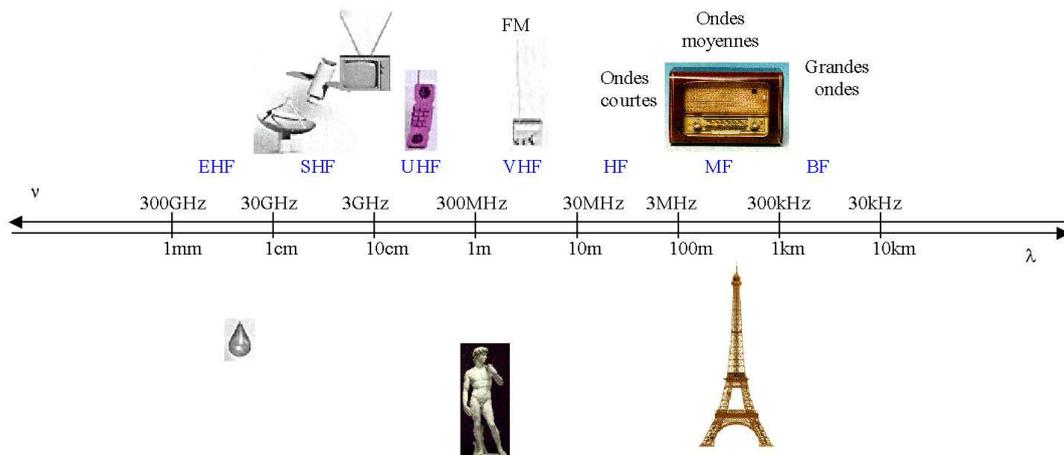


FIGURE 3 – Les ondes hertziennes

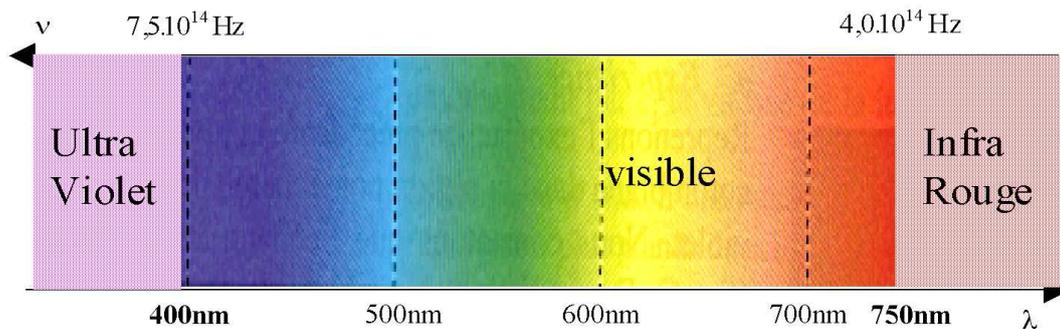


FIGURE 4 – Les ondes lumineuses :

l'OPPM complexe :

$$\tilde{\psi} = \psi_m \cdot e^{-i\omega \cdot t} \cdot e^{+i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot e^{+i\varphi}$$

NB : on aurait pu choisir une autre convention en changeant le signe dans l'exponentielle complexe. Aussi, il est très important de bien déclarer sa convention !

On passe du complexe au réel par

$$\psi(\vec{r}, t) = \Re(\tilde{\psi}) = \frac{\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^*}{2}$$

On peut remplacer  $\psi$  par  $\tilde{\psi}$  ( $\tilde{\psi} = \vec{E}, \vec{B}$ ) dans toutes les équations linéaires, en particulier, les équations de Maxwell.

### 3 Equations de Maxwell complexes *exercice*

▷ Montrer qu'avec les conventions que l'on a choisies, les opérateurs de dérivation sont à remplacer par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \\ \nabla \rightarrow +i\vec{k} \end{array} \right.$$

- ▷ Réécrire les équations de Maxwell en complexe.
- ▷ Réécrire la structure géométrique d'une OPPM en complexe.

▷ Trivial.

▷ Les équations de Maxwell réécrites avec des OPPM complexes deviennent

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \end{array} \right.$$

▷ Les champs électromagnétiques se déduisent des potentiels grâce aux formules suivantes

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = i\vec{k} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{V} + i\omega \vec{A} \end{array} \right.$$

▷ La structure de l'OPPM est telle que

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

### c) Photon



#### L'effet photo-électrique *vidéo*

L'effet photoélectrique n'a lieu qu'en présence de lumière ultraviolette.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



#### Le photon associé à une OPPM *définition*

à toute OPPM qui se propage dans le vide illimité,

de fréquence  $\nu$  et de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$

de vecteur d'onde  $\vec{k}$ ,

on peut associer une particule, le photon, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une masse nulle} \\ \text{une vitesse } c \\ \text{une énergie : } E_\varphi = \hbar\omega = h\nu \\ \text{une quantité de mouvement : } \vec{p}_\varphi = \hbar\vec{k} \end{array} \right.$$

où  $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$  J·s est la constante de Planck réduite ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ).

#### 4 Les caractéristiques d'une OPPM et celles d'un photon *exercice*

On s'intéresse à une OPPM qui est un flux de photons avec une densité volumique moyenne  $n_\varphi$  (en  $m^{-3}$ ).

▷ Montrer que la moyenne de la densité volumique d'énergie de l'OPPM (en  $J \cdot m^{-3}$ ) est

$$\langle e_{em} \rangle = n_\varphi \cdot E_\varphi$$

▷ Montrer que la moyenne du vecteur de Poynting de l'OPPM (en  $W \cdot m^{-2}$ ) est

$$\langle \vec{\pi} \rangle = c^2 \cdot n_\varphi \cdot \vec{p}_\varphi$$

▷

▷

$$\langle \vec{\pi} \rangle = c \cdot e_{em} \cdot \vec{u}_z = c \cdot n_\varphi \cdot \hbar \cdot \omega \cdot \vec{u}_z = c \cdot n_\varphi \cdot \hbar \cdot k \cdot c \cdot \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle = c^2 \cdot n_\varphi \cdot \vec{p}_\varphi$$

#### d) Etude énergétique

#### 5 Energie d'une onde électromagnétique plane dans le vide *exercice*

Montrer que la densité volumique d'énergie électromagnétique  $e_{em} = e_e + e_m$  d'une onde électromagnétique plane est équipartie entre terme électrique ( $e_e$ ) et terme magnétique ( $e_m$ )

$$e_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 = e_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} = \frac{e_{em}}{2}$$

$$B = \frac{E}{c} \Rightarrow \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2 \cdot c^2 \cdot \mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2}$$

#### 6 Vecteur de Poynting d'une onde plane : *exercice*

▷ Montrer que  $\vec{\pi} = c \cdot e_{em} \vec{u}_z$ .

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{u}_z = \frac{c \cdot B^2}{\mu_0} \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$\vec{\pi} = c \cdot e_{em} \vec{u}_z.$$

#### Direction de propagation et vecteur de Poynting *s'y retrouver*

Dans le vide, l'énergie électromagnétique d'une onde plane se propage dans la même direction que l'onde ( $\vec{u}_z$ ), suivant le vecteur de Poynting.

#### Grandeurs énergétiques et complexes *s'y retrouver*

On ne peut pas remplacer les grandeurs réelles par les grandeurs complexes associées dans des expressions non linéaires (comme celles relatives à l'énergie). Cependant, la valeur moyenne (dans le temps) du vecteur de Poynting vaut

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

et la valeur moyenne (dans le temps) de la densité d'énergie électromagnétique est

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \Re(\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^*) + \frac{1}{4\mu_0} \Re(\tilde{\vec{B}} \cdot \tilde{\vec{B}}^*)$$

### 7 Ordres de grandeur de flux énergétiques *exercice*

- ▷ Citer les ordres de grandeur des flux énergétiques surfaciques moyens et des champs électriques associés :
- dans le cas d'un laser hélium-néon dont le rayon est de diamètre 1 mm et la puissance 1 mW ;
  - dans le cas du flux solaire sur Terre ( $1,36 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ) ;
  - dans le cas où l'on est contre un téléphone portable qui émet une puissance  $100 \mu\text{W}$ .

▷ Les ordres de grandeur de  $\Pi$  et  $E = \sqrt{\frac{2\Pi}{\epsilon_0 c}}$  sont les suivants :

- dans le cas d'un laser hélium-néon,  $\Pi = \frac{1 \times 10^{-3}}{\pi \frac{(10^{-3})^2}{4}} \approx 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $E = \sqrt{\frac{2 \times 10^3}{8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8}} \approx 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- dans le cas du flux solaire sur Terre, les valeurs sont identiques ;
- dans le cas d'un téléphone portable à une distance  $10^{-2} \text{ m}$ ,  $\Pi = \frac{10^{-4}}{10^{-4}} \approx 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , soit  $E = \sqrt{\frac{2 \times 1}{8,85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8}} \approx 30 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

### 3. Polarisation des ondes planes progressives monochromatiques

#### Projections du champ électrique dans un plan orthogonal à la direction de propagation de l'onde *s'y retrouver*

On s'intéresse à une OPPM (de pulsation  $\omega$ ) qui se propage suivant les  $z$  croissants. On fixe  $z$  et on regarde au cours du temps  $t$  l'évolution du champ électrique dans un plan perpendiculaire à  $\vec{u}_z$  (avec  $\vec{u}_z$  qui vient vers nous).

On peut écrire, sans perdre en généralité, les projections  $E_x$  (suivant  $\vec{u}_x$ ) et  $E_y$  (suivant  $\vec{u}_y$ ) sous la forme

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \end{cases}$$

#### 8 Différentes polarisations d'une OPPM *théorème*

- en règle générale (si  $\varphi \neq 0 [\pi]$ ), le vecteur  $\vec{E}$  décrit une ellipse :
- si  $\varphi = 0 [\pi]$ , le vecteur  $\vec{E}$  décrit un segment de droite :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos \psi \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin \psi \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

- si  $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$  et  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ , le vecteur  $\vec{E}$  décrit un cercle de rayon  $E_0$ .  
⇒

La polarisation d'une OPPM qui se propage vers les  $z$  croissants avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

avec  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  positifs, est :

- elliptique en règle générale (si  $\varphi \neq 0 [\pi]$ ),
- rectiligne si  $\varphi = 0 [\pi]$  ou si  $E_{0x} E_{0y} = 0$ ,
- circulaire si  $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$  et  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ .

### 9 Hélicité *théorème*

⇒

Dans le cas d'une OPPM qui se propage vers les  $z$  croissants avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

avec  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  strictement positifs,

- si  $\varphi \in ]0, \pi[$ , l'hélicité est positive (on parle de polarisation elliptique gauche);
- si  $\varphi \in ]-\pi, 0[$ , l'hélicité est négative (on parle de polarisation elliptique droite).



### Vade mecum sur la polarisation des ondes électromagnétiques *schéma*

La figure 5 représente les diverses polarisations possibles en fonction de  $\varphi$ .

## II- Polariseurs et lames à retard

### 1. Polariseurs



#### Effet d'un polariseur *s'y retrouver*

Le polariseur projette le champ électrique suivant son axe  $\vec{u}_{x'}$ , et éteint la composante perpendiculaire (suivant  $\vec{u}_{y'}$ ).

Le champ électrique précédent le polariseur a pour composantes suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\begin{cases} E_x(t) \\ E_y(t) \end{cases}$$

Si l'axe  $\vec{u}_{x'}$  du polariseur fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{u}_x$ , le champ électrique de l'onde après passage à travers le polariseur a pour composantes suivant  $\vec{u}_{x'}$  et  $\vec{u}_{y'}$

$$\begin{cases} E_{x'} = E_x(t) \cdot \cos \theta + E_y(t) \cdot \sin \theta \\ E_{y'} = 0 \end{cases}$$

### 10 Loi de Malus *théorème*

$I_1 = \langle E_{x'}^2 \rangle$  est l'intensité lumineuse après un polariseur d'axe  $\vec{u}_{x'}$ , car  $E_{y'} = 0$ . L'analyseur est un polariseur dont l'axe  $\vec{u}_{x''}$  fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{u}_{x'}$ .  $I_2 = \langle E_{x''}^2 \rangle$  est l'intensité lumineuse après l'analyseur, avec  $E_{x''} = E_{x'} \cdot \cos(\theta)$ . Ainsi : ⇒

Après un analyseur qui fait un angle  $\theta$  avec une polarisation rectiligne, l'intensité est multipliée par  $\cos^2 \theta$  :

$$I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1$$

### 2. Lames à retard



#### Lames anisotropes *s'y retrouver*

les milieux anisotropes biréfringents sont caractérisés par deux axes orthogonaux à chacun desquels on associe un indice différent. A ces deux indices correspondent évidemment des vitesses de phase différentes. L'axe de plus grand indice (noté  $n_L$ ), donc de plus faible vitesse, est appelé axe lent (c'est  $Ox$  dans la suite) et l'autre axe rapide ( $Oy$  d'indice noté  $n_R$ ).

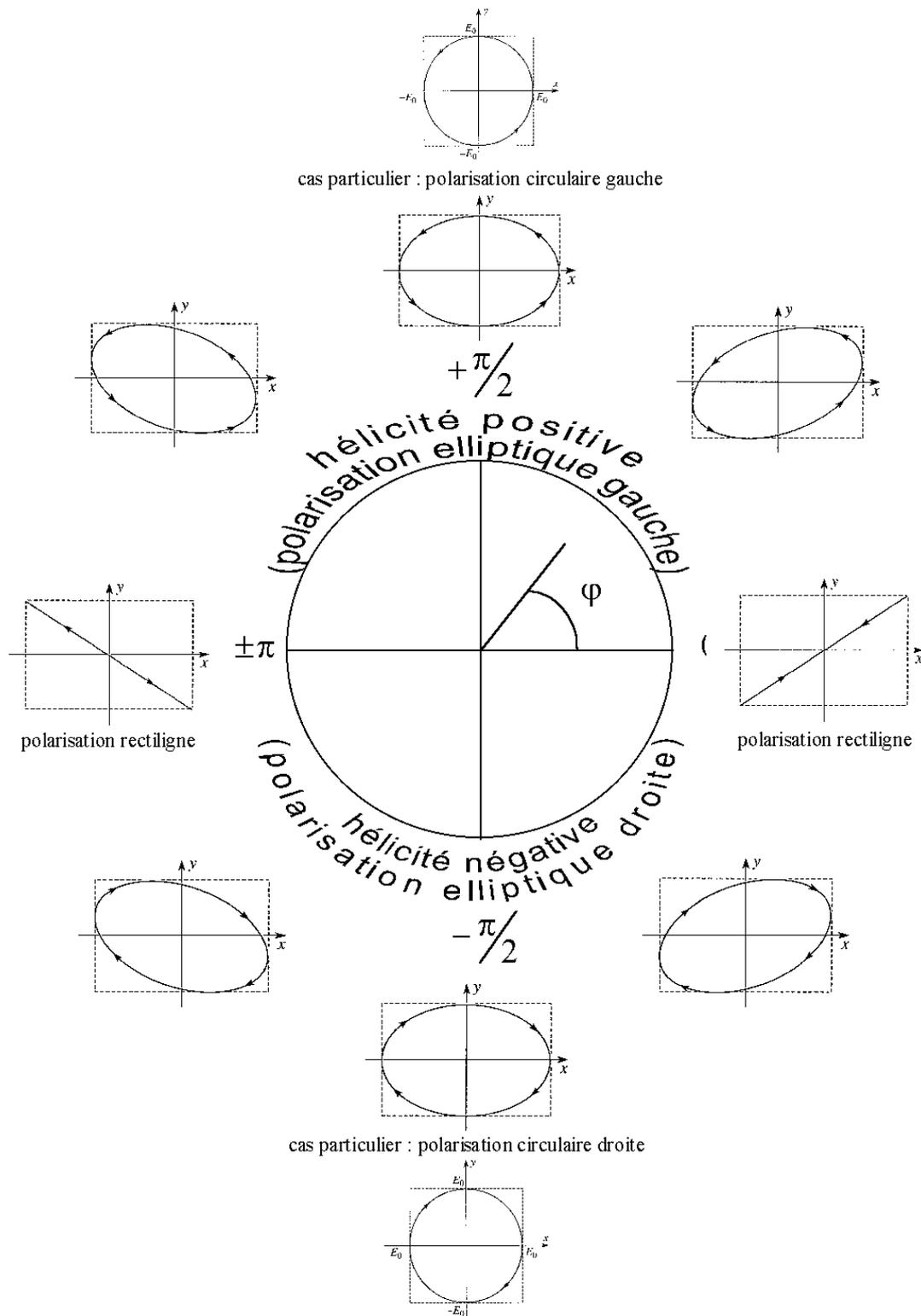


FIGURE 5 – Vade mecum sur la polarisation des ondes électromagnétiques

**Axes neutres d'une lame à retard** *définition*

Une onde pénétrant en incidence normale dans une lame à retard, et polarisée suivant l'axe lent ou l'axe rapide, ressortira du milieu avec la même polarisation. C'est pour cela qu'on parle d'axes neutres.

**11 Effet d'une lame à retard** *exercice*

On s'intéresse à une onde de polarisation quelconque. On la décompose suivant les deux axes  $Ox$  et  $Oy$ . Les deux composantes ne se propageant pas à la même vitesse selon chaque axe de polarisation, elles ressortiront déphasées l'une par rapport à l'autre, ce qui peut modifier notablement l'état de polarisation de l'onde.

▷ Montrer que la lame introduit un déphasage  $\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} (n_L - n_R) \cdot e$  entre les deux directions de polarisation.

En prenant l'origine de la propagation à l'entrée de la lame, le champ électrique peut s'écrire

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \end{cases}$$

A la sortie de la lame, d'épaisseur  $e$  suivant  $Oz$ , le champ sera :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} n_L \cdot e) \\ E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi - \frac{2\pi}{\lambda} n_R \cdot e) \end{cases}$$

En ramenant l'origine de la propagation à la sortie de la lame pour la composante lente (c'est à dire en posant  $t' = t - \frac{2\pi \cdot n_L \cdot e}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide), sera par la suite de la forme :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega \cdot t') \\ E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega \cdot t' - \varphi - \Delta\phi) \end{cases}$$

avec

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda} (n_L - n_R) \cdot e \Rightarrow \varphi' = \varphi + \Delta\phi$$

**Lame à retard (ou anisotrope) :** *définition*

Une OPPM qui se propage vers les  $z$  croissants qui pénètre dans une lame anisotrope avec

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$

(avec  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  positifs), ressort de la lame anisotrope telle que

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \text{ et } E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi')$$

avec

- pour une lame demi-onde (ou " $\frac{\lambda}{2}$ ") :  $\varphi' = \varphi \pm \pi$ ,
- pour une lame quart d'onde (ou " $\frac{\lambda}{4}$ ") :  $\varphi' = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ .

**Effet d'une lame demi onde** *s'y retrouver*

Une onde entrante rectiligne donne une onde sortante rectiligne, les deux directions de polarisation entrante et sortante étant symétriques par rapport aux axes de la lame.

Une onde entrante elliptique gauche ressort elliptique droite et réciproquement, les axes des ellipses initiale et finale étant symétriques par rapport aux axes neutres de la lame.

### ✳ Effet d'une lame quart d'onde *s'y retrouver*

Une onde entrante, polarisée rectilignement donne une onde sortante elliptique, les axes de la lame étant les axes de l'ellipse.

En outre, si la direction de polarisation d'une onde entrante rectiligne coïncide avec une bissectrice des axes de la lame, l'onde sortante est circulaire.

Réciproquement, une onde entrante elliptique dont les axes de l'ellipse coïncident avec les axes de la lame donne une onde sortante rectiligne.

Une onde entrante circulaire donne une onde sortante rectiligne dont la direction de polarisation coïncide avec une des bissectrices de la lame.

## III- Applications de la polarisation

### a) Polarisation ou non de la lumière

#### 👁 Polarisation de la lumière naturelle *vidéo*

La lumière naturelle n'est pas polarisée. En effet, les sources classiques de lumière (mais aussi la plupart des lasers) délivrent une lumière qui n'est pas polarisée. Aucune direction privilégiée n'est détectable avec un analyseur. On peut partiellement polariser la lumière naturelle par diffusion, comme on peut le vérifier si on analyse la lumière diffusée par de l'eau savonneuse (ou du lait) ; ou encore par réflexion, sur un dioptre séparant le milieu d'indice  $n_1$  du milieu d'indice  $n_2$ .

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

#### ✳ Angle de Brewster *s'y retrouver*

La polarisation est totale pour un angle de réflexion particulier, appelé angle de Brewster

$$i_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Avec le verre (dans ce cas,  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1,5$ ),  $i_B = 56^\circ$ .

### b) Détermination d'une polarisation inconnue

#### ✳ Etude de la lumière naturelle *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière naturelle, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

Si on place une lame quart d'onde puis un analyseur après une source de lumière naturelle, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

#### ✳ Etude de la lumière polarisée circulairement : *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée circulairement, on observe en sortie de l'analyseur une intensité constante par rotation de l'analyseur.

Si on place une lame quart d'onde puis un analyseur après une source de lumière polarisée circulairement, on observe par rotation de l'analyseur une intensité nulle et une seule.

Pour déterminer le sens de rotation de l'onde polarisée circulairement :

- placer une lame quart d'onde (en sortie de la lame, l'onde est polarisée rectilignement), puis un analyseur dont la direction d'analyse est parallèle à l'axe lent de la lame,
- tourner l'analyseur pour obtenir l'extinction : l'angle dont on le tourne est  $\pm \frac{\pi}{4}$ , le sens de rotation

de l'analyseur étant l'opposé du sens de la vibration (étant convenu que l'on regarde l'analyseur, la lumière venant vers nous).

### Etude de la lumière polarisée rectilignement *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée rectilignement, on observe par rotation de l'analyseur une intensité nulle et une seule (dans ce cas la direction d'analyse est orthogonale à la polarisation rectiligne).

### Etude de la lumière polarisée elliptiquement *s'y retrouver*

si on place un analyseur après une source de lumière polarisée elliptiquement, on observe par rotation de l'analyseur un minimum d'intensité lumineuse (dans ce cas la direction d'analyse est parallèle au petit axe de l'ellipse) et un maximum d'intensité lumineuse (dans ce cas la direction d'analyse est parallèle au grand axe de l'ellipse).

Pour déterminer le sens de rotation et l'ellipticité :

- on place l'analyseur sur un minimum d'intensité,
- on place une lame quart d'onde de telle sorte que son axe lent coïncide avec la direction d'analyse (après la lame quart d'onde, l'onde est donc polarisée rectilignement),
- on tourne l'analyseur d'un angle  $\beta$  (avec  $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ ) jusqu'à l'extinction du signal.

La vibration elliptique est alors parfaitement déterminée :

- les axes de l'ellipse coïncident avec la direction initiale de l'axe de l'analyseur et la direction orthogonale,
- l'ellipticité de l'onde définie par  $\frac{E_{\text{petit axe}}}{E_{\text{grand axe}}}$  (c'est-à-dire la longueur du demi petit axe sur celle du demi grand axe) est  $\tan \beta$ ,
- le sens de rotation de la vibration est opposé au sens de rotation de l'analyseur (lorsque que nous le regardons de sorte que la lumière vienne vers nous).

### Comment caractériser une polarisation ? *schéma*

La figure 6 représente la marche à suivre pour déterminer une polarisation inconnue.

### Différentes polarisations *vidéo*

L'effet d'un analyseur et de lames à retard sur différentes polarisations permet de caractériser celles-ci. Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## c) Changement de polarisation

### Molécules optiquement actives : *s'y retrouver*

une molécule chirale n'est pas superposable à son image dans un miroir. Une telle molécule est optiquement active : elle fait tourner le plan de polarisation de la lumière.

### Loi de Biot *à retenir*

on s'intéresse à un faisceau de lumière traversant sur une distance  $\ell$  une solution de concentration  $C$  d'une molécule optiquement active. La polarisation de la lumière tourne alors d'un angle

$$\alpha = \theta_0 \cdot C \cdot \ell$$

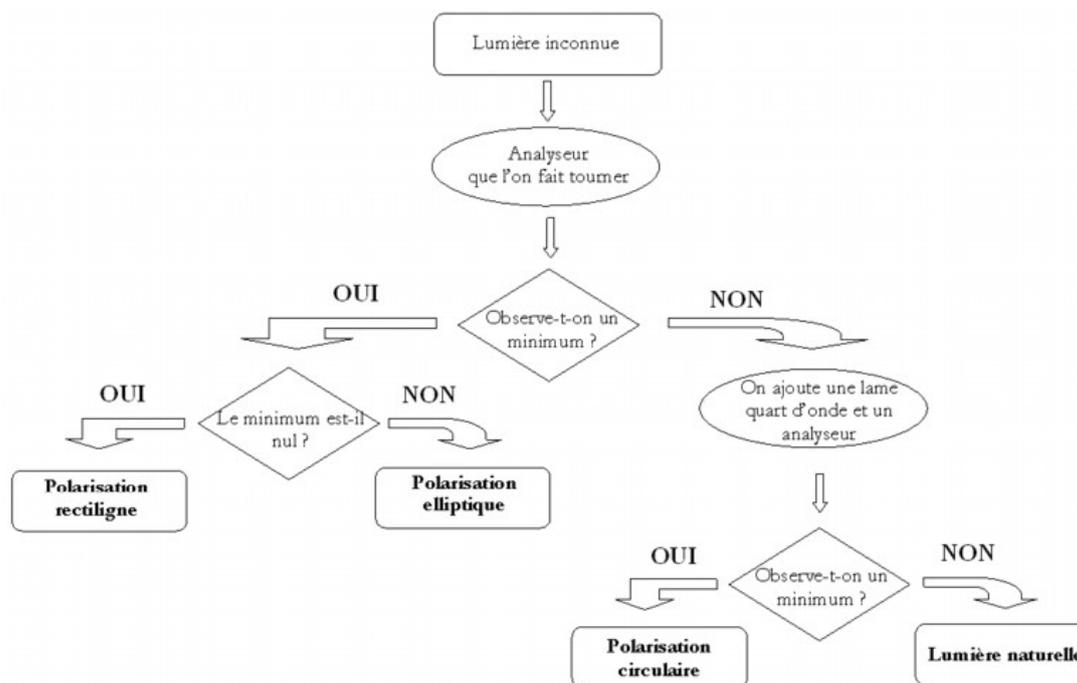


FIGURE 6 – Comment caractériser une polarisation ?

• où  $\theta_0$  est l'activité optique, caractéristique de la molécule.

### 🌀 Application de la loi de Biot *s'y retrouver*

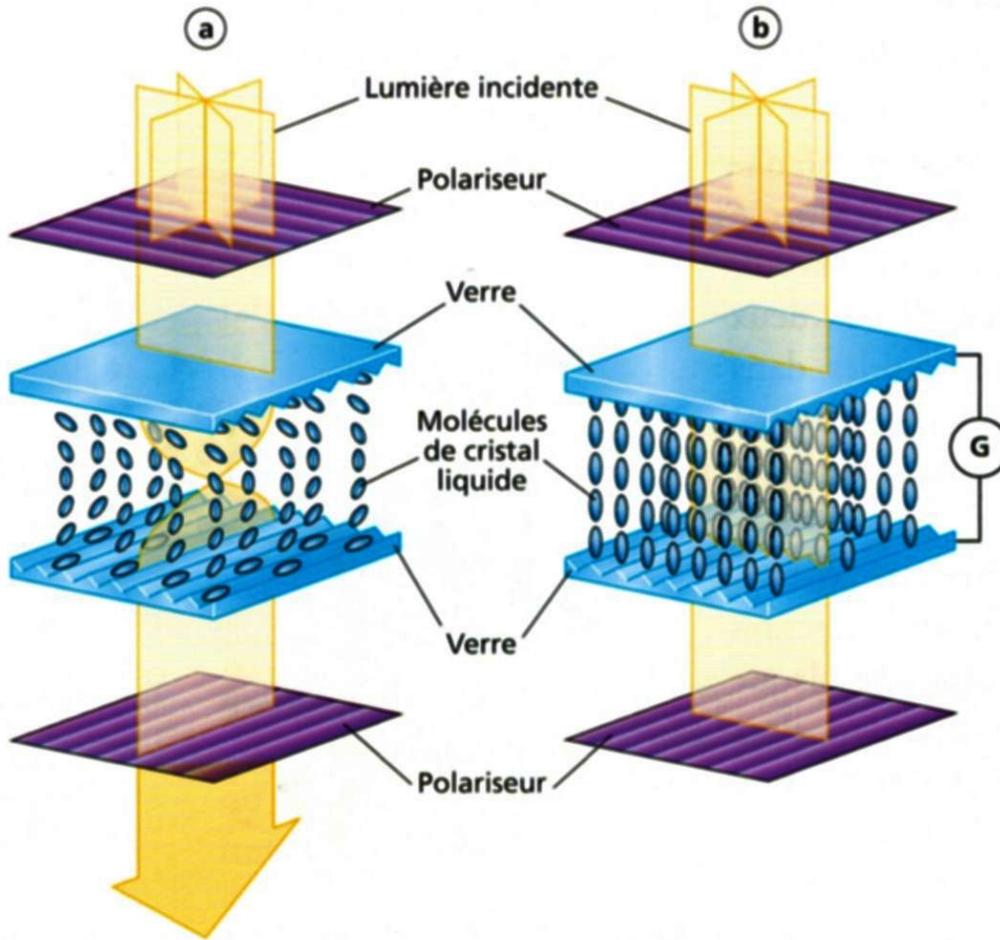
on peut, grâce à la loi de Biot, en déterminant expérimentalement l'angle  $\alpha$  dont a tourné la polarisation dans un milieu de longueur  $\ell$  contenant des molécules optiquement actives, d'en déduire leur concentration. Ceci est utilisé en particulier pour mesurer la teneur en sucre d'un vin, par exemple.

### 👁 Les écrans LCD *schéma*

La figure 7 représente comment la polarisation est utilisée pour allumer plus ou moins un pixel grâce aux cristaux liquides.

### 👁 Le cinéma 3D *schéma*

La figure 8 représente comment la polarisation peut être utilisée pour la stéréovision (vision en trois dimensions).



**8** En éclairant une cellule de cristaux liquides placée entre deux polariseurs croisés, on obtient un interrupteur de lumière : (a) hors tension, la direction de polarisation de la lumière tourne de 90° grâce à l'effet nématique torsade, de sorte qu'elle peut traverser le second polariseur ; (b) sous tension, la direction de polarisation de la lumière n'est pas modifiée par les cristaux liquides, et le faisceau se trouve alors bloqué par le second polariseur.

FIGURE 7 – Les écrans LCD

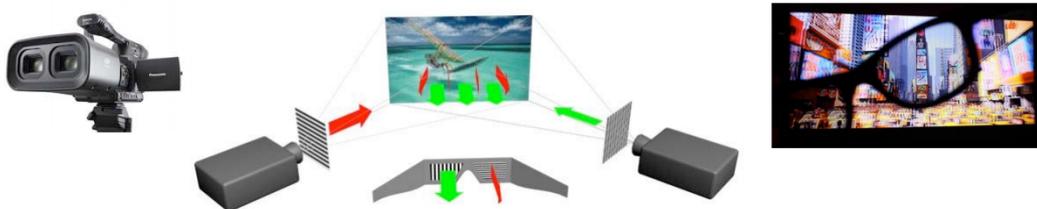


FIGURE 8 – Le cinéma 3D

### § 1) Modélisation du cinéma 3D *exercice*

Lors du tournage d'un film en 3D, une caméra double, constituée de deux caméras proches (comme deux yeux !) enregistre deux films. Le cinéma 3D permet la stéréovision, c'est-à-dire que l'œil gauche du spectateur voit la projection du film pris par la caméra gauche et l'œil droit du spectateur voit la projection du film pris par la caméra droite.

1) On suppose que la projection du film enregistré par la caméra gauche est polarisée horizontalement, tandis que la projection du film enregistré par la caméra droite est polarisée verticalement.

1.a) Comment doivent être les lunettes du spectateur ?

1.b) Quel problème apparaît si le spectateur penche la tête ?

2) On suppose que la projection du film enregistré par la caméra gauche est polarisée circulairement gauche, tandis que la projection du film enregistré par la caméra droite est polarisée circulairement droite.

2.a) Le problème précédent existe-t-il toujours si le spectateur penche la tête ?

2.b) Comment doivent être les lunettes du spectateur ?

#### Correction :

1) *Polarisation rectiligne*

1.a) *Le verre gauche doit être un polariseur qui laisse passer les ondes polarisées horizontalement, tandis que le verre droit est un polariseur qui laisse passer les ondes polarisées verticalement*

1.b) *Si le spectateur penche la tête, un œil verra un peu des deux images !*

2) *Polarisation circulaire.*

2.a) *Le problème précédent n'existe plus : ouf !*

2.b) *Le verre de gauche des lunettes du spectateur doit laisser passer les ondes polarisées circulairement gauche, donc doit être composé d'une lame quart d'onde suivie d'un polariseur à  $45^\circ$  des axes neutres. Pour le verre de droite, c'est la même chose, sauf que le polariseur doit être à  $-45^\circ$  (ou bien avec une lame demi onde avant). **Éléments de correction :***

*Polariseurs ou quart d'onde suivie d'un polariseur.*

# Technique à maîtriser

jeudi 8 février 2018

## I- Les capacités exigibles

### 1. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Établir et citer les équations de propagation.  
 Établir et décrire la structure d'une OPPHH.  
 Utiliser le principe de superposition d'OPPHH.  
 Relier la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde.  
 Relier le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck.  
 Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie, etc..) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés.

### 2. Polarisation des ondes électromagnétiques



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation d'une onde.  
 Reconnaître une lumière non polarisée.  
 Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.

## II- Méthodes

### 1. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide



**A) Des équations de Maxwell aux ondes électromagnétiques** *méthode*

Il faut repartir des équations de Maxwell et appliquer  $\Delta \vec{E} = \overrightarrow{grad} (div \vec{E}) - \overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{E})$

### 2. Polarisation des ondes électromagnétiques



**B) Etude de la polarisation des ondes électromagnétiques** *méthode*

Il faut d'abord faire tourner un analyseur devant la lumière à analyser.  
 - Si la lumière s'éteint, il s'agit d'une polarisation rectiligne,  
 - si l'intensité lumineuse présente un minimum, il s'agit d'une polarisation elliptique,  
 - si l'intensité est constante, il peut s'agir d'une polarisation circulaire ou bien d'une lumière non polarisée.  
 Pour différencier ces deux derniers cas, il faut alors introduire une lame quart d'onde devant l'analyseur.  
 En tournant l'analyseur,  
 - si la lumière s'éteint il s'agit d'une polarisation circulaire,  
 - sinon (si l'intensité est constante) il s'agit d'une lumière non polarisée.

### III- Exercices

#### 1. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

##### 1.1) Longueurs d'onde de quelques ondes radios

- 1) Déterminer la longueur d'onde  $\lambda$ , le nombre d'onde  $\sigma$  en  $cm^{-1}$  et la norme du vecteur d'onde  $k$  pour :
- une station grande onde (de fréquence  $\nu = 250kHz$ ) ;
  - une station FM (de fréquence  $\nu = 100MHz$ ) ;
  - un téléphone portable (de fréquence  $\nu = 1,8GHz$ ).

- 1)  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ,  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$  et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Soit :
- Station grande onde  $\nu = 250kHz \Rightarrow \lambda = 1,20km$ ,  $\sigma = 8,33 \cdot 10^{-6} cm^{-1}$  et vecteur d'onde  $k = 5,24 \cdot 10^{-3} rad \cdot m^{-1}$  ;
  - Station FM  $\nu = 100MHz \Rightarrow \lambda = 3,00m$ ,  $\sigma = 3,33 \cdot 10^{-3} cm^{-1}$  et  $k = 2,09 rad \cdot m^{-1}$  ;
  - Téléphone portable  $\nu = 1,8GHz \Rightarrow \lambda = 17cm$ ,  $\sigma = 6,0 \cdot 10^{-2} cm^{-1}$  et  $k = 38 rad \cdot m^{-1}$ .

##### 1.2) Caractéristiques ondulatoires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $R = 1,0mm$  d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8nm$ . La puissance moyenne émise est  $P_e = 1,0mW$ .

On donne :  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$ .

- 1) Calculer les amplitudes
- $E_{max}$  du champ électrique ;
  - et  $B_{max}$  du champ magnétique.

- 1)  $P_e = c \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot E_{max}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{2 \cdot \mu_0} \right) \pi \cdot R^2$ , avec  $B_{max} = \frac{E_{max}}{c}$ , donc :
- $E_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_e}{\epsilon_0 \cdot c \cdot \pi \cdot R^2}} = 4,9 \cdot 10^2 V \cdot m^{-1}$  ;
  - $B_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_0 \cdot P_e}{c \cdot \pi \cdot R^2}} = 1,6 \cdot 10^{-6} T$ .

##### 1.3) Caractéristiques corpusculaires de l'onde émise par un laser hélium-néon

Un laser hélium-néon émet un faisceau lumineux cylindrique de rayon  $R = 1,0mm$  d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8nm$ . La puissance moyenne émise est  $P_e = 1,0mW$ .

On donne :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ .

- 1) Déterminer le nombre de photons
- $n$  par unité de volume dans le faisceau ;
  - $N$  de photons émis par seconde par le laser.

- 1)  $P_e = \frac{n \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot c \cdot dt) \cdot h \frac{c}{\lambda}}{dt}$  donc :
- $n = \frac{P_e \cdot \lambda}{\pi \cdot R^2 \cdot h \cdot c^2} = 3,4 \cdot 10^{12} m^{-3}$  ;
  - $N = n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot c = \frac{P_e \cdot \lambda}{h \cdot c} = 3,2 \cdot 10^{15} s^{-1}$ .

##### 1.4) Onde sphérique

On s'intéresse à une onde sphérique monochromatique, de pulsation  $\omega$  et de centre  $O$ . Son amplitude est de la forme :  $A(\vec{r}, t) = a(r) \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

- Donner l'expression du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans le repère sphérique en distinguant les deux cas : onde convergente ou onde divergente.
- Pourquoi l'amplitude  $a(r)$  est-elle proportionnelle à l'inverse de la distance  $r$  ?

- 1)  $\vec{k} = +k \cdot \vec{u}_r$  dans le cas d'une onde divergente et  $\vec{k} = -k \cdot \vec{u}_r$  dans le cas d'une onde convergente.
- 2) Le vecteur de Poynting est  $\vec{\Pi} = C.A(\vec{r}, t)^2 \cdot \vec{u}_r$  où  $C$  est une constante. Or son flux à travers une sphère de centre  $O$  de rayon  $r$  est le même  $\forall r : \oint \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint \text{div}(\vec{\Pi}) \cdot d^3\tau = D \Rightarrow C.a(r)^2 \cdot 4.\pi.r^2 = D$ .

### 1.5) Les photons émis par le Soleil

Le flux solaire sur Terre est  $1,36 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ .

- 1) En déduire la puissance totale rayonnée par le Soleil, situé à 8 min lumière de la Terre.
- 2) Estimer l'ordre de grandeur du nombre de photons arrivant par seconde sur  $1\text{m}^2$ , sur la Terre.
- 3) A quelle distance du Soleil faudrait-il se placer pour recevoir 1 photon par seconde sur  $1\text{m}^2$ ?

- 1) La puissance totale rayonnée par le Soleil est

$$P = \Pi(r = d_{ST}) 4\pi d_{ST}^2 = 1,36 \times 10^3 \times 4\pi (8 \times 60 \times 3 \times 10^8)^2 = 4 \times 10^{26} \text{ W}$$

- 2) Comme les photons se déplacent à la vitesse  $c$ , que leur densité est  $n$ , il en a  $dN = n c dt d^2S$  qui traversent la surface  $d^2S$  pendant  $dt$ . Chacun ayant l'énergie  $h\nu$ , on trouve :

$$dN h\nu = \Pi dt d^2S \Rightarrow dN = \Pi(r = d_{ST}) \frac{dt d^2S}{h\nu}$$

AN en prenant  $\lambda \approx 500 \text{ nm} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \approx 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$  :

$$dN \approx 1,36 \times 10^3 \times \frac{1 \times 1}{2\pi \times 10^{-34} \times 6 \times 10^{14}} = 10^{21}$$

- 3) On reprend les précédents calculs pour une distance du Soleil notée  $r$  telle que  $dN = 1$  :

$$r = \sqrt{\frac{P dt d^2S}{4\pi h\nu}} \approx \sqrt{\frac{4 \times 10^{26}}{4\pi} \frac{1 \times 1}{2\pi \times 10^{-34} \times 6 \times 10^{14}}} = 10^{22} \text{ m} = 0,3 \times 10^{14} \text{ s} \cdot \text{lumière}$$

soit  $3 \times 10^7$  année lumière.

## 2. Polarisation des ondes électromagnétiques

### 2.6) Variation de l'intensité lumineuse avec la loi de Malus

Un faisceau parallèle de lumière traverse un polariseur fixe. Son intensité est notée  $I_0$  après ce polariseur. Le faisceau lumineux traverse ensuite un second polariseur dont l'axe fait un angle  $\theta$  avec l'axe du premier polariseur.

- 1) Déterminer l'intensité lumineuse  $I$  sortant du second polariseur (loi de Malus).
- 2) Initialement,  $\theta = \theta_i$ , et l'intensité lumineuse sortant du second polariseur est  $I_i$ . On fait varier  $\theta$  de  $d\theta \ll \pi$ .

**2.a)** Exprimer la variation relative  $\frac{dI}{I_i}$  de l'intensité lumineuse sortant du second polariseur, en fonction de  $\theta_i$  et  $d\theta$ .

Application :  $d\theta = 1^\circ$ , que vaut  $\frac{dI}{I_i}$

**2.b)** si  $\theta_i = 10^\circ$  ?

**2.c)** si  $\theta_i = 80^\circ$  ?

- 1)  $I = I_0 \cdot \cos^2(\theta)$ .

2)

**2.a)**  $\frac{dI}{I_i} = -2 \cdot \tan(\theta_i) \cdot d\theta$ .

**2.b)** si  $\theta_i = 10^\circ$ ,  $\frac{dI}{I_i} = -0,61\%$ .

**2.c)** si  $\theta_i = 80^\circ$ ,  $\frac{dI}{I_i} = -20\%$ .

### 2.7) Modulation de l'intensité lumineuse grâce à un polariseur tournant

Un faisceau parallèle de lumière naturelle non polarisée d'intensité  $I_0$  traverse un polariseur fixe.

1) Quelle est l'intensité  $I_1$  après ce polariseur ?

Le faisceau lumineux traverse ensuite un second polariseur qui tourne autour de l'axe optique avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

2) Déterminer l'intensité lumineuse  $I_2$  sortant du second polariseur.

(On supposera que le second polariseur tourne lentement devant le temps de réponse du détecteur).

3) Montrer que l'on a modulé l'intensité à la pulsation  $2\omega$ .

1)  $I_1 = \frac{I_0}{2}$ .

2)  $I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2(\omega.t + \varphi)$ .

3)  $I_2 = \frac{I_0}{4} (\cos(2\omega.t + 2\varphi) + 1)$ .

### 2.8) Détection de lumière au voisinage de l'extinction

Un polariseur et un analyseur sont réglés à l'extinction. On fait tourner l'analyseur d'un angle  $\alpha$ .

1) Exprimer l'intensité  $I_2$  après l'analyseur en fonction de  $I_1$ , l'intensité entre le polariseur et l'analyseur, et de  $\alpha$ .

2) Pour détecter de la lumière après le polariseur, il faut que l'intensité soit supérieure au bruit, qui vaut  $5\% \cdot I_1$ . Déterminer numériquement en secondes d'angle, l'angle minimum  $\alpha_{min}$  dont il faut tourner l'analyseur pour détecter de la lumière.

1) Loi de Malus :  $I_2 = \cos^2(\beta) \cdot I_1$  avec  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$  d'où :

$$I_2 = \sin^2(\alpha) \cdot I_1$$

2)  $I_2 = \sin^2(\alpha) \cdot I_1 > 5\% \cdot I_1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) \cdot I_1 > 5\%$  soit  $\alpha^2 > 5\% \Leftrightarrow$

$$\alpha > \alpha_{min} = \sqrt{5\%} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 46''$$

### 2.9) Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée rectilignement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère  $(Oxyz)$  du champ électrique  $\tilde{\vec{E}}$  de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation  $\omega$ , de norme de vecteur d'onde  $k$ ), polarisée rectilignement suivant l'axe  $(Oy)$  se propageant suivant une direction faisant, dans le plan  $(xOz)$ , un angle de  $45^\circ$  avec l'axe  $(Oz)$ .

On notera  $E_0$  l'amplitude réelle du champ électrique.

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = 0 \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot x - \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot z + \varphi)} \\ \tilde{E}_z = 0 \end{cases}$$

### 2.10) Décomposition d'une OPPM polarisée rectilignement

Soit une onde plane progressive monochromatique, de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$ , polarisée rectilignement selon un axe qui fait l'angle  $\alpha$  avec  $(Ox)$ .

1) Donner l'expression des composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique. On prendra  $E_0$  comme amplitude de ce champ.

2) Montrer que la superposition de deux OPPM de mêmes caractéristiques polarisées circulairement :

$$\begin{cases} E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z + \alpha) \\ E_y = E'_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z + \alpha) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z - \alpha) \\ E_y = -E'_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot z - \alpha) \end{cases}$$

redonne l'OPPM polarisée rectilignement. On exprimera  $E'_0$  en fonction de  $E_0$ .

- 1) L'expression des composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique est :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos \alpha \cos(\omega.t - k.z) \\ E_y = E_0 \cdot \sin \alpha \cos(\omega.t - k.z) \end{cases}$$

- 2) On calcule :

$$E_x = E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z + \alpha) + E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z - \alpha) = 2 \cdot E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\text{Puis } E_y = E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z + \alpha) - E'_0 \cdot \sin(\omega.t - k.z - \alpha) = 2 \cdot E'_0 \cdot \cos(\omega.t - k.z) \cdot \sin(\alpha)$$

Cela redonne bien l'OPPM polarisée rectilignement si on prend :

$$E'_0 = \frac{E_0}{2}$$

### 2.11) Polariseur circulaire

On s'intéresse à un filtre suivi d'un polariseur, lui-même suivi d'une lame quart d'onde avec ses lignes neutres à  $45^\circ$  de la direction du polariseur.

- 1) On envoie de la lumière naturelle dans le dispositif. Quelle est la polarisation de la lumière ainsi produite ? On retourne le dispositif donc la lumière naturelle rencontre d'abord la lame quart d'onde puis le polariseur.
- 2) La polarisation de la lumière produite a-t-elle changé ?

1) La lumière naturelle, après passage dans le polariseur, est polarisée rectilignement. Après passage dans la lame quart d'onde, elle devient polarisée circulairement.

2) En sens inverse, la lumière naturelle, après passage dans la lame, est toujours non polarisée. Le passage dans le polariseur la polarise rectilignement.

### 2.12) Détection de l'hélicité d'une polarisation circulaire

On s'intéresse à un filtre suivi d'une lame quart d'onde (qui ajoute un déphasage  $+\frac{\pi}{2}$  sur l'axe vertical), lui-même suivi d'un polariseur, qui peut librement tourner dans son plan. On envoie de la lumière polarisée circulairement dans le dispositif.

- 1) Pour quelle direction du polariseur obtient-on l'extinction si :
  - 1.a) la polarisation est circulaire gauche ?
  - 1.b) la polarisation est circulaire droite ?

1)

- 1.a) Pour une lumière polarisée circulairement gauche :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega.t) \end{cases}$$

le passage dans une lame quart d'onde donne une onde

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega.t + \frac{\pi}{2}) = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \end{cases}$$

polarisée rectilignement selon la première bissectrice. On obtient donc un minimum nul pour une direction du polariseur perpendiculaire à cette direction, c'est à dire selon la seconde bissectrice.

- 1.b) Pour une lumière polarisée circulairement droite :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \\ E_y = -E_0 \cdot \sin(\omega.t) \end{cases}$$

le passage dans une lame quart d'onde donne une onde

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega.t) \\ E_y = -E_0 \cdot \sin(\omega.t + \frac{\pi}{2}) = -E_0 \cdot \cos(\omega.t) \end{cases}$$

polarisée rectilignement selon la seconde bissectrice. On obtient un minimum nul pour une direction du polariseur perpendiculaire à cette direction, c'est à dire selon la première bissectrice.

### 2.13) Caractéristiques d'une OPPM

On se place dans un repère cartésien  $(Oxyz)$ .

Un faisceau laser émet une onde plane progressive (suivant  $\vec{u}$ ), monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ), polarisée rectilignement suivant  $(Oz)$ .

On pose  $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u})$ .

1) Ecrire, en fonction de  $E_0$  (l'amplitude du champ électrique) et de  $\lambda$ , les composantes dans le repère cartésien  $(Oxyz)$

- 1.a) du vecteur d'onde  $\vec{k}$ ,
- 1.b) du champ électrique  $\vec{E}$ ,
- 1.c) du champ magnétique  $\vec{B}$ ,
- 1.d) et du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ .

1) Composantes dans le repère cartésien  $(Oxyz)$  :

- 1.a)  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ ,
- 1.b)  $\vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}ct - \frac{2\pi}{\lambda}\cos(\theta).x - \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta).y\right) \cdot (0, 0, 1)$ ,
- 1.c)  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}ct - \frac{2\pi}{\lambda}\cos(\theta).x - \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta).y\right) \cdot (\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$ ,
- 1.d)  $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}ct - \frac{2\pi}{\lambda}\cos(\theta).x - \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta).y\right) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ .

### 2.14) Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée rectilignement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère  $(Oxyz)$  du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation  $\omega$ , de norme de vecteur d'onde  $k$ ), se propageant suivant l'axe  $(Ox)$ , polarisée rectilignement, le champ électrique faisant un angle de  $60^\circ$  avec l'axe  $(Oy)$ .

On notera  $E_0$  l'amplitude réelle du champ électrique.

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = 0 \\ \tilde{E}_y = \frac{1}{2}E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)} \\ \tilde{E}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)} \end{cases}$$

### 2.15) Expression complexe du champ électrique d'une OPPM polarisée elliptiquement

1) Donner les expressions complexes des projections dans le repère  $(Oxyz)$  du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde plane progressive monochromatique (de pulsation  $\omega$ , de norme de vecteur d'onde  $k$ ), se propageant suivant l'axe  $(Oy)$ , polarisée elliptiquement à droite.

Le demi grand axe de l'ellipse, étant suivant  $(Oz)$ , est trois fois plus grand que le demi petit axe (noté  $E_0$ ). Le déphasage entre les deux axes de l'ellipse est  $\frac{\pi}{2}$ .

1)

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot y + \varphi + \frac{\pi}{2})} \\ \tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_z = 3 \cdot E_0 \cdot e^{-j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot y + \varphi)} \end{cases}$$

# Travaux dirigés

## vendredi 9 février 2018

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

### Les antennes wifi

Extraits de l'article wikipédia "wifi"

disponible à l'adresse <https://fr.wikipedia.org/wiki/Wi-Fi>

#### une antenne utilisée aussi bien pour l'émission que pour la réception

Le Wi-Fi est un ensemble de protocoles de communication sans fil régis par les normes du groupe IEEE 802.11 (ISO/CEI 8802-11). Un réseau Wi-Fi permet de relier par ondes radio plusieurs appareils informatiques (ordinateur, routeur, smartphone, décodeur Internet, etc.) au sein d'un réseau informatique afin de permettre la transmission de données entre eux.

La portée atteint plusieurs dizaines de mètres en intérieur (généralement entre une vingtaine et une cinquantaine de mètres). Ainsi, des fournisseurs d'accès à Internet peuvent établir un réseau Wi-Fi connecté à Internet dans une zone à forte concentration d'utilisateurs (gare, aéroport, hôtel, train...). Ces zones ou points d'accès sont appelés bornes Wi-Fi ou points d'accès Wi-Fi ou « hot spots ».

L'antenne tige basique omnidirectionnelle à 2,4 GHz (1/4 d'onde) ressemblant à un stylo est la plus rencontrée. Elle est omnidirectionnelle, et est dédiée à la desserte de proximité.



Antenne tige basique  
omnidirectionnelle à 2,4 GHz.

### Enoncé

- 1) Estimer la longueur de l'antenne wifi.

## Correction

L'antenne est assimilée à un fil de longueur  $L$ , un de ses bouts étant relié en  $x = 0$  au circuit électrique, l'autre (en  $x = L$ ) relié à rien.

La vitesse des ondes électromagnétiques dans l'antenne sera assimilée à la célérité de la lumière dans le vide ( $c = 3,00.10^8 m.s^{-1}$ ).

L'antenne associée à l'onde de fréquence  $f = 2,45$  GHz est telle que l'intensité électrique de l'antenne au contact du circuit électrique est maximale.

Il se crée une onde stationnaire, avec :

- un ventre d'intensité en  $x = L$ .
- un nœud de vibration en intensité en  $x = 0$ .

Il y a  $\frac{\lambda}{4}$  entre un nœud et un ventre, donc  $L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4.f}$ . AN :

$$L = 3,0cm$$

C'est cohérent d'après la photo ("stylo").

# Devoir non surveillé

## vendredi 9 février 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

### Les écrans LCD

Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

*La physique par les objets quotidiens* © Belin - Pour la Science.

#### Comment se servir de la polarisation de la lumière

Il est possible de décrire la lumière comme une onde électromagnétique, définie par l'oscillation d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Nous ne nous intéresserons ici qu'au champ électrique. Le champ électrique associé à une onde est toujours contenu dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (cette dernière correspond à l'axe en rouge sur les figures ci-contre) ; toutefois, il est susceptible de présenter n'importe quelle orientation dans ce plan. C'est le cas pour le champ électrique de la lumière émise par le Soleil ou par une ampoule à incandescence (figure a ci-contre) qui peut avoir n'importe quelle direction dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation (représentée par l'axe orienté rouge)

Lorsque le champ électrique conserve une direction fixe, par exemple verticale (figure b ci-contre), on dit qu'il s'agit d'une onde polarisée linéairement (ou de façon rectiligne). Un filtre polariseur impose une direction bien définie au champ électrique de la lumière transmise, qui présente alors une polarisation rectiligne à la sortie du filtre.

#### Comment polariser la lumière ?

Pour obtenir de la lumière polarisée, on utilise des cristaux minces, dits polariseurs. Ces cristaux présentent une structure anisotrope qui se traduit par l'existence d'une direction aux propriétés particulières : ils ne sont transparents à la lumière que si le champ électrique associé à l'onde est parallèle à cette direction. La lumière transmise par un tel filtre polariseur est donc polarisée dans une direction précise.

Remarquons que la lumière polarisée provenant, par exemple, d'un polariseur vertical, est entièrement transmise par un autre polariseur vertical. Mais si l'on ajoute un second polariseur tourné de  $90^\circ$  par rapport au premier, ce polariseur ne transmet plus rien : on dit alors que les deux polariseurs sont croisés.

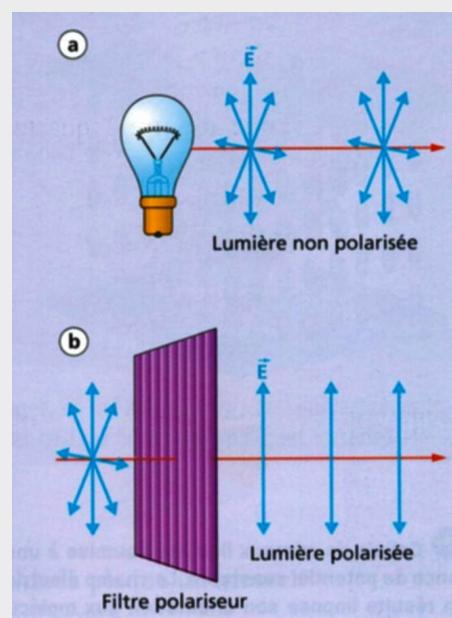
#### L'effet « nématique torsade »

Lorsque l'on enferme des cristaux liquides en phase nématique entre deux plaques de verres, les molécules en forme de bâtonnets vont s'organiser en couches libres et pivoter l'une par rapport à l'autre. Si sur chacune de ces deux plaques on parvient à ancrer ces cristaux liquides dans deux directions orthogonales, on leur impose une structure en hélice. C'est l'effet twisted nematic ou effet « nématique torsade ».

Pour réaliser cette première couche d'ancrage des cristaux liquides et les aligner convenablement dans une direction particulière, une technique consiste à rainurer une plaque de verre. Les bâtonnets se déposent et s'orientent alors dans la direction de ces rainures. Nous appellerons ce montage une cellule de cristaux liquides.

#### Cristaux liquides et polarisation

Envoyons un faisceau de lumière polarisée linéairement (en jaune) sur la cellule de la figure 8, de telle sorte que la direction de polarisation soit parallèle à l'orientation de la couche d'ancrage de la face supérieure. Le champ électrique de l'onde électromagnétique interagit avec les molécules de cristaux liquides : on observe que la direction de polarisation suit alors l'orientation des molécules et pivote progressivement. Ainsi, à la sortie de la couche d'ancrage du bas, la direction de polarisation de la lumière a tourné de  $90^\circ$ . Une cellule composée de deux plaques en verre rainurées à  $90^\circ$  l'une de l'autre et remplie de cristaux liquides permet donc de faire tourner du même angle la direction de polarisation de la lumière.

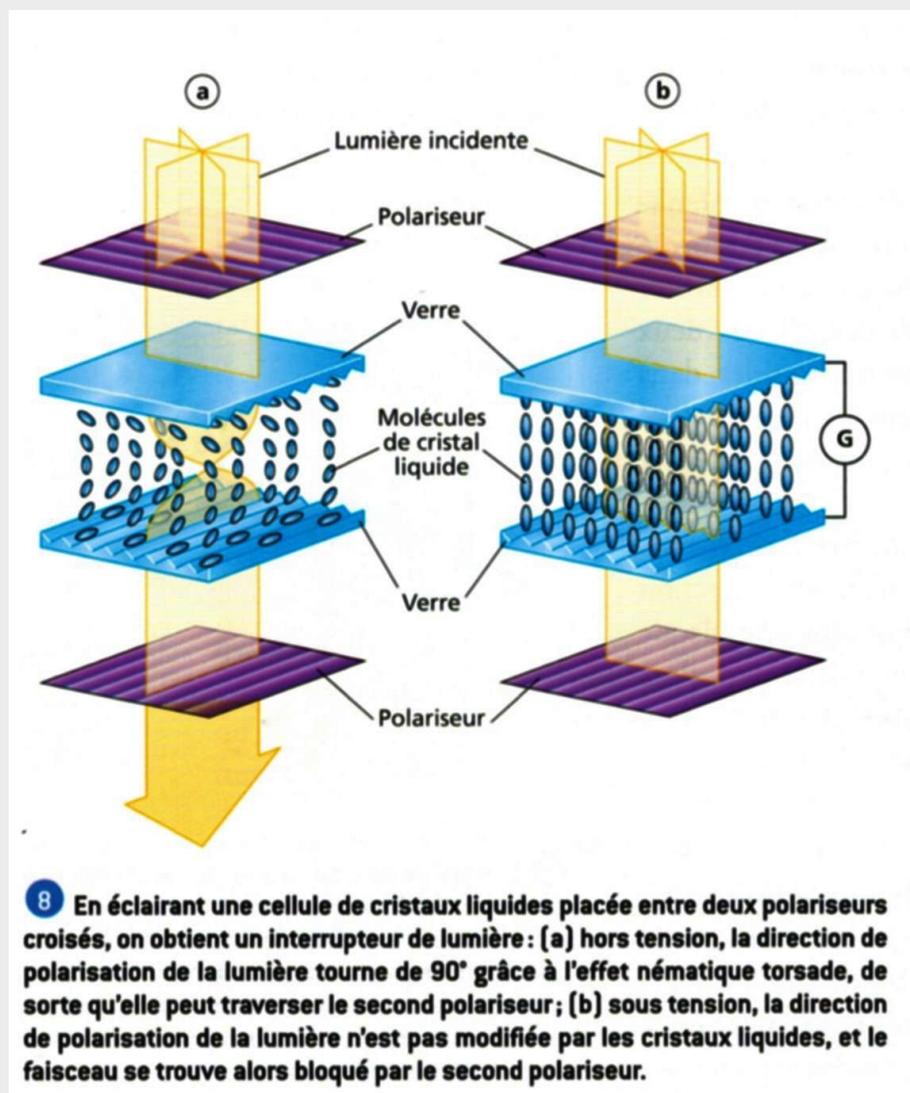


## L'effet d'un champ électrique

Appliquons maintenant une différence de potentiel constante entre les deux plaques rainurées : un champ électrique s'y établit. Les bâtonnets de cristaux liquides vont s'orienter selon ce champ électrique, pour finalement tous se retrouver orientés perpendiculairement aux plaques. Dans cette configuration, la direction de polarisation de la lumière n'est plus modifiée par les cristaux liquides : la polarisation reste parallèle aux rainures de la plaque du haut.

## Un interrupteur de lumière

Nous disposons en résumé d'une cellule de cristaux liquides qui fait tourner ou non la polarisation de la lumière, selon que l'on applique ou non une différence de potentiel entre ses plaques. Plaçons alors la cellule en sandwich entre deux polariseurs croisés, c'est-à-dire tournés de  $90^\circ$  l'un par rapport à l'autre. Le premier polariseur est orienté de façon à ne laisser passer que la lumière de polarisation parallèle aux rainures de la plaque de verre supérieure. Nous obtenons alors... un interrupteur de lumière ! En effet, selon que l'on applique ou non une différence de potentiel entre les plaques contenant les cristaux liquides, l'une des deux situations suivantes prévaut : - lorsqu'aucune tension n'est appliquée aux bornes de la cellule (figure 8.a), les cristaux liquides étant en configuration twisted nematic dans la cellule, la polarisation a pivoté de  $90^\circ$  à la sortie de la plaque inférieure. La lumière peut alors traverser le second polariseur : c'est l'état « allumé » ; - si les bornes de la cellule sont soumises à une tension électrique (figure 8.b), les cristaux liquides s'orientent perpendiculairement aux plaques. La lumière qui les traverse conserve sa direction de polarisation initiale : elle est donc arrêtée par le second polariseur (tourné de  $90^\circ$ ) : c'est l'état « éteint ».



Cet interrupteur optique est la cellule élémentaire des écrans LCD. Grâce à lui, en effet, il est possible d'allumer un point d'un écran ou de l'éteindre à volonté en modifiant une tension. Les principaux avantages de ce dispositif tiennent à sa compacité et à sa faible consommation électrique, les valeurs des tensions impliquées restant très petites. Il nous reste à comprendre comment cette cellule élémentaire de cristaux liquides associée à deux polariseurs peut constituer un « pixel », et aboutir à un système d'affichage complet.

## Le pixel

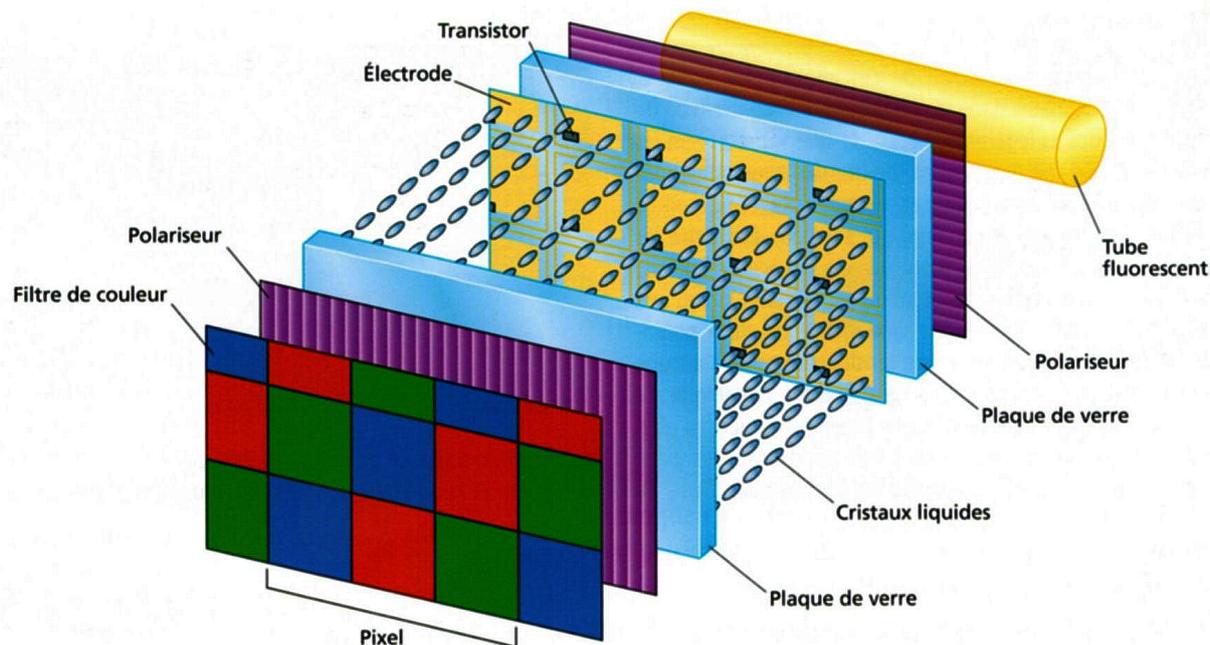
Dans les écrans d'ordinateur ou de télévision à cristaux liquides, l'image est définie par une multitude de points disposés les uns à côté des autres, l'allumage de chacun étant commandé par un signal électrique. Ces points - les pixels - sont le cœur de l'écran à cristaux liquides.

Chaque pixel est lui-même constitué de plusieurs éléments : une cellule de cristaux liquides (i.e. deux couches d'ancrage et des molécules de cristaux liquides), une électrode et un transistor. Le transistor a pour fonction de contrôler la tension appliquée à chaque pixel individuellement, afin de l'allumer ou de l'éteindre. Pour fabriquer

une dalle, c'est-à-dire l'ensemble des pixels d'un écran, on dépose un transistor et deux électrodes conductrices et transparentes par pixel sur deux couches d'ancrage, qui sont alors scellées avec de la résine (figure 10). Chaque pixel, c'est-à-dire chaque point de l'écran, est en fait composé de trois sous-pixels de couleurs munis de filtres colorés. La dalle est ensuite recouverte par deux polariseurs dont les directions sont croisées.

### Les nuances de gris

Nous voilà capables d'allumer indépendamment chaque pixel en envoyant un signal électrique adéquat au transistor qui lui est associé, mais comment obtenir des nuances de gris ? En jouant sur la valeur de la tension appliquée aux bornes de la cellule. En effet, en fonction de cette valeur, les bâtonnets sont plus ou moins bien alignés dans le sens de propagation de la lumière. En diminuant la tension appliquée, on perturbe la direction de polarisation de la lumière en sortie de cellule, de sorte qu'une partie est arrêtée par le polariseur croisé. Différents niveaux de gris sont donc envisageables entre les situations extrêmes du blanc et du noir décrites plus haut.



**10** Principe d'un écran couleur à cristaux liquides. Chaque pixel est en réalité constitué de trois sous-pixels identiques permettant, à l'aide de filtres colorés, de reproduire une large gamme de couleurs.

### La couleur

Nous savons que le mélange de trois couleurs primaires (rouge, vert et bleu) suffit pour reproduire toutes les couleurs perçues par l'œil humain : c'est la synthèse additive des couleurs, employée dans le téléviseur cathodique. Pour être capable d'afficher n'importe quelle couleur ou presque, chaque point de l'écran doit donc être composé de trois sous-pixels différents : un de chaque couleur primaire. La seule différence entre chacun des sous-pixels provient du filtre coloré disposé au-dessus. Regardez à la loupe un écran à cristaux liquides en fonctionnement : vous verrez facilement les trois sous-pixels de couleurs, dont les intensités lumineuses diffèrent en fonction de la nuance voulue.

## Énoncé

- 1) Propagation d'une onde électromagnétique.
  - 1.a) Montrer que, dans le vide, les champs électrique et magnétique suivent l'équation de d'Alembert.
  - 1.b) Montrer que l'onde électromagnétique dans le vide est transverse :  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont orthogonaux à la direction de propagation.
- 2) Polarisation des ondes électromagnétiques
  - 2.a) Justifier la position suivie par le document : "Nous ne nous intéresserons ici qu'au champ électrique."
  - 2.b) Démontrer la loi de Malus : après un analyseur qui fait un angle  $\theta$  avec une polarisation rectiligne, l'intensité est multipliée par  $\cos^2 \theta$ .

**2.c)** En utilisant la loi de Malus, expliquer en quoi cela permet à la cellule à cristaux liquide de se comporter comme "un interrupteur de lumière", puis en quoi "différents niveaux de gris sont donc envisageables entre les situations extrêmes du blanc et du noir".

## Correction

1) Propagation d'une onde électromagnétique.

**1.a)** Equation de d'Alembert suivie par les champs électromagnétiques dans le vide

Le laplacien vectoriel du champ électrique est

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

d'après Maxwell Gauss car dans le vide  $\rho = 0$ .

$$\Delta \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell Faraday. Puisque dans le vide il n'y a pas de courants ( $\vec{j} = \vec{0}$ ), l'équation de Maxwell Ampère donne :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le laplacien vectoriel du champ magnétique est

$$\Delta \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$$

d'après Maxwell flux.

$$\Delta \vec{B} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Ampère puisque dans le vide il n'y a pas de courants ( $\vec{j} = \vec{0}$ ).

$$\Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

d'après Maxwell Faraday. Donc

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

ainsi, dans le vide illimité, les équations de Maxwell entraînent

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

avec :  $\psi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ .

**1.b)** Structure d'une onde électromagnétique plane dans le vide

Maxwell flux impose  $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ . Or, pour une onde plane se propageant suivant  $\vec{u}_z$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ , aussi  $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ , qui a pour solution  $B_z = 0$  (on ne retient pas les solutions constantes).

De même, Maxwell Gauss impose  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ . Donc  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = 0$ .

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux à la direction de propagation : on dit que l'onde est transverse.

D'autre part, en cartésien, puisque  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ , on peut écrire  $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ . Aussi,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'après Maxwell Faraday.

Or, pour une onde se propageant suivant  $\vec{u}_z$  (vers les  $z$  croissants),  $(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}) \psi = 0$ , ce qui nous permet de déduire

$$\vec{u}_z \wedge \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E} - \vec{B} \right) = 0$$

Comme on exclue les solutions constantes, pour une onde se propageant suivant  $\vec{u}_z$  (vers les  $z$  croissants),

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

On voit donc que  $\vec{B}$  est orthogonal à  $\vec{E}$ . L'onde électromagnétique dans le vide est transverse :  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont orthogonaux à la direction de propagation.

**2) Polarisation des ondes électromagnétiques**

**2.a)** Comme  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  forment un trièdre orthogonal direct, la connaissance de  $\vec{E}$  permet d'accéder à celle de  $\vec{B}$  : on peut alors ne s'intéresser "qu'au champ électrique."

**2.b)** Loi de Malus

$I_1 = \langle E_{x'}^2 \rangle$  est l'intensité lumineuse après un polariseur d'axe  $\vec{u}_{x'}$ , car  $E_{y'} = 0$ . L'analyseur est un polariseur dont l'axe  $\vec{u}_{x''}$  fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{u}_{x'}$ .  $I_2 = \langle E_{x''}^2 \rangle$  est l'intensité lumineuse après l'analyseur, avec  $E_{x''} = E_{x'} \cdot \cos(\theta)$ . Ainsi : après un analyseur qui fait un angle  $\theta$  avec une polarisation rectiligne, l'intensité est multipliée par  $\cos^2 \theta$  :

$$I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1$$

**2.c)** - lorsqu'aucune tension n'est appliquée aux bornes de la cellule (figure 8.a), les cristaux liquides étant en configuration twisted nematic dans la cellule, la polarisation a pivoté de  $90^\circ$  à la sortie de la plaque inférieure :  $\theta = 0$  entre cette polarisation et la direction du second polariseur : c'est l'état « allumé » car la loi de Malus donne  $I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1 = I_1$  ;

- si les bornes de la cellule sont soumises à une tension électrique (figure 8.b), les cristaux liquides s'orientent perpendiculairement aux plaques. La lumière qui les traverse conserve sa direction de polarisation initiale :  $\theta = \frac{\pi}{2}$  entre cette polarisation et la direction du second polariseur : c'est l'état « éteint » car la loi de Malus donne  $I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1 = 0$  ;

- en jouant sur la valeur de la tension appliquée aux bornes de la cellule, les bâtonnets sont plus ou moins bien alignés dans le sens de propagation de la lumière, on perturbe la direction de polarisation de la lumière en sortie de cellule :  $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$  entre cette polarisation et la direction du second polariseur : la loi de Malus donne  $I_2 = \cos^2(\theta) \cdot I_1 \in [0 ; I_1]$ . Différents niveaux de gris sont donc envisageables entre les situations extrêmes du blanc et du noir décrites plus haut.