

Mécanique des solides

Notes de cours mardi 26 septembre 2017

I- Véhicule

1. Position du problème



Chariot à roue schéma

La figure 1 représente un chariot à roues modélisé par une barre C_1C_2 de centre C et de masse M , parallèle à \vec{u}_x , munie de deux roues de masse m et de rayon R articulées par des liaisons pivots parfaites d'axes C_{1y} et C_{2y} .

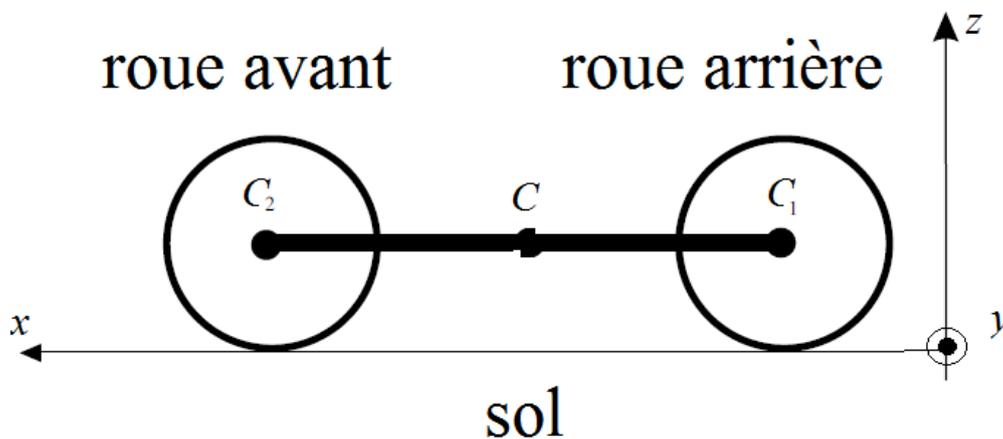


FIGURE 1 – Chariot à roue



Deux référentiels adaptés s'y retrouver

La barre est en translation rectiligne uniforme à vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre (R_g) supposé galiléen, les roues se déplaçant sur une route horizontale fixe dans (R_g).

Le référentiel (R^*) lié à la barre est par construction en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen, donc il est lui-même galiléen. Dans ce référentiel, la barre est fixe et les roues tournent avec les vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 autour des axes fixes respectifs C_{1y} et C_{2y} .



Systèmes discrets ou continus s'y retrouver

on peut considérer un système discret de N points matériels P_i , de masse m_i , où $i \in [1; N]$ ou bien considérer un système continu de points matériels P ($P \in V$), de masse $\mu(P).d^3\tau$.

 **Masse du système** *s'y retrouver*

la masse totale du système est

$$M = \sum_i m_i = \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot d^3\tau$$



Centre de masse *définition*

le centre de masse G du système de masse M est tel que

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{OP}_i}{M} = \frac{\iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot \vec{OP} \cdot d^3\tau}{M}$$



Propriété du centre de masse *s'y retrouver*

le centre de masse G vérifie la relation caractéristique suivante

$$\sum_i m_i \cdot \vec{GP}_i = \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot \vec{GP} \cdot d^3\tau = \vec{0}$$



Détermination expérimentale du centre de masse *vidéo*

Un solide qui peut tourner autour d'un axe horizontal Ox auquel il est accroché doit avoir son centre de masse G sur la verticale à O , en dessous. En utilisant cette propriété, on peut expérimentalement déterminer le centre de masse G de ce solide en changeant de point d'accroche.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

2. Caractéristiques des solides



Solide *définition*

Un solide en mécanique est un cas particulier de systèmes de points matériels qui est tel que la distance entre deux points le composant est constante, quel que soit le couple de point M et N

$$d_{MN} = MN = cste$$



Notion de solide : *s'y retrouver*

Il s'agit d'un solide au sens thermodynamique, qui serait indéformable (rigide).

$$\left. \begin{array}{l} \text{solide} \\ \text{(indéformable)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \neq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{système de points matériels} \\ \text{(ensemble de solides par exemple)} \end{array} \right.$$

D'autre part, fondamentalement, un solide et un référentiel, c'est la même chose.

**Torseur cinématique d'un solide (loi de Varignon) : à retenir**

Quel que soit le couple de point M et N d'un solide, les vitesses de ces points \vec{v}_M et \vec{v}_N dans un référentiel R suivent une relation d'antisymétrie

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}$$

On parle donc du torseur des vitesses (ou torseur cinématique) du solide, de moment \vec{v}_M en M , et de résultante $\vec{\Omega}$, le vecteur rotation du solide.

3. Dynamique des solides**1 Loi de la quantité de mouvement : théorème**

c'est la même que pour un système de points matériels quelconque. \Rightarrow

Dans un référentiel galiléen R , la quantité de mouvement du solide $\vec{P} = M \vec{v}_G$ suit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}(ext)$$

où $\sum \vec{F}(ext)$ est la résultante des actions extérieures subies par le solide.

**2 Loi de la puissance cinétique théorème**

contrairement au cas d'un système de points matériels quelconque, la puissance des actions intérieures exercées sur un solide $P(int)$ est nulle

$$P(int) = 0$$

Il n'y a plus à considérer les actions intérieures. \Rightarrow

Dans un référentiel galiléen R , l'énergie cinétique E_c d'un solide suit la loi

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P(ext)$$

où $\sum P(ext)$ est la somme des puissances des actions extérieures exercées sur lui.

4. Contact ponctuel**Deux solides en contact ponctuel schéma**

La figure 2 représente deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel. On discerne :

- le point géométrique M du contact entre S_1 et S_2 ;
- le point matériel $M_1 \in S_1$ qui coïncide avec M à l'instant t ;
- le point matériel $M_2 \in S_2$ qui coïncide avec M à l'instant t .

**Vitesse de glissement : définition**

Les deux points matériels M_1 et M_2 , bien qu'étant au même endroit, n'ont pas la même vitesse : dans le référentiel où S_2 est fixe, $\vec{v}_{M_2} = \vec{0}$, mais $\vec{v}_{M_1} \neq \vec{0}$ a priori.

La vitesse de glissement du solide S_1 par rapport à S_2 , si les deux solides sont en contact ponctuel en M , est :

$$\vec{v}_{gliss}(S_1/S_2) = \vec{v}_{M_1 \in S_1/R} - \vec{v}_{M_2 \in S_2/R}$$

où R est un référentiel.

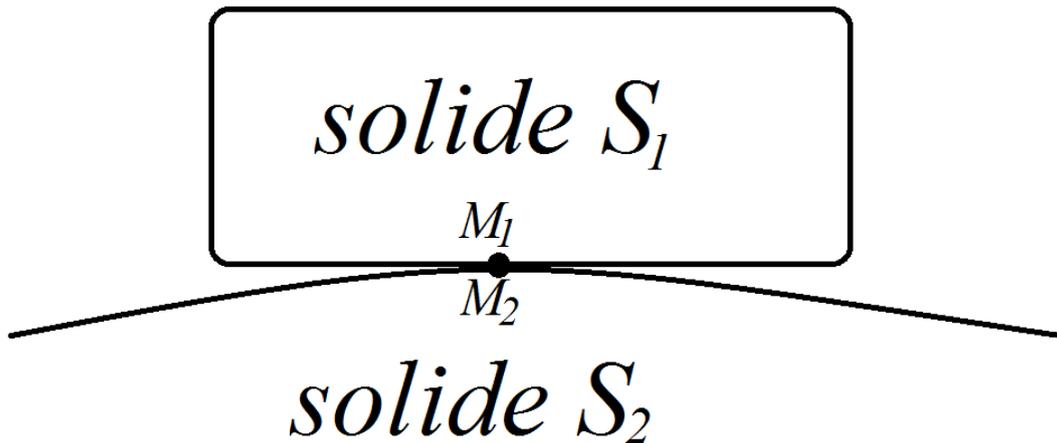


FIGURE 2 – Deux solides en contact ponctuel

✪ Propriétés de la vitesse de glissement : s'y retrouver

On interprète aisément cette vitesse de glissement en prenant comme référentiel, le référentiel où S_2 est fixe.

Si on passe de R à R' , $\vec{v}_{M_1 \in S_1 / R'} = \vec{v}_{M_1 \in S_1 / R} + v_e(R'/R)$ où $v_e(R'/R)$ est la vitesse d'entraînement en M . De même, $\vec{v}_{M_2 \in S_2 / R'} = \vec{v}_{M_2 \in S_2 / R} + v_e(R'/R)$ avec la même vitesse d'entraînement (car on est encore en M). Aussi,

$$\vec{v}_{M_1 \in S_1 / R'} - \vec{v}_{M_2 \in S_2 / R'} = \vec{v}_{M_1 \in S_1 / R} - \vec{v}_{M_2 \in S_2 / R}$$

D'une part

$$\vec{v}_{gliss}(S_2/S_1) = -\vec{v}_{gliss}(S_1/S_2)$$

D'autre part, la vitesse de glissement ne dépend pas du choix du référentiel :

$$\vec{v}_{gliss/R_1}(S_2/S_1) = \vec{v}_{gliss/R_2}(S_2/S_1)$$

ce qui est exceptionnel pour une grandeur cinématique !

♥ Lois de Coulomb du frottement solide à retenir

La réaction normale au support \vec{N} est dirigée depuis le support vers le système, sa norme est quelconque. La réaction tangentielle au support est \vec{T} .

- Si non frottement : $\vec{T} = \vec{0}$,
- Si non glissement ($\vec{v}_{glis} = \vec{0}$) : $\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|$ où μ_s est le coefficient de frottement statique ($\mu_s > 0$, sans unité).
- Si glissement ($\vec{v}_{glis} \neq \vec{0}$) : $\vec{T} = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}_{glis}}{\|\vec{v}_{glis}\|}$ où μ_d est le coefficient de frottement dynamique ($0 < \mu_d \leq \mu_s$, sans unité).

🔪 3 Cône de non glissement *exercice*

On s'intéresse à un solide S sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontale. Démontrer que la condition de non glissement de S revient à $\alpha < \alpha_{max}$, qu'on exprimera en fonction de μ_s , le coefficient de frottement entre les deux solides.

II- Véhicule à roue qui glisse

4 Champ de vitesse dans le cas d'un solide en translation *exercice*

Montrer que pour un solide en translation

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

les vitesses de deux points A et B sont reliées par : $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B$. On peut calculer le rotationnel d'un tel champ vectoriel, et on trouve ce qui était demandé.

5 Puissance d'une force dans le cas d'un solide en translation *théorème*

Comme tous les points du solide ont même vitesse ($\vec{v}_k = \vec{v}$), la puissance est

$$P = \sum \vec{f}_{\rightarrow k} \vec{v}_k = \vec{v} \sum \vec{f}_{\rightarrow k} = \vec{v} \vec{F}$$

⇒

la puissance d'une force extérieure \vec{F} sur un solide en translation à la vitesse \vec{v} est

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

6 Energie cinétique d'un solide en translation *théorème*

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2} \vec{v}^2 \sum m_k = \frac{1}{2} M v^2$$

⇒

l'énergie cinétique d'un solide de masse M en translation à la vitesse \vec{v} est

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2$$

Dynamique d'un solide en translation *s'y retrouver*

Qu'on utilise la loi de la quantité de mouvement ou bien celle de l'énergie cinétique, on trouve

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}(\text{ext})$$

Action de l'opérateur extérieur *s'y retrouver*

Les frottements fluides exercés par l'air sur le chariot sont pris en compte sous la forme simplifiée d'une force $\vec{F}_a = -F_a \vec{u}_x$ appliquée au point C_1 , puisque la vitesse est constante.

Un opérateur exerce une force motrice $\vec{F}_m = F_m \vec{u}_x$ sur la barre au point C .

III- Véhicule qui roule non motorisé

Liaison pivot *s'y retrouver*

La liaison pivot entre un solide S_1 et un solide S_2 est réalisée afin que le solide S_1 soit en rotation autour d'un axe fixe Oz dans le référentiel du solide S_2 .



Vitesses des points d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe *s'y retrouver*

Dans ce cas, tous les points de S_1 sur l'axe Oz sont fixes (en particulier $\vec{v}_O = \vec{0}$) et $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z$. La loi de Varignon donne alors :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \Omega_z \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} = \Omega_z \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = r\Omega_z \vec{u}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.

Donc, si $M(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz , l'axe de rotation alors

$$\vec{v}_M = r\Omega_z \vec{u}_\theta$$



7 Rotationnel de la vitesse dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe *exercice*

Montrer que pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$$

les vitesses de deux points A et B sont reliées par $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$. On peut calculer le rotationnel d'un tel champ vectoriel, et on trouve ce qui était demandé.



8 Puissance d'une force dans le cas d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe *théorème*

La puissance de la force est :

$$P = \sum \vec{f}_{\rightarrow k} \vec{v}_k = \sum \vec{f}_{\rightarrow k} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Comme $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$ on peut écrire

$$P = \sum \vec{f}_{\rightarrow k} \vec{v}_k = \sum \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{\rightarrow k}) = \vec{\Omega} \cdot \sum (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{\rightarrow k}) = \Omega_z \vec{u}_z \cdot \vec{M}_O = \Omega_z M_{Oz}$$

\Rightarrow

la puissance d'une force extérieure \vec{F} de moment M_{Oz} par rapport à l'axe de rotation Oz d'un solide en rotation par rapport à l'axe fixe Oz à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z$ est

$$P = M_{Oz} \Omega_z$$



Liaison pivot parfaite : définition

La liaison pivot est parfaite si la puissance des actions de contact est nulle ou (ce qui revient au même) si la projection du moment des actions de contact sur l'axe de rotation est nulle :

$$P(\text{pivot parfait}) = 0 \Leftrightarrow M_{Oz}(\text{pivot parfait}) = 0$$

Réalisation pratique d'une liaison pivot parfaite *photo*



Une "bonne" liaison pivot est réalisée à l'aide de roulements à bille (photo : société SKF). Ces roulements font tendre vers 0 le couple résistant (M_{Oz} de signe opposé à Ω_z) appliqué par la liaison au solide en rotation.

9 Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe *théorème*

$$\vec{\sigma}_O = \sum_i m_i \cdot \vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i = \iiint_{P \in V} (\mu(P) \cdot \vec{OP} \wedge \vec{v}(P)) \cdot d^3\tau = \iiint_{P \in V} (\mu(P) (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge \vec{v}(P)) \cdot d^3\tau$$

en coordonnées cylindriques. Or comme dans le cas d'une rotation autour de l'axe Oz ,

$$\vec{v}_P = \Omega_z \vec{u}_z \wedge \vec{OP} = \Omega_z \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = r\Omega_z \vec{u}_\theta$$

en coordonnées cylindriques, on peut écrire

$$\vec{\sigma}_O = \iiint_{P \in V} (\mu(P) (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (r\Omega_z \vec{u}_\theta)) d^3\tau$$

soit

$$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_z = \iiint_{P \in V} (\mu(P) \cdot r^2 \Omega_z) \cdot d^3\tau = \Omega_z \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot r^2 \cdot d^3\tau$$

donc \Rightarrow

la projection suivant Oz du moment cinétique d'un solide en rotation par rapport à l'axe Oz fixe est

$$\sigma_{Oz} = J \Omega_z \text{ avec } J = \iiint_{P \in V} \mu(P) r(P)^2 d^3\tau$$

10 Moment d'inertie d'un cylindre homogène *exercice*

Démontrer que le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe de symétrie est

$$J = \frac{1}{2} M R^2$$

où R est son rayon et M sa masse.

Trivial



La chaise qui tourne *vidéo*

Un solide en rotation autour d'un axe fixe soumis à aucun moment sur cet axe voit son moment cinétique se conserver. Si on fait varier le moment d'inertie par rapport à l'axe, c'est la vitesse de rotation qui change.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



11 Energie cinétique d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe *théorème*

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \iiint_{P \in V} \frac{1}{2} d^3 m \cdot v(P)^2 = \frac{1}{2} \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot v(P)^2 \cdot d^3 \tau$$

Or comme dans le cas d'une rotation autour de l'axe Oz ,

$$\vec{v}_P = \Omega_z \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OP} = \Omega_z \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = r\Omega_z \vec{u}_\theta$$

en coordonnées cylindriques, on peut écrire

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot r^2 \cdot \Omega_z^2 \cdot d^3 \tau = \frac{\Omega_z^2}{2} \iiint_{P \in V} \mu(P) \cdot r^2 \cdot d^3 \tau$$

On reconnaît

$$E_c = \frac{1}{2} J \Omega_z^2$$

⇒

l'énergie cinétique d'un solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe Oz , en rotation par rapport à l'axe fixe Oz à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{u}_z$ est

$$E_c = \frac{1}{2} J \Omega_z^2$$



Dynamique d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe *s'y retrouver*

Qu'on utilise la loi du moment cinétique ou bien celle de l'énergie cinétique, on trouve

$$J \frac{d\Omega_z}{dt} = \sum M_{Oz} (ext)$$



Bras de levier *schéma*

La figure 3 représente la distance d de l'axe de rotation (Oz) à la droite d'application de la force (\vec{F}). Le moment de la force \vec{F} projeté sur l'axe Oz est $M_{Oz} = \pm F \cdot d$ où d est le bras de levier de la droite d'action. $M_{Oz} > 0$ si cela tend à faire tourner dans le sens trigonométrique (ce qui est le cas ici), négatif sinon.



12 Pendule pesant *exercice*

On s'intéresse à un pendule de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, de masse m , dont le centre d'inertie G est une distance a sous l'axe de rotation Oz . Montrer que le pendule est synchrone aux petits angles et déterminer la période T des oscillations libres.

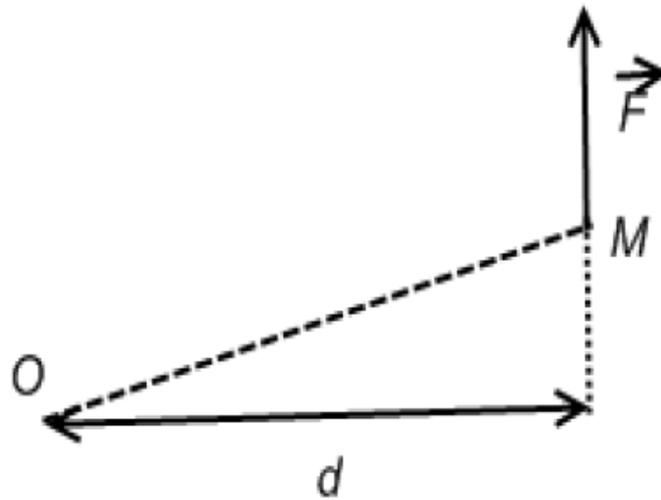


FIGURE 3 – Bras de levier

$$J\ddot{\theta} = -m.g.a \sin \theta$$

qui devient aux petits angles :

$$J\ddot{\theta} + m.g.a.\theta \approx 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{m.g.a}{J}} = \frac{2\pi}{T}$, donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m.g.a}}$$

✳ Intérêt des roues *s'y retrouver*

La confrontation entre les deux derniers résultats est éloquente et illustre l'intérêt d'un chariot à roues pour déplacer une charge : les roues permettent de s'affranchir de l'effet néfaste du frottement de glissement.

IV- Véhicule qui roule motorisé

🔪 13 Puissance des actions intérieures : *théorème*

⇒

La puissance des actions intérieures $P(int)$ exercée sur un système de points matériels est :

- $P(int) = 0$ dans le cas d'un solide ;
- $P(int) \neq 0$ si le système est déformable (si ce n'est pas un solide).

✳ Action du moteur intérieur *s'y retrouver*

Le véhicule n'est plus désormais mû par un opérateur extérieur mais par un moteur intérieur solidaire de la barre et qui exerce sur la roue avant un couple moteur $\Gamma_m \vec{u}_y$. Par ailleurs on se place dans le cas du non glissement des deux roues.

§ 1) Chariot *exercice*

1) Chariot tiré avec les deux roues bloquées

On suppose que les roues sont bloquées et glissent sur le sol.

- 1.a) Déterminer les vitesses de glissement sur le sol.
- 1.b) Quelles sont les forces extérieures qui s'exercent sur le chariot ?
- 1.c) Appliquer la loi de la quantité de mouvement au véhicule.
- 1.d) En déduire la valeur de F_m nécessaire pour maintenir un mouvement uniforme.

2) Chariot tiré avec les deux roues qui roulent

Les roues roulent sans glisser sur le sol.

- 2.a) Déterminer alors les relations liant V , R , Ω_1 et Ω_2 .
- 2.b) Quelles sont les forces extérieures qui s'exercent sur le chariot ?
- 2.c) Appliquer la loi de la quantité de mouvement au véhicule.
- 2.d) Appliquer la loi du moment cinétique aux roues dans le référentiel du véhicule.
- 2.e) En déduire la valeur de F_m nécessaire pour maintenir un mouvement uniforme.

3) Bilan de forces dans le cas du chariot automobile avec les deux roues qui roulent

3.a) Appliquer la loi de la quantité de mouvement au véhicule. Les frottements sont-ils systématiquement nuisibles ?

- 3.b) Appliquer la loi du moment cinétique aux roues dans le référentiel du véhicule.
- 3.c) Exprimer le couple moteur nécessaire.

4) Bilan énergétique dans le cas du chariot automobile avec les deux roues qui roulent

- 4.a) Faire un bilan énergétique.
- 4.b) Exprimer le couple moteur nécessaire.
- 4.c) Quel est le rôle du moteur ?

Correction :

1) Force nécessaire pour un déplacement avec les deux roues bloquées

1.a) Dans le référentiel (R_g), le point J_1 de la route qui coïncide avec le point I_1 de la roue arrière possède une vitesse nulle :

$$\vec{v}_{/R_g}(J_1) = \vec{0}$$

La roue arrière est en rotation à vitesse angulaire $\Omega_1 = 0$ autour de l'axe fixe C_{1y} dans le référentiel (R^*) donc le point I_1 lié à la roue arrière et qui se trouve au niveau du sol à l'instant considéré possède une vitesse :

$$\vec{v}_{/R_g}(I_1) = \vec{v}_{/R_g}(C_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{C_1 J_1} = V\vec{u}_x + \vec{0} = V\vec{u}_x$$

En adoptant la même démarche pour la roue avant (avec $\Omega_2 = 0$), on trouve $\boxed{\vec{v}_{gliss} = V\vec{u}_x}$ pour les deux roues.

1.b) Le chariot est soumis :

- aux frottements fluides exercés par l'air $\vec{F}_a = -F_a\vec{u}_x$;
- à la force motrice de l'opérateur $\vec{F}_m = F_m\vec{u}_x$;
- au poids de résultante $-(M + 2m)g\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue arrière $T_{1x}\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue avant $T_{2x}\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$.

1.c) La loi de la quantité de mouvement appliquée au chariot complet dans le référentiel (R_g) (ou (R^*)) s'écrit donc en projection sur \vec{u}_x :

$$0 = T_{1x} + T_{2x} + F_m - F_a(1)$$

De même en projection sur \vec{u}_z :

$$0 = N_1 + N_2 - (M + 2m)g(2)$$

1.d) En utilisant les lois de Coulomb :

$$\begin{cases} T_{1x} = -fN_1 \\ T_{2x} = -fN_2 \end{cases}$$

(1) donne : $0 = -f(N_1 + N_2) + F_m - F_a$ et comme (2) donne $N_1 + N_2 = (M + 2m)g$, on trouve $\boxed{F_m = F_a + f(M + 2m)g}$.

2) Force nécessaire pour un déplacement sans glissement

2.a) Dans le référentiel (R^*), le point J_1 de la route qui coïncide avec le point I_1 de la roue arrière possède une vitesse qui s'obtient immédiatement via la loi de composition des vitesses en remarquant que sa vitesse dans le référentiel (R_g) est nulle :

$$\vec{v}_{/R_g}(J_1) = \vec{0} = \vec{v}_{/R^*}(J_1) + \vec{v}_{R^*/R}(J_1) = \vec{v}_{/R^*}(J_1) + V\vec{u}_x$$

donc $\vec{v}_{/R^*}(J_1) = -V\vec{u}_x$.

La roue arrière est en rotation à vitesse angulaire Ω_1 autour de l'axe fixe C_{1y} dans le référentiel (R^*) donc le point I_1 lié à la roue arrière et qui se trouve au niveau du sol à l'instant considéré possède une vitesse :

$$\vec{v}_{/R^*}(I_1) = \vec{v}_{/R^*}(C_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{C_1 I_1} = \vec{0} + \Omega_1 \vec{u}_y \wedge (-R)\vec{u}_z = -R\Omega_1 \vec{u}_x$$

Par définition, la roue arrière ne glisse pas sur le sol si les points I_1 lié à la roue et J_1 lié à la route qui sont au contact ont la même vitesse soit :

$$\vec{v}_{/R^*}(J_1) = \vec{v}_{/R^*}(I_1) \Leftrightarrow V = R\Omega_1$$

En adoptant la même démarche pour la roue avant, on trouve $V = R\Omega_1 = R\Omega_2$. Il résulte de ces relations que les vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 des roues sont constantes puisque V est constante.

2.b) Le chariot est soumis :

- aux frottements fluides exercés par l'air $\vec{F}_a = -F_a \vec{u}_x$;
- à la force motrice de l'opérateur $\vec{F}_m = F_m \vec{u}_x$;
- au poids de résultante $-(M + 2m)g\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue arrière $T_{1x}\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue avant $T_{2x}\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$.

▷ La loi de la quantité de mouvement appliquée au chariot complet dans le référentiel (R_g) (ou (R^*)) s'écrit donc en projection sur \vec{u}_x :

$$0 = T_{1x} + T_{2x} + F_m - F_a(1')$$

De même en projection sur \vec{u}_z :

$$0 = N_1 + N_2 - (M + 2m)g(2')$$

2.c) Les roues tournent à vitesse angulaire constante autour des axes fixes C_{1y} et C_{2y} , donc leur moment cinétique ne varie pas dans le référentiel (R^*). La roue arrière est soumise :

- à son poids de moment nul (qui s'applique en C_1) ;
- à l'action du chariot de moment nul (liaison pivot parfaite) ;
- à la composante normale des actions de contact du sol de moment nul (bras de levier nul) ;
- à la composante tangentielle des actions de contact du sol de moment $M_y = -RT_{1y}$.

La loi du moment cinétique appliquée à cette roue dans le référentiel galiléen (R^*) s'écrit alors : $0 = -RT_1(3')$.

En opérant de manière analogue pour la roue avant, il vient : $0 = -RT_2(4')$.

2.d) En remplaçant $T_1 = T_2 = 0$ dans (1') on obtient alors : $F_m = F_a$.

3) Bilan de forces dans le cas du chariot automobile avec les deux roues qui roulent

3.a) Le chariot est soumis :

- aux frottements fluides exercés par l'air $\vec{F}_a = -F_a \vec{u}_x$;
- au poids de résultante $-(M + 2m)g\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue arrière $T_{1x}\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$;
- aux action de contact sur la roue avant $T_{2x}\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$.

NB : le couple moteur n'intervient pas puisqu'il décrit des forces intérieures au système. La loi de la quantité de mouvement appliquée au chariot complet dans le référentiel (R_g) (ou (R^*)) s'écrit donc en projection sur \vec{u}_x :

$$0 = T_{1x} + T_{2x} - F_a(1)$$

De même en projection sur \vec{u}_z :

$$0 = N_1 + N_2 - (M + 2m)g(2)$$

En définitive, d'un point de vue dynamique, ce sont les forces de frottements exercées par la route sur la roue motrice qui font avancer le véhicule. On retiendra de cette étude qu'il convient de ne pas attribuer un rôle systématiquement nuisible aux frottements.

3.b) Les roues tournent à vitesse angulaire constante autour des axes fixes C_{1y} et C_{2y} , donc leur moment cinétique ne varie pas dans le référentiel (R^*). La roue arrière est soumise :

- à son poids de moment nul (qui s'applique en C_1);
- à l'action du chariot de moment nul (liaison pivot parfaite);
- à la composante normale des actions de contact du sol de moment nul (bras de levier nul);
- à la composante tangentielle des actions de contact du sol de moment $M_y = -RT_{1y}$.

La loi du moment cinétique appliquée à cette roue dans le référentiel galiléen (R^*) s'écrit alors : $0 = -RT_1$ (3)

La roue avant est soumise :

- au couple moteur de moment Γ_m ;
- à son poids de moment nul (qui s'applique en C_1);
- à l'action du chariot de moment nul (liaison pivot parfaite);
- à la composante normale des actions de contact du sol de moment nul (bras de levier nul);
- à la composante tangentielle des actions de contact du sol de moment $M_y = -RT_{1y}$.

La loi du moment cinétique appliquée à cette roue dans le référentiel galiléen (R^*) s'écrit alors : $0 = \Gamma_m - RT_2$ (4)

Ainsi la roue arrière ne joue aucun rôle alors que la roue avant sert à transformer un couple moteur intérieur en force motrice extérieure.

3.c) L'équation (1) fournit alors l'expression du couple moteur nécessaire :

$$0 = T_{1x} + T_{2x} - F_a = 0 + \frac{\Gamma_m}{R} - F_a$$

soit $\boxed{\Gamma_m = RF_a}$.

4) Bilan énergétique dans le cas du chariot automobile avec les deux roues qui roulent

4.a) Dans le référentiel (R_g) lié à la route, les mouvements de chacun des points du véhicule sont uniformes donc on peut affirmer sans même chercher à la calculer que l'énergie cinétique du véhicule est indépendante du temps. La loi de l'énergie cinétique appliquée au véhicule complet dans le référentiel (R_g) s'écrit alors

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 = P_{ext} + P_{int}$$

La puissance des actions du sol sur la roue arrière vaut

$$P_{sol \rightarrow 1} = (T_{1x}\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z) \cdot \vec{v}(I_1) = 0$$

car il n'y a pas glissement ($\vec{v}(I_1) = \vec{0}$). De même, la puissance des actions du sol sur la roue avant est nulle. La puissance du poids est nulle car les déplacements sont horizontaux. La puissance de la force de l'air est

$$P_{air} = -F_a\vec{u}_x V\vec{u}_x = -F_a V$$

Ainsi, $P_{ext} = -F_a V$. La puissance des forces intérieures P_{int} s'identifie naturellement à la puissance du moteur :

$$P_{int} = \Gamma_m \Omega_2 = \Gamma_m \frac{V}{R}$$

4.b) La loi de l'énergie cinétique donne $\Gamma_m \frac{V}{R} - F_a V = 0$, soit $\boxed{\Gamma_m = RF_a}$.

4.c) Ainsi, du point de vue énergétique, c'est le moteur qui permet au véhicule d'avancer à vitesse constante en compensant la puissance dissipée par la résistance de l'air. **Eléments de correction :**

1) Force nécessaire pour un déplacement avec les deux roues bloquées

$\vec{v}_{gliss} = V\vec{u}_x$ pour les deux roues. $F_m = F_a + f(M + 2m)g$.

2) Force nécessaire pour un déplacement sans glissement

$V = R\Omega_1 = R\Omega_2$ $F_m = F_a$.

3) Chariot automobile avec les deux roues qui roulent

$\Gamma_m = RF_a$.

Les techniques mathématiques à connaître

Produit vectoriel et calcul de l'opérateur rotationnel

Produit vectoriel :

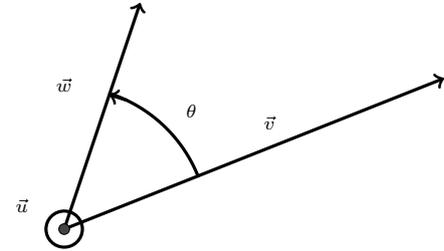
$\vec{v} \wedge \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{v} et \vec{w} :

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases}$$

Son sens est obtenu par la règle du tire bouchon, ou bien celle de la main droite ou bien encore celle du bonhomme d'Ampère.

Dans un repère cartésien direct (x, y, z) ,

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - w_y \cdot v_z \\ v_z \cdot w_x - w_z \cdot v_x \\ v_x \cdot w_y - w_x \cdot v_y \end{pmatrix}$$



Définition du rotationnel :

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S}$ pour une surface S délimitée par un contour fermé \mathcal{C} (formule de Stokes).

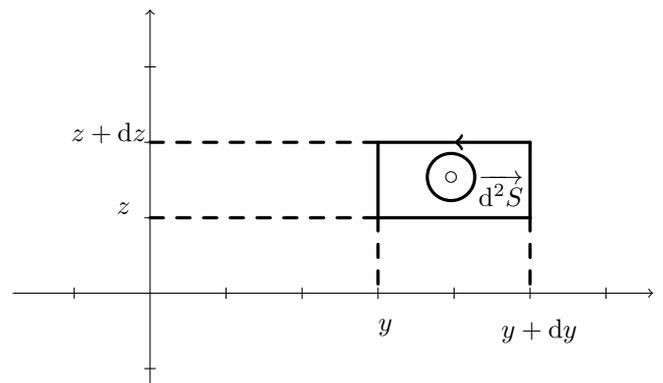
Calcul dans le repère cartésien :

pour une surface élémentaire $d^2\vec{S} = dy dz \vec{u}_z$,

$$\text{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S} = \text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{u}_x dy dz = \mathcal{C}(\vec{A})$$

Si on prend un rectangle entre y et $y + dy$ et z et $z + dz$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\vec{A}) &= +A_y(x, y, z) dy \\ &+ A_z(x, y + dy, z) dz \\ &- A_y(x, y, z + dz) dy \\ &- A_z(x, y, z) dz \\ \Rightarrow \mathcal{C}(\vec{A}) &= +\frac{\partial A_z}{\partial y} dy dz \\ &- \frac{\partial A_y}{\partial z} dz dy \end{aligned}$$



Donc $\text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{u}_x = +\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$.

Expressions avec l'opérateur nabla : $\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

avec l'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes seulement!!!

Expressions dans un repère quelconque :

dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

$$\text{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix}$$

Technique à maîtriser

jeudi 28 septembre 2017

I- Capacités exigibles

1. Cinématique du solide



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
Dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe, décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

2. Dynamique du solide en translation



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Exploiter les lois de Coulomb fournies dans le cas d'une mise en mouvement ou d'un freinage.
Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.
Exprimer la condition de non-glissement des roues d'un véhicule.
Appliquer la loi de la quantité de mouvement et la loi de l'énergie cinétique à un véhicule à roue.
Expliquer qualitativement les rôles respectifs du moteur et des actions de contact exercées par la route selon qu'on envisage un bilan énergétique global ou un bilan de quantité de mouvement global.

3. Dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Définir un couple.
Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.
Appliquer la loi du moment cinétique aux roues d'un véhicule en translation rectiligne uniforme, dans le référentiel du véhicule.

4. Statique du solide



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Exploiter les lois de Coulomb fournies dans le cas d'un équilibre.

II- Méthodes

1. Cinématique du solide

A) Appliquer la relation de Varignon *méthode*

Quel que soit le couple de point M et N d'un solide, les vitesses de ces points \vec{v}_M et \vec{v}_N dans un référentiel R suivent la relation :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{NM}$$

B) Calculer une vitesse de glissement *méthode*

La vitesse de glissement du solide S_1 par rapport à S_2 , si les deux solides sont en contact ponctuel en M , est :

$$\vec{v}_{gliss}(S_1/S_2) = \vec{v}_{M_1 \in S_1/R} - \vec{v}_{M_2 \in S_2/R}$$

2. Dynamique du solide en translation

C) Réaction tangentielle en cas de non glissement *méthode*

On connaît la direction et le sens de la réaction normale : \vec{N} , mais c'est plus compliqué avec la réaction tangentielle. Aussi, il vaut mieux utiliser des grandeurs algébriques qui sont les projections de \vec{T} .

D) Réaction tangentielle en cas de glissement *méthode*

Il faut d'abord caractériser le glissement :

$$\vec{v}_{gliss} \neq \vec{0}$$

pour connaître sa direction et son sens \vec{e}_{gliss} (vecteur normé). On connaît alors la direction et le sens de la réaction tangentielle \vec{T} :

$$\vec{T} = -\mu_d \cdot N \cdot \vec{e}_{gliss}$$

E) Condition dynamique de non glissement *méthode*

On connaît la direction et le sens de la réaction normale : \vec{N} , mais c'est plus compliqué avec la réaction tangentielle. Aussi, il vaut mieux utiliser des grandeurs algébriques qui sont les projections de \vec{T} . La condition dynamique revient à écrire

$$\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|$$

F) Condition dynamique de contact *méthode*

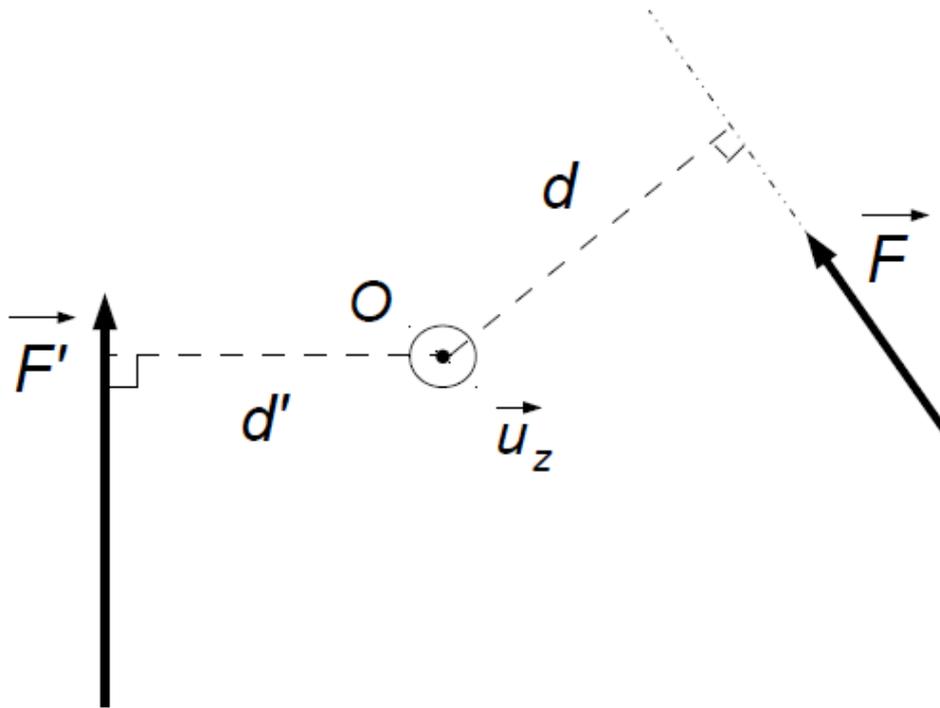
On peut utiliser le fait que le contact entre deux solides est perdu dès que la réaction normale de l'un sur l'autre s'annule :

$$\vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \text{perte de contact}$$

3. Dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe

G) Calculer le moment d'une force grâce à la méthode du bras de levier *méthode*

Le moment d'une force \vec{F} projeté sur l'axe Oz est $M_{Oz} = \pm F.d$ où d est le bras de levier de la droite d'action ($M_{Oz} > 0$ si cela tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, négatif sinon).



H) Dynamique du solide en rotation par rapport à un axe fixe *méthode*

Le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation Oz tout comme le théorème de la puissance cinétique donne :

$$J_{Oz} \frac{d\Omega_z}{dt} = M_{Oz}(ext)$$

On rappelle d'autre part que la liaison pivot étant supposée parfaite, la puissance de cette action est nulle.

4. Statique du solide

I) Conditions cinématiques d'immobilité *méthode*

Un solide Σ est immobile si tous les points matériels le composant sont immobiles :

$$\vec{v}_M = \vec{0} \quad \forall M \in \Sigma$$

D'après le torseur cinématique du solide, un solide Σ est immobile ssi

- un de ses points matériels le composant est immobile $\exists A \in \Sigma$ tel que $\vec{v}_A = \vec{0}$;
- son vecteur rotation est nul : $\vec{\Omega}_\Sigma = \vec{0}$.

J) Conditions dynamiques d'immobilité *méthode*

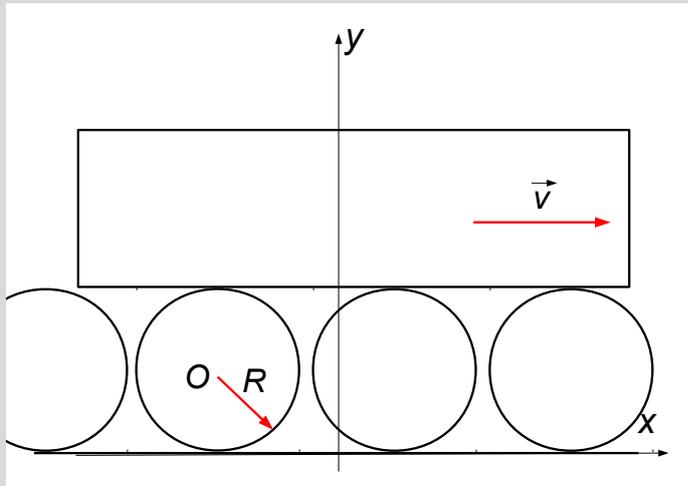
si un solide Σ est immobile alors, nécessairement

$$\begin{cases} \sum \vec{F}(ext) = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O(ext) = \vec{0} \end{cases}$$

III- Exercices

1. Cinématique du solide

1.1) Astérix et Cléopâtre



Obélix pousse à la vitesse v un bloc de pierre (assimilé à un parallélépipède rectangle) sur des rondins de bois (assimilés à des cylindres de rayon R) qui ne glissent ni sur le sol, ni sur la pierre.

- 1) Quelle est la vitesse du centre de gravité des rondins, v_O ?
- 2) Quelle est leur vitesse angulaire Ω ?

Soient I_1 , le point de contact du rondin avec le sol et I_2 , le point de contact du rondin avec la pierre. Dans le référentiel du sol, $\vec{v}(I_1) = \vec{0} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_1$ et $\vec{v}(I_2) = \vec{v} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_2$.

- 1) En sommant les deux : $\vec{v} = 2\vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{OI}_1 + \vec{OI}_2)$, soit :

$$v_O = \frac{v}{2}$$

- 2) On en déduit, par $\vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}_1 = \vec{0}$, que

$$\Omega = \frac{v_O}{R} = \frac{v}{2R}$$

1.2) Principe du différentiel

On va donner le principe d'un différentiel de voiture, qui permet, dans un virage, aux deux roues motrices de tourner à des vitesses différentes.

Un cylindre creux, d'axe Oz , de rayon R_2 , tourne à la vitesse angulaire ω_2 d'une roue et un cylindre coaxial, de rayon R_1 , à la vitesse angulaire ω_1 de l'autre.

On supposera $R_1 < R_2$.

La synchronisation entre les deux roues se fait par l'intermédiaire d'un troisième cylindre de diamètre $R_2 - R_1$, tangent aux deux précédents : il est incliné dans le cylindre de rayon R_2 et roule sans glisser (en fait il s'agit de roues dentées).

- 1) Ecrire les deux conditions de non glissement dans le repère cylindrique d'axe (Oz) .

- 2) En déduire, en fonction de R_2 , ω_2 , R_1 et ω_1 :

2.a) la vitesse angulaire ω_3 du cylindre de rayon $R_3 = \frac{R_2 - R_1}{2}$;

2.b) et la vitesse v_3 de son centre C .

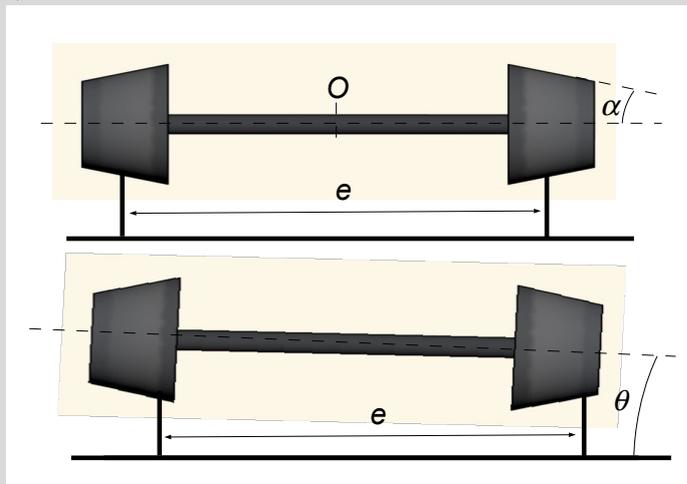
- 1) Au point de contact entre le cylindre 1 et le cylindre 3 : $\vec{v}(I_1) = \omega_1 \cdot R_1 \cdot \vec{u}_\theta$.
 Au point de contact entre le cylindre 2 et le cylindre 3 : $\vec{v}(I_2) = \omega_2 \cdot R_2 \cdot \vec{u}_\theta$.
- 2) Le torseur cinématique du cylindre 3 permet d'en déduire : $\vec{v}(C) = (\omega_2 \cdot R_2 - \omega_3 \cdot R_3) \cdot \vec{u}_\theta$ et $\vec{v}(C) = (\omega_1 \cdot R_1 + \omega_3 \cdot R_3) \cdot \vec{u}_\theta$. Soit :
- 2.a) la vitesse angulaire

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2 - \omega_1 \cdot R_1}{R_2 - R_1}$$

2.b) et $\vec{v}(C) = \frac{\omega_2 \cdot R_2 + \omega_1 \cdot R_1}{2} \vec{u}_\theta \Rightarrow$

$$v_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2 + \omega_1 \cdot R_1}{2}$$

1.3) Les roues des trains



Un wagon d'un train roule à la vitesse v_0 . Les rails sont écartés de la distance e . Les roues sont solidairement reliées à un essieu qui tourne à la vitesse angulaire ω . Le wagon est lié au centre de l'essieu. Dans tout le problème, on supposera que les roues du train ne glissent pas sur les rails.

- 1) La voie ferrée est rectiligne. Que vaut ω en fonction de v_0 et r_0 , le rayon des roues ?
- 2) Le train aborde maintenant un virage de rayon de courbure R ($R \gg e$).
 - 2.a) Exprimer la vitesse de la roue à l'extérieur du virage, v_1 en fonction de e , R et v_0 .
 - 2.b) Exprimer la vitesse de la roue à l'intérieur du virage, v_2 en fonction de e , R et v_0 .
- 3) Les roues des trains doivent avoir des rayons (r_1 et r_2) différents !
 - 3.a) Exprimer $\frac{r_1}{r_2}$ en fonction de e et R .
 - 3.b) Proposer une solution technique pour que la dernière condition soit réalisée quelle que soit R (on se rappellera que les trains penchent dans les courbes).
- 4) Questions subsidiaires :
 - 4.a) Pourquoi le métro couine ?
 - 4.b) Comment ça marche pour les voitures ?

1) $v_0 = \omega \cdot r_0$.

2)

2.a) A l'extérieur du virage : $v_1 = \Omega \cdot (R + \frac{e}{2}) = (1 + \frac{e}{2R}) \cdot v_0$.

2.b) A l'intérieur du virage : $v_2 = \Omega \cdot (R - \frac{e}{2}) = (1 - \frac{e}{2R}) \cdot v_0$.

3)

3.a) Donc :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R + \frac{e}{2}}{R - \frac{e}{2}} = \left(1 + \frac{e}{2R}\right) \cdot \left(1 - \frac{e}{2R}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{e}{R} \neq 1$$

Condition de roulement sans glissement :

$$\begin{cases} v_1 = \omega \cdot r_1 \\ v_2 = \omega \cdot r_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} \approx 1 + \frac{e}{R} \neq 1$$

3.b) Les trains ont des roues coniques ! Ainsi, ils penchent dans les courbes.

4)

4.a) Le métro couine car ses roues glissent dans les virages de faible rayon R de courbure.

4.b) Les voitures ont des différentiels pour assurer une vitesse différente sur chaque roue.

2. Dynamique du solide en translation

2.4) L'échelle

On considère une échelle de longueur ℓ_0 , appuyée le long d'un mur vertical (on y négligera le frottement) et posée sur un sol horizontal de coefficient de frottement μ , faisant un angle α avec le sol. On modélise un homme qui grimpe sur cette échelle par une masse ponctuelle m posée sur une marche à une distance ℓ de l'extrémité basse de l'échelle. On négligera le poids de l'échelle devant celle de l'homme.

- 1) Montrer que les conditions de non glissement de l'échelle aboutissent à : $\ell < \ell_{\max}$. Que vaut ℓ_{\max} en fonction de ℓ_0 , μ et α ?
- 2) Comment être sûr de ne pas glisser en montant sur l'échelle?

- 1) Théorème de la résultante cinétique et du moment cinétique au point de contact avec le sol :

$$\begin{cases} (1) N_s - m.g = 0 \\ (2) N_m - T_s = 0 \\ (3) \ell.m.g.\cos(\alpha) - \ell_0.N_m.\sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Conditions de non glissement :

$$T_s < \mu.N_s \Rightarrow N_m < \mu.N_s = \mu.m.g$$

$$(3) \Rightarrow m.g > \frac{\ell_0.N_s}{\ell_0 - \ell} (1 - \mu.\tan(\alpha))$$

$$\Rightarrow \ell < \ell_{\max} = \ell_0.\mu.\tan \alpha$$

- 2) Pour être sûr de ne pas glisser, il faut :

$$\ell_{\max} > \ell_0 \Rightarrow \tan \alpha > \frac{1}{\mu}$$

2.5) L'archet de violon

Un archet de violon de masse m , se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v.\vec{e}_x$ sur une corde située à l'abscisse $x(t)$.

La corde tendue à ses extrémités est soumise à une force de rappel $\vec{F} = -k.x(t).\vec{e}_x$ (k est proportionnelle à la tension de la corde) ainsi qu'à la réaction de l'archet (le coefficient de frottement statique est noté μ_s et on supposera que le coefficient de frottement dynamique μ_d est rendu nul grâce au colophane).

A l'instant initial $t = 0$ la corde se trouve en position $x(t) = 0$.

- 1) Montrer que lors d'une première phase l'archet entraîne avec lui la corde.
- 2) A quelle date s'arrête cette phase?
- 3) Quelle est ensuite le mouvement de la corde?

Les forces appliquées sur la corde sont

- la force de rappel $\vec{F} = -k.x(t).\vec{e}_x$;
- la réaction normale $\vec{N} = -N.\vec{e}_y$;
- la réaction tangentielle $\vec{T} = T_x.\vec{e}_x$

Les forces appliquées sur l'archet sont

- la réaction normale $\vec{N} = +N.\vec{e}_y$;
- le poids $\vec{P} = -m.g.\vec{e}_y$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'archet donne : $N = m.g$ et appliqué à la corde : $-k.x(t) + T_x = \frac{d\vec{P}}{dt}$.

1) Première phase Au début (si $t = 0$), $T_x = 0$ qui vérifie la condition de non glissement : l'archet entraîne avec lui la corde qui a donc une vitesse linéaire. Ainsi, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ et donc $T_x = k.x(t) = k.v.t$.

2) Cette phase s'arrête dès que $|T_x| = \mu_s.N$ donc si $k.v.t = \mu_s.m.g$, c'est-à-dire $t = \frac{\mu_s.m.g}{k.v}$

3) Seconde phase Il y a alors glissement et l'équation du mouvement devient : $-k.x(t) = \frac{d\vec{P}}{dt}$, soit $m'\ddot{x} + k.x = 0$, qui est l'équation d'un oscillateur. Ainsi, la corde oscille (vibre!)

2.6) Le trampoline

On modélise un trampoline T par un ressort vertical OT de longueur à vide l_0 , de raideur k , fixé à un point O fixe au sol.

Tous les mouvements se font suivant un axe vertical (Oz) dirigé vers le haut. On néglige toute force de frottement.

Un homme assimilé à un point matériel H de masse m_H arrive à $t = 0$ sur le tapis avec une vitesse initiale $\vec{v} = -v_0 \cdot \vec{u}_z$.

1) L'homme décollera-t-il du trampoline ?

1) Equations différentielles :

1.a) On projette le principe fondamental de la dynamique appliqué à H sur \vec{u}_z :

$$m_H \cdot \ddot{z}_H = -m_H \cdot g + N$$

1.b) Le principe de l'action et de la réaction stipule que l'action exercée par H sur T est $-\vec{N}$. On projette le principe fondamental de la dynamique appliqué à T sur \vec{u}_z : $m_T \cdot \ddot{z}_T = 0 = -N - k \cdot (z - l_0)$.

Donc

$$m_H \cdot \ddot{z}_H = -m_H \cdot g - k \cdot (z - l_0)$$

qui est l'équation d'un oscillateur de solution

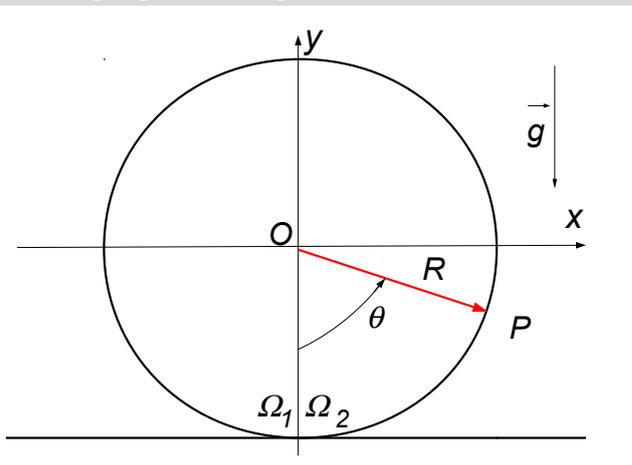
$$z_H(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) + \frac{k \cdot l_0 - m_H \cdot g}{k}$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} \dot{z}_H(t=0) = -\Omega \cdot A \cdot \sin(\varphi) = -v_0 \\ z_H(t=0) = A \cdot \cos(\varphi) + \frac{k \cdot l_0 - m_H \cdot g}{k} = l_0 \end{cases}$$

Perte de contact avec le trampoline : $\Leftrightarrow N = 0 \Leftrightarrow z = l_0$. Comme la condition de position initiale est $z_H(t=0) = l_0$, l'oscillateur repassera par cette position et décollera alors.

2.7) Le looping au mini-golf



On considère une gouttière hélicoïdale, d'axe horizontal (suivant (Oz)), posée sur le sol en Ω_1 et Ω_2 . Sa projection dans le plan vertical (xOy) ((Oy) est vertical, vers le haut) est donc un cercle de centre O et de rayon R .

Une balle de golf assimilée à un point matériel en P , de masse m , entre dans la gouttière en Ω_1 avec une vitesse initiale v_0 . On repère la position de P par l'angle θ que fait \vec{OP} avec $\vec{O\Omega_1}$.

Le contact de la balle sur la gouttière est supposé sans frottement et on néglige la résistance de l'air.

1) On suppose tout d'abord que P reste toujours en contact avec la gouttière.

1.a) Montrer que si $v_0 > v_1$ que l'on exprimera en fonction de g et R , la balle sort de la gouttière en Ω_2 .

1.b) Si $v_0 < v_1$, montrer que la balle ressort de la gouttière en Ω_1 après être montée jusqu'à une altitude y_1 que l'on exprimera en fonction de v_0 , g et R .

2) Tant que P reste en contact avec la gouttière.

2.a) Exprimer la vitesse \vec{v} dans le repère cylindrique d'axe (Oz) .

2.b) Exprimer l'accélération \vec{a} dans le repère cylindrique d'axe (Oz) .

2.c) Exprimer la réaction N de la gouttière en fonction de θ , m , g et R .

2.d) En déduire N en fonction de l'altitude y de P , de y_1 , m , g et R .

3) On ne suppose plus que P reste toujours en contact avec la gouttière.

- 3.a)** Exprimer, en fonction de y_1 , l'altitude y_2 de P pour laquelle N s'annulerait.
3.b) Montrer que si $v_0 > v_2$ que l'on exprimera en fonction de g et R , la balle reste en contact avec la gouttière.
3.c) Conclure sur le mouvement de la balle en fonction de v_0 .

1) P reste toujours en contact avec la gouttière.

1.a) Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m.v^2$.

Energie potentielle : $E_p = m.g.y$.

Energie mécanique qui se conserve : $E_m = \frac{1}{2}m.v^2 + m.g.y = \frac{1}{2}m.v_0^2 - m.g.R$.

La vitesse à l'altitude y est donc : $v = \sqrt{v_0^2 - 2.g.(R + y)}$.

Il faut que cette expression ait un sens pour tout $y \in [-R; +R]$.

Soit : $v_0^2 > 2.g.(R + y) \Leftrightarrow v_0^2 > 4.g.R$.

La balle sort de la gouttière en Ω_2 si :

$$v_0 > v_1 = 2.\sqrt{g.R}$$

1.b) La vitesse s'annule en y_1 tel que $v_0^2 - 2.g.(R + y_1) = 0$, soit :

$$y_1 = -R + \frac{v_0^2}{2.g}$$

Si $v_0 < v_1$, $y_1 < R$, donc la balle ressort de la gouttière en Ω_1 après être montée jusqu'à l'altitude y_1 .

2) Tant que P reste en contact avec la gouttière.

2.a) La vitesse dans le repère cylindrique d'axe (Oz) est :

$$\vec{v} = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

2.b) L'accélération dans le repère cylindrique d'axe (Oz) est :

$$\vec{a} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r + R.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

2.c) Les forces exercées sur P dans le repère cylindrique d'axe (Oz) sont :

- le poids : $\vec{P} = -m.g.\vec{e}_y = -m.g.\cos(\theta).\vec{e}_r + m.g.\sin(\theta).\vec{e}_\theta$;
- la réaction du support : $\vec{N} = -N.\vec{e}_r$;

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{e}_r donne :

$$N = m.R.\dot{\theta}^2 - m.g.\cos(\theta)$$

2.d) Or $y = -R.\cos(\theta)$, et $v^2 = R^2.\dot{\theta}^2 = v_0^2 - 2.g.(R + y)$.

Et comme $y_1 = -R + \frac{v_0^2}{2.g}$, $v^2 = R^2.\dot{\theta}^2 = 2.g.(y_1 - y)$.

Donc

$$N = \frac{m.g}{R} (3.y - 2.y_1)$$

3) P peut quitter la gouttière.

3.a) N s'annulerait en

$$y = y_2 = \frac{2}{3}y_1$$

3.b) On veut que $y_2 > R$, soit : $-R + \frac{v_0^2}{2.g} > \frac{3.R}{2} \Leftrightarrow$

$$v_0 > v_2 = \sqrt{5.g.R} > v_1$$

Ainsi, la balle reste en contact avec la gouttière.

3.c) Mouvement de la balle en fonction de v_0 :

- $v_0 < v_1$: la balle reste en contact avec la gouttière mais redescend en Ω_1 (le looping est raté) ;
- $v_0 \in]v_1; v_2[$: la balle quitte la gouttière et tombe (le looping est raté) ;
- $v_0 > v_2$: la balle reste en contact avec la gouttière et redescend en Ω_2 (le looping est réussi).

2.8) Frottements d'une voiture

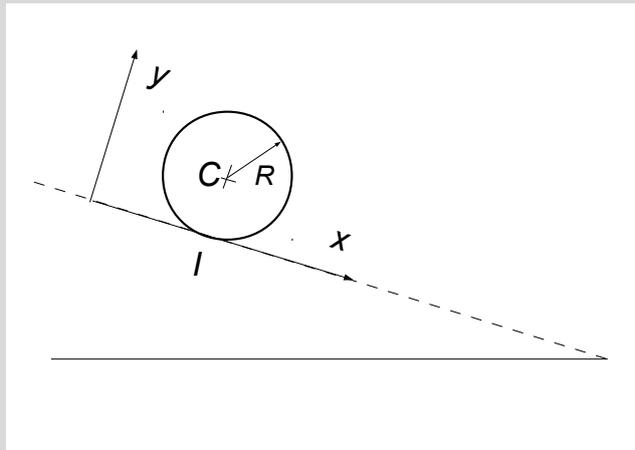
Expliquer pourquoi, dans une voiture, il faut :

- 1) limiter les frottements entre les pièces du moteur (en les lubrifiant),
- 2) mais augmenter les frottements entre les roues et la route (grâce aux pneus).

Car :

- les actions de contact entre les pièces du moteur sont internes,
- les actions entre les roues et la route sont externes (et peuvent être motrices!).

2.9) Cylindre roulant sans glisser sur un support incliné



On s'intéresse à un cylindre S de rayon R , d'axe Cz , de masse m et de moment d'inertie J par rapport à son axe, qui roule sans glisser sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontale.

- 1) Déterminer l'équation qui relie x_C , la projection de la vitesse du centre de masse du cylindre, à Ω_z , la projection du vecteur rotation du cylindre.
- 2) Exprimer
 - 2.a) le théorème de la résultante cinétique
 - 2.b) le théorème du moment cinétique de deux manières différentes. Montrer qu'elles sont équivalentes.
 - 2.c) En déduire l'équation d'évolution du cylindre \ddot{x}_C en fonction des données du problème.
- 3) N'aurait-on pas pu la trouver directement ?

1)

$$\vec{v}_I = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_I + \vec{\Omega} \wedge \vec{IC}$$

soit $\dot{x}_C = -R.\Omega_z$.

2)

2.a) le théorème de la résultante cinétique donne $N = m.g.\cos(\alpha)$ et $T_x + m.g.\sin(\alpha) = m.\ddot{x}_C$.

2.b) le théorème du moment cinétique barycentrique donne :

$$J\dot{\Omega}_z = R.T_x = -R.m.g.\sin(\alpha) + R.m.\ddot{x}_C$$

Tandis que le théorème du moment cinétique en I fixe donne :

$$\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} = -R.\sin(\alpha).m.g\vec{e}_z$$

Or $\vec{\sigma}_I = \vec{\sigma}_C + \vec{P} \wedge \vec{CI} = \vec{\sigma}_C - m\dot{x}_x R\vec{e}_z$. Ainsi,

$$\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = -R.\sin(\alpha).m.g\vec{e}_z + m\dot{x}_x R\vec{e}_z$$

Les deux cas donnent la même chose.

2.c) En utilisant la relation cinématique de roulement sans glissement, on trouve :

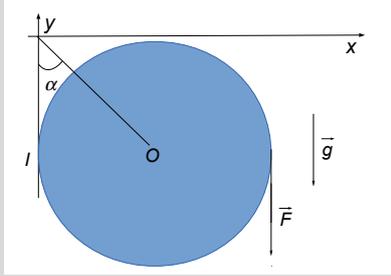
$$\frac{J}{R}\ddot{x}_C = -R.m.g.\sin(\alpha) + R.m.\ddot{x}_C$$

soit

$$\ddot{x}_C = \frac{m.R^2}{J + m.R^2}g\sin(\alpha)$$

3) On aurait pu appliquer le théorème de la puissance cinétique : $P = 0 + m.g\sin(\alpha).\dot{x}_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J.\omega_z^2 + \frac{1}{2}m.\dot{x}_C^2\right)$ qui redonne la même chose en prenant en compte la relation cinématique de roulement sans glissement.

2.10) Essuie-tout glissant contre le mur



Un rouleau d'essuie-tout assimilé à un cylindre d'axe fixe Oz , de masse m , de moment d'inertie J par rapport à son axe, frotte le long du mur en un point I . Son axe est relié au mur par une ficelle qui fait un angle α avec le mur.

On tire sur le papier verticalement vers le bas avec une force de norme F pour faire tourner le rouleau avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega_z \cdot \vec{y}$.

1) Déterminer l'équation différentielle suivie par Ω_z .

Il y a glissement vers le haut, donc $\vec{T} = -T \cdot \vec{e}_y = -\mu_d \cdot N \cdot \vec{e}_y$.

Le théorème de la résultante cinétique donne :

$$\begin{cases} -T + F' \cdot \cos \alpha - m \cdot g - F = 0 \\ N - F' \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique donne :

$$J \cdot \dot{\omega}_z = +R \cdot T - R \cdot F$$

La résolution donne :

$$J \cdot \dot{\omega}_z = +R \cdot (\mu_d \cdot N - F) = +R \cdot (\mu_d \cdot F' \cdot \sin \alpha - F)$$

avec $F' \cdot \cos \alpha = m \cdot g + F + T = m \cdot g + F + \mu_d \cdot F' \cdot \sin \alpha$, soit $F' = \frac{m \cdot g + F}{\cos \alpha - \mu_d \cdot \sin \alpha}$, Aussi,

$$J \cdot \dot{\omega}_z = +R \cdot \left(\mu_d \cdot \frac{m \cdot g + F}{\cos \alpha - \mu_d \cdot \sin \alpha} \cdot \sin \alpha - F \right)$$

3. Dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe

3.11) Effet d'une poulie parfaite

Comparer les forces exercées sur une corde de part et d'autre d'une poulie parfaite (c'est à dire de masse quasi nulle, et ayant une liaison parfaite sans frottement).

$$J \ddot{\theta} = R \cdot (T_1 - T_2)$$

avec $J = 0$. Donc $T_1 = T_2$.

3.12) Oscillations d'un pendule pesant aux petits angles

On s'intéresse à un pendule de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, de masse m , dont le centre d'inertie G est une distance a sous l'axe de rotation Oz . Montrer que le pendule est synchrone aux petits angles et déterminer la période T des oscillations libres.

$$J \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot a \sin \theta$$

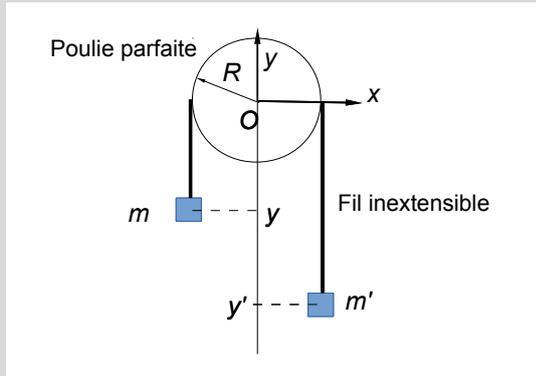
qui devient aux petits angles :

$$J \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot a \cdot \theta \approx 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot a}{J}} = \frac{2\pi}{T}$, donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}}$$

3.13) Machine d'Atwood

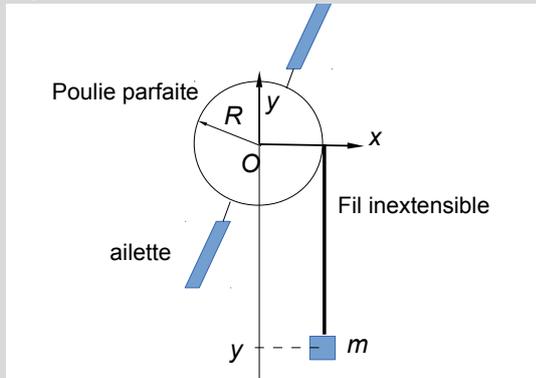


Une poulie parfaite sans masse peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Autour d'elle un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y) à la masse m' dont l'altitude est y' (cf. figure). $m' < m$.

1) Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.

Le fil est inextensible donc $dy = -dy'$ et les tensions auxquelles le fil soumet les masses sont égales ($T = T'$). Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ et à m' donne $m'\ddot{y}' = T' - m'g$.
La résolution amène à $\ddot{y} = -\frac{m-m'}{m+m'}g$.

3.14) Machine de Morin

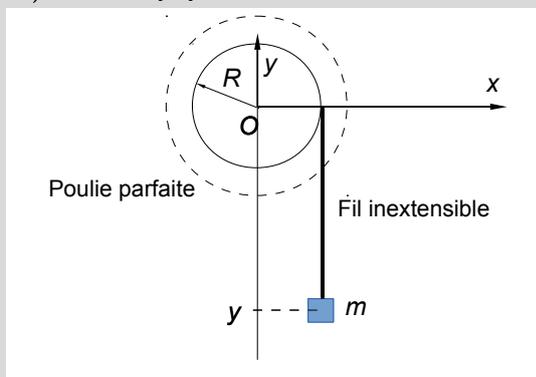


Un cylindre de rayon R peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y). Des ailettes freinent la rotation du cylindre, lui imposant un moment projeté par rapport à l'axe Oz $-\alpha.\Omega_z$, où α est une constante positive et Ω_z la projection du vecteur rotation du cylindre selon Oz .

1) Montrer que Ω_z tend vers une constante quand la masse descend.

Le fil est inextensible donc $dy = -R.\omega_z.dt$ et les tensions auxquelles le fil soumet la masse et le cylindre sont égales en norme ($T = T'$) mais opposées. Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ tandis que le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre donne $J\dot{\Omega}_z = -R.T - \alpha.\Omega_z$.
Cela mène à l'équation différentielle $(J + m.R^2)\dot{\Omega}_z + \alpha.\Omega_z = -m.R.g$. Si $t \ll \frac{J+m.R^2}{\alpha}$, $\Omega_z \approx \frac{-m.R.g}{\alpha}$.

3.15) Ancien yoyo



Un cylindre peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Oz est noté J . Autour de lui à une distance R de l'axe s'enroule un fil inextensible relie d'un côté la masse m (dont l'altitude est y).

1) Montrer que tout se passe comme si la masse m chutait dans un champ de pesanteur réduit.

Le fil est inextensible donc $dy = -R.\omega_z.dt$ et les tensions auxquelles le fil soumet la masse et le cylindre sont égales en norme ($T = T'$) mais opposées. Le TRC appliqué à m donne $m\ddot{y} = T - mg$ tandis que le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre donne $J\dot{\Omega}_z = -R.T$.
Cela mène à l'équation différentielle $m\ddot{y} = \frac{-J}{R}\dot{\Omega}_z - mg = \frac{J}{R^2}\ddot{y} - mg$. Soit $\ddot{y} = -\frac{m.R^2}{J+m.R^2}g$.

4. Statique du solide

4.16) Porter un sac lourd

Un sac très lourd (de masse m) est accroché au même point O à deux poignées A et B . Deux personnes portent le sac, chacune prenant une poignée. Ces dernières font alors respectivement un angle α_A et α_B avec la verticale.

- 1) Pour quelle personne est-ce le plus lourd à porter ?
- 2) Comment faire de façon à rendre le portage égalitaire et le moins difficile ?

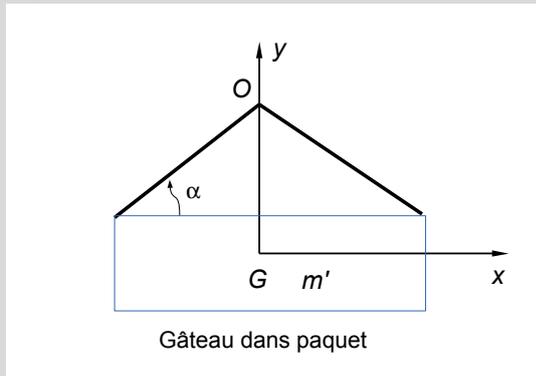
A l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées sur le système sac est nulle :

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

qui donne projeté sur un axe vertical $F_A \cos \alpha_A + F_B \cos \alpha_B = m.g$ et sur un axe horizontal $F_A \sin \alpha_A = F_B \sin \alpha_B$.

- 1) Ainsi celui qui a l'angle le plus grand porte le moins.
- 2) Il faut des angles égaux pour porter de façon égalitaire et un angle le plus petit possible pour porter le moins possible.

4.17) Le gâteau



Un gâteau homogène (de masse m) cylindrique de rayon R est mis dans un carton parallélépipède rectangle de côté $2R$, de centre G . Quatre ficelles sont accrochées au paquet et reliées entre elles en O , à la verticale de G . Elles font alors un angle α avec le paquet horizontal.

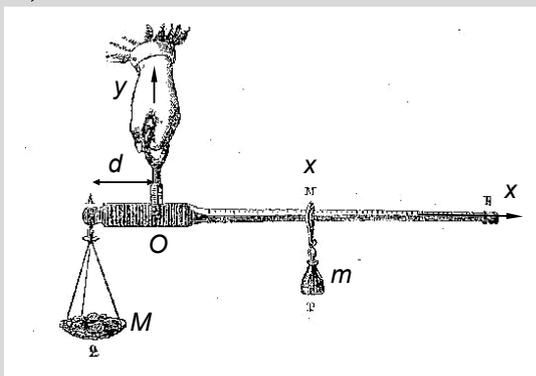
- 1) Pourquoi ne faut-il pas que α soit trop petit ?

A l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées au système paquet est nulle :

$$m\vec{g} + \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{0}$$

Qui donne projeté sur un axe horizontal $\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}$ et $\vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{0}$ sur un autre axe horizontal. Soit l'égalité des normes des tensions. La condition projetée sur un axe vertical donne $4.T \sin \alpha = m.g$. Aussi, $T = \frac{m.g}{4 \sin \alpha}$ qui tend vers l'infini (la ficelle casse!) si $\alpha \rightarrow 0$.

4.18) Balance romaine



On désire peser la masse inconnue M à l'aide d'une balance romaine (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz . La masse M est suspendue à une distance d du point O , tandis qu'une autre masse m est suspendue de l'autre côté à une distance x variable.

Pour $x = x_{eq}$ la balance voit son fléau rester horizontal.

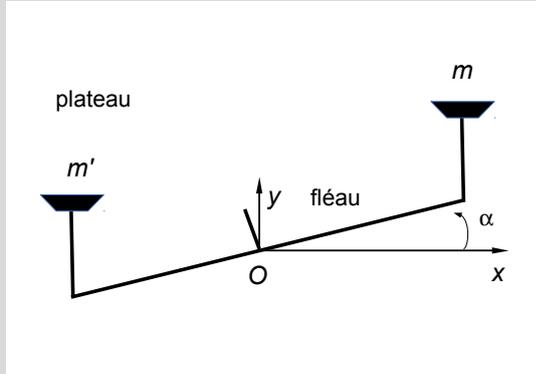
- 1) Montrer que l'axe Ox du fléau peut être linéairement gradué en kilogrammes.

L'équilibre du système fléau \cup masses impose dans le référentiel du sol galiléen : $\sum \vec{M}_O(EXT) = \vec{0}$ qui donne dans notre cas :

$$T \times 0 + Mgd - mgx_{eq} = 0$$

soit $x_{eq} = \frac{d}{m}M$. Il existe donc une relation de proportionnalité entre x_{eq} et M .

4.19) Balance Roberval



On désire peser la masse inconnue m à l'aide d'une balance Roberval (cf. figure) composée d'un fléau qui peut tourner librement autour de son axe horizontal Oz qui supporte deux plateaux accrochés à une distance d . Un dispositif articulé rend horizontaux les plateaux qui supportent respectivement les masses m et m' .

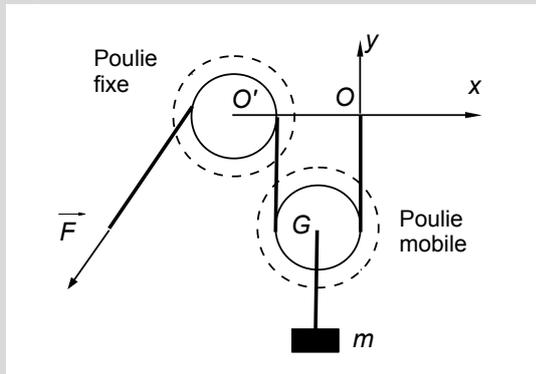
1) Quelle est la condition sur m' et m pour que la balance ait son fléau horizontal?

L'équilibre du système fléau \cup masses impose dans le référentiel du sol galiléen : $\sum \vec{M}_O(EXT) = \vec{0}$ qui donne dans notre cas :

$$m'gd - mgd = 0$$

soit $m' = m$.

4.20) Palan



Un palan peut être constitué de deux poulies parfaites (sans masse), l'une d'axe $O'z$ fixe, l'autre d'axe Gz qui garde une direction fixe. A l'axe Gz est accroché un poids de masse m . Une corde inextensible de masse négligeable accrochée en un point fixe est enroulée dans la première poulie d'axe Gz , puis dans la seconde d'axe $O'z$, le brin libre étant tiré avec une force \vec{F} par un ouvrier.

1) Montrer que le palan permet de soulever une masse lourde avec une force réduite.

Les tensions le long du fil sont égales en norme (notée T) car le fil est inextensible et les poulies parfaites. Le TRC appliqué à la poulie mobile donne à l'équilibre $m\ddot{y} = 0 = 2T - mg$.

Ainsi l'ouvrier exerce une force de norme $F = T = \frac{mg}{2}$.

5. Techniques mathématiques - Calcul de l'opérateur rotationnel

5.21) Calcul d'un rotationnel en coordonnées cartésiennes

1) Calculer $\text{rot} \vec{A}$ pour $\vec{A}(x, y, z) = xy \vec{u}_x - xy \vec{u}_y + z^2 \vec{u}_z$.

1)

$$\text{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial y} - \frac{\partial(A_y)}{\partial z} \right] \\ \left[\frac{\partial(A_x)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial x} \right] \\ \left[\frac{\partial(A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(A_x)}{\partial y} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-xy)}{\partial z} \right] \\ \left[\frac{\partial(xy)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2)}{\partial x} \right] \\ \left[\frac{\partial(-xy)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x - y \end{pmatrix}$$

5.22) Calcul d'un rotationnel en coordonnées cylindriques

- 1) Calculer $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ pour $\vec{A}(r, \theta, z) = 2 \frac{\cos \theta}{r^2} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{u}_\theta + \frac{1}{z^2} \vec{u}_z$.

1)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\frac{1}{z^2})}{\partial \theta} - \frac{\partial(-\frac{\sin \theta}{r})}{\partial z} \right] \\ \left[\frac{\partial(2 \frac{\cos \theta}{r^2})}{\partial z} - \frac{\partial(\frac{1}{z^2})}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(-\frac{\sin \theta}{r})}{\partial r} - \frac{\partial(2 \frac{\cos \theta}{r^2})}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

soit

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\sin \theta}{r^2} + 2 \frac{\sin \theta}{r^2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3 \sin \theta}{r^3} \end{pmatrix}$$

5.23) Calcul d'un rotationnel en coordonnées sphériques

- 1) Calculer $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ pour $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \vec{u}_\varphi$.

1)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r \sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(0)}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(0)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(0)}{\partial r} - \frac{\partial(0)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} [\cos \theta - 0] \\ \frac{1}{r \sin \theta} [0 - 0] \\ \frac{1}{r} [0 - 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \tan \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.24) Calcul d'un autre rotationnel en coordonnées cylindriques

- 1) Calculer $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ pour $\vec{A}(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_\theta$.

1)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(0)}{\partial \theta} - \frac{\partial(-\sin \theta)}{\partial z} \right] \\ \left[\frac{\partial(\frac{\cos \theta}{r})}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(-\sin \theta)}{\partial r} - \frac{\partial(\frac{\cos \theta}{r})}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

soit

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left[0 + \frac{\sin \theta}{r} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sin \theta}{r^2} \end{pmatrix}$$

5.25) Calcul d'une circulation de vecteur à partir de son rotationnel

- 1) D'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_S 2 \, d^2S = 2\pi R^2$$

pour une surface S qui est le disque d'axe Oz , de centre O et de rayon R .

1) D'après le théorème de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_S 2 \, d^2S = 2\pi R^2$$

pour une surface S qui est le disque d'axe Oz , de centre O et de rayon R .

5.26) Solution de $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$

\vec{B} et \vec{A} sont deux champs vectoriels reliés par $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$.

- 1) Montrer que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ est une solution de la précédente équation différentielle.
- 2) Est-ce la seule solution de cette équation différentielle?

1) On se met en cylindrique, $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ Ainsi,

$$\frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}B\vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \frac{1}{2}B\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = \frac{1}{2}Br\vec{u}_\theta$$

Par ailleurs, il faut effectuer le calcul de

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{2}Br\vec{u}_\theta\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2\mu_3} \left[\frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3\mu_1} \left[\frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1\mu_2} \left[\frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(0)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\frac{1}{2}Br^2)}{\partial z} \right] \\ \left[\frac{\partial(0)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\frac{1}{2}Br^2)}{\partial r} - \frac{\partial(0)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

C'est donc bien une solution de la précédente équation différentielle.

2) Ce n'est pas la seule solution de cette équation différentielle, car ajouter une constante (vectorielle) ne change rien.

Travaux dirigés

vendredi 29 septembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

Les volant d'inertie

Extraits de l'article "Fonctionnement d'un système de stockage inertiel par volant d'inertie"
issus du site "www.ecosources.info"

Stocker de l'énergie en faisant tourner un solide

Longtemps utilisé pour la régulation des machines à vapeur, le principe du volant d'inertie permet aujourd'hui de stocker temporairement l'énergie sous forme de rotation mécanique.

Le stockage d'énergie par volant d'inertie ou système inertiel de stockage d'énergie (SISE) est utilisé dans de nombreux domaines : régulation de fréquence, lissage de la production éolienne et solaire, stockage et restitution de l'énergie de freinage des véhicules...

Un volant d'inertie moderne est constitué d'une masse (anneau ou tube) en fibre de carbone entraînée par un moteur électrique.

L'apport d'énergie électrique permet de faire tourner la masse à des vitesses très élevées (entre 8000 et 16000 tour/min pour le modèle ci-contre) en quelques minutes. Une fois lancée, la masse continue à tourner, même si plus aucun courant ne l'alimente.

L'énergie est alors stockée dans le volant d'inertie sous forme d'énergie cinétique, elle pourra ensuite être restituée instantanément en utilisant le moteur comme génératrice électrique, entraînant la baisse de la vitesse de rotation du volant d'inertie.

Le système est monté sur roulements magnétiques et confiné sous vide dans une enceinte de protection afin d'optimiser le rendement du dispositif (temps de rotation) et ainsi prolonger la durée de stockage.

Avantages :

- Haut rendement (environ 80% de l'énergie absorbée pourra être restituée)
- Phase de stockage très rapide par rapport à une batterie électrochimique
- Aucune pollution : ni combustible fossile, ni produits chimiques
- Technologie fiable, peu d'entretien

Inconvénients :

- Temps de stockage limité (environ 15 minutes).

On donne la masse volumique de la fibre de carbone : $1,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ à $1,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.



Une unité de stockage inertiel de 25 kWh
Crédit : Beacon Power

Énoncé

- 1) Estimer l'ordre de grandeur du couple résistant exercé par la liaison pivot sur le volant d'inertie présenté.

Correction

Le théorème du moment cinétique appliqué au volant d'inertie donne

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_z$$

où J est le moment d'inertie par rapport à son axe Oz , Ω sa vitesse angulaire et $\Gamma_z < 0$ le couple exercé par la liaison (on néglige les forces de frottement fluide puisque le volant est dans le vide).

On peut estimer J par deux méthodes :

- en assimilant le volant à un cylindre de rayon $R = 0,4$ m et de hauteur $h = 1,5$ m, de masse volumique $\mu = 1,8 \times 10^3$ kg · m⁻³, soit

$$J = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} \mu r^2 dr d\theta dz = \mu \frac{R^4}{4} 2\pi h = 1,8 \times 10^3 \times \frac{0,4^4}{4} 2\pi \times 1,5 = 1,1 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- en utilisant l'énergie cinétique

$$E_{c_{max}} = 25 \text{ kW} \cdot \text{h} = 25 \times 10^3 \times 3600 = 90 \text{ MJ}$$

et la vitesse de rotation

$$\Omega_{max} = 2\pi \frac{16000}{60} = 1,67 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

or

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} J \Omega_{max}^2 \Rightarrow J = \frac{2E_{c_{max}}}{\Omega_{max}^2} = \frac{2 \times 90 \times 10^6}{(1,67 \times 10^3)^2} = 64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

On prendra $J = 10^2$ kg · m².

En un temps $\tau = 15$ min = 900 s, l'énergie cinétique passe de $E_{c_{max}} = \frac{1}{2} J \Omega_{max}^2$ à $E_{c_{fin}} = 80\% E_{c_{max}} = \frac{1}{2} J \Omega_{fin}^2$, soit

$$\Omega_{fin} = \sqrt{0,8} \Omega_{max} = 1,49 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La résolution de l'équation dynamique donne

$$\Gamma_z = J \frac{\Omega_{fin} - \Omega_{max}}{\tau} = 10^2 \times \frac{1,49 \times 10^3 - 1,67 \times 10^3}{900} = -20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

soit une force de 50 N à une distance $R = 0,4$ m de l'axe (équivalente au poids d'une masse de 5 g ce qui est peu, comme attendu).

Devoir non surveillé

vendredi 29 septembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Deux cent cinquante réponses aux questions du marin curieux

Pierre-Yves Bely
editions Gerfaut

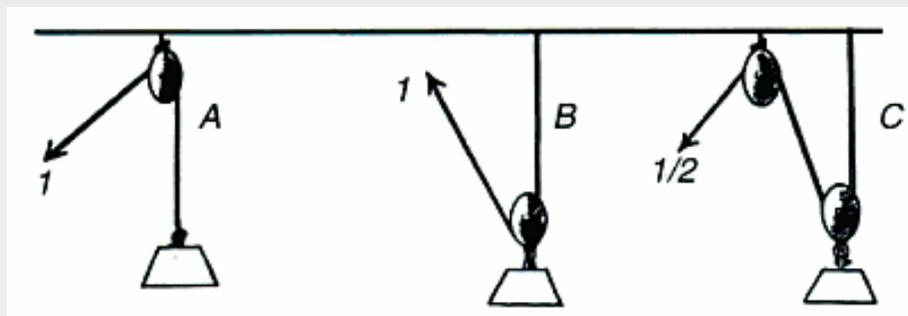
Comment tirer efficacement une corde sur un bateau ?

Comment déterminer la réduction d'effort apportée par un palan ?

On sait qu'un palan agit comme un levier : on a plus à embraquer, mais l'effort est moindre. Utiliser une poulie, néanmoins, ne suffit pas forcément à démultiplier l'effort : le gain qu'elle apporte dépend de la façon dont elle est placée.

Par exemple, à droite, la poulie du cas A ne démultiplie en rien l'effort. On gagne juste en commodité à tirer vers le bas car on s'aide de son propre poids.

Dans le cas B, on n'a encore qu'une seule poulie, mais l'effort à fournir est maintenant divisé par 2. Dans le cas C, on a cette fois deux poulies, mais la démultiplication est toujours du même rapport 2 ; on a simplement gagné en commodité à tirer vers le bas.



2 ; on a simplement gagné en commodité à tirer vers le bas.

Pourquoi un winch réduit-il si bien l'effort de tire ?

Les winchs sont omniprésents sur les bateaux modernes : pour les drisses, pour les écoutes, pour les prises de ris... Grâce à eux, un équipage réduit peut faire ce qui demandait plusieurs costauds sur un bateau d'autrefois. Comme les palans, ils permettent de démultiplier l'effort, mais ils ont sur eux un avantage décisif : le palan démultiplie, mais nécessite que l'on embraque en proportion ; le winch à manivelle permet le même ordre de démultiplication mais sans avoir à avaler des mètres en contrepartie. On doit ce petit miracle au frottement.

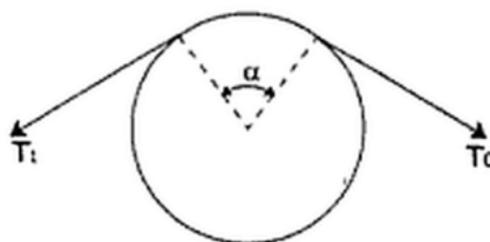
En général le frottement travaille contre nous. C'est lui qui ralentit la coque dans l'eau, qui crée la traînée sur les voiles, qui dissipe inutilement l'énergie du moteur. Dans le winch il travaille pour nous, et même de façon exponentielle !

En effet, si la tension avec laquelle on tire sur un cordage passant sur un winch est T_0 , la tension T_1 exercée par la voile peut aller jusqu'à

$$T_1 = T_0 e^{f \alpha}$$

avant que le cordage ne commence à déraper, α étant l'angle que fait le cordage autour de la poulie et f le coefficient de frottement entre le cordage et la poulée du winch.

Cordage	f	Rapport de force		
		1 tour	2 tours	3 tours
neuf et sec	0,3	6,6	43	284
usé et sec	0,2	3,5	12	43
usé et mouillé	0,1	1,9	3,5	6,6

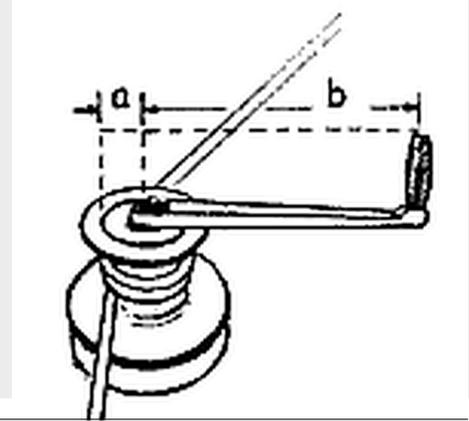


Le rapport de force entre le brin tendu (côté voile) et le brin mou (côté équipier) augmente donc de façon considérable avec le nombre de tours sur le winch comme en témoigne le tableau ci-dessus. Ce n'est pas pour rien que l'on recommande aux novices de «mettre trois tours...». On note aussi la forte perte que l'on a si le cordage est usé ou mouillé (un facteur de 40 avec 3 tours).

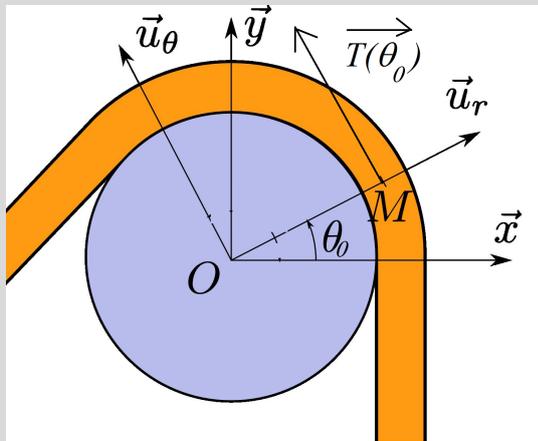
Quant à la démultiplication, elle est fonction du rapport de la longueur de la manivelle au rayon de la poulée (b/a), qui est typiquement de l'ordre de 4 ou 5. Quand le winch est à deux vitesses, le gain est encore plus élevé.

Il faudrait des palans à 3 réas pour obtenir un rapport de force équivalent, et il serait impossible d'embrayer rapidement.

NB : "embraquer" signifie tirer sur un cordage de marine.



Enoncé



Dans tout l'exercice, on se placera dans le cas statique. Les cordes sont inextensibles et flexibles. En particulier, on note la tension exercée par la partie de la corde correspondant à $\theta > \theta_0$ sur la partie correspondant à $\theta < \theta_0$:

$$\vec{T}(\theta_0) = T(\theta_0) \vec{u}_\theta$$

dans le repère cylindrique d'axe Oz , l'axe du cylindre sur lequel s'enroule la corde.

On ne s'intéressera qu'à des poulies parfaites, c'est à dire de masse quasi nulle, et ayant une liaison parfaite sans frottement.

1) Poulie

On s'intéresse au dispositif noté A dans le document.

1.a) Appliquer le théorème du moment cinétique au système poulie et corde.

1.b) En déduire que "la poulie du cas A ne démultiplie en rien l'effort. On gagne juste en commodité à tirer vers le bas car on s'aide de son propre poids."

2) Palan constitué de deux poulies.

On s'intéresse maintenant au dispositif noté C dans le document. On supposera que les deux brins de fil qui sortent de la poulie mobile sont verticaux.

2.a) En utilisant les résultats trouvés précédemment pour les cordes le long de poulies, appliquer le théorème de la quantité de mouvement à la poulie mobile.

2.b) En déduire que "l'effort à fournir est maintenant divisé par 2".

2.c) De quelle longueur faut-il tirer sur la corde pour faire monter la masse d'une longueur ℓ ?

3) Winch

3.a) Appliquer le théorème du moment cinétique au système winch et corde.

3.b) En déduire que la démultiplication "est fonction du rapport de la longueur de la manivelle au rayon de la poulée (b/a)".

3.c) Expliquer pourquoi pour avoir le même effet avec des palans, "il serait impossible d'embrayer rapidement".

4) Corde enroulée autour d'une poulée

Le coefficient de frottement statique entre la corde et la poulée (fixe dans le référentiel) est noté f .

4.a) Faire un bilan de forces appliquées sur un bout de corde infinitésimal, repéré par les angles compris entre $\theta - \frac{d\theta}{2}$ et $\theta + \frac{d\theta}{2}$.

4.b) Montrer que, au mieux (c'est-à-dire à la limite de glissement), la tension $T(\theta)$ sur la corde suit l'équation différentielle

$$dT + f T(\theta) d\theta = 0$$

4.c) En déduire que "si la tension avec laquelle on tire sur un cordage passant sur un winch est T_0 , la tension T_1 exercée par la voile peut aller jusqu'à

$$T_1 = T_0 e^{f \alpha}$$

avant que le cordage ne commence à déraper, α étant l'angle que fait le cordage autour de la poulie et f le coefficient de frottement entre le cordage et la poulée du winch."

4.d) Vérifier les valeurs numériques données dans le tableau du document.

Correction

1) Poulie

1.a) Le théorème du moment cinétique appliqué à la poulie de moment d'inertie J s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = R \cdot (T_1 - T_2)$$

avec $J = 0$.

1.b) Donc $T_1 = T_2$. Ainsi, "la poulie ne démultiplie en rien l'effort" (même tension des deux côtés de la corde. Et "on gagne juste en commodité à tirer vers le bas car on s'aide de son propre poids", car les directions des deux tensions sont différentes.

2) Palan constitué de deux poulies.

2.a) On a vu que les tensions le long du fil sont égales en norme (notée T). Le TRC appliqué à la poulie mobile donne à l'équilibre $m\ddot{y} = 0 = 2T - mg$.

2.b) Ainsi on exerce une force de norme $F = T = \frac{mg}{2}$ ("l'effort à fournir est maintenant divisé par 2").

2.c) Comme la corde est inextensible, il faudrait tirer sur la corde d'une longueur 2ℓ pour qu'elle monte d'une longueur ℓ .

3) Winch

3.a) Le théorème du moment cinétique appliqué au winch de moment d'inertie J' s'écrit :

$$J'\ddot{\theta} = aT_1 - bT_0$$

avec $\ddot{\theta}$.

3.b) Donc $T_1 = \frac{b}{a}T_0$: la démultiplication "est fonction du rapport de la longueur de la manivelle au rayon de la poulée (b/a)".

3.c) Pour avoir le même effet avec des palans, il faudrait tirer sur la corde d'une longueur $\frac{b}{a}\ell$ pour qu'elle monte d'une longueur ℓ . Ainsi, "il serait impossible d'embrancher rapidement". NB : avec un winch, du coup, il faut tourner très vite la manivelle tout de même pour "embrancher rapidement".

4) Corde enroulée autour d'une poulée

4.a) Bilan de forces appliquées sur un bout de corde infinitésimal :

- réaction normale de la poulée $\vec{R}_n = +R_n \vec{u}_r$;
- réaction tangentielle de la poulée $\vec{R}_t = +f R_n \vec{u}_\theta$;
- tension $+\vec{T}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) = T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \left[+\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{2}\vec{u}_r\right]$;
- tension $-\vec{T}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \left[-\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{2}\vec{u}_r\right]$.

4.b) Le théorème de la résultante donne

$$\vec{R}_n + \vec{R}_t + \vec{T}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - \vec{T}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = \vec{0}$$

soit

$$\vec{0} = +R_n \vec{u}_r + f R_n \vec{u}_\theta + T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \left[+\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{2}\vec{u}_r\right] + T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \left[-\vec{u}_\theta - \frac{d\theta}{2}\vec{u}_r\right]$$

à l'ordre 1 suivant \vec{u}_r :

$$0 = +R_n - \frac{dT}{2} \left(T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \right) \approx +R_n - dT T(\theta)$$

et à l'ordre 1 suivant \vec{u}_θ :

$$0 = +f R_n + T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) - T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = +f R_n + dT$$

On trouve donc bien :

$$dT + f T(\theta) d\theta = 0$$

4.c) En intégrant entre 0 et α :

$$T_1 = T_0 e^{f\alpha}$$

4.d) Les valeurs numériques données dans le tableau du document sont correctes.