

# Magnétostatique

## Notes de cours

mardi 23 janvier 2018

### I- Propriétés du champ magnétostatique

#### 1. Courants



##### Densité volumique de courant *définition*

La charge  $dq$  qui traverse la surface  $S$  (non fermée) orientée pendant  $dt$  donne l'intensité  $I$  (ou courant électrique), en ampère (A) :

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot \vec{d^2S}$$

où  $\vec{j}$  est la densité volumique de courant. Si on dispose d'une assemblée de particules numérotées  $i$ , de charge  $q_i$ , de vitesse  $\vec{v}_i$  et de densité volumique  $n_i$ ,

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$



##### remarque

La densité volumique de courant  $\vec{j}$  est volumique car le courant existe dans un volume mais  $\vec{j}$  s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$  !



##### remarque

La densité volumique de courant en un point  $M$  dépend du référentiel :  $\vec{j}(M)_{/R_1}$  dans le référentiel  $R_1$  est reliée à  $\vec{j}(M)_{/R_2}$  dans le référentiel  $R_2$  par :

$$\vec{j}(M)_{/R_1} = \vec{j}(M)_{/R_2} + \rho(M) \cdot \vec{v}(M)_{R_2/R_1}$$

où  $\vec{v}(M)_{R_2/R_1}$  est la vitesse d'entraînement locale (en  $M$ ) de  $R_2$  dans  $R_1$ .



##### Densité surfacique de courant *s'y retrouver*

Le courant électrique  $I$  qui traverse une courbe  $C$  (dans une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) est

$$I = \int_{M \in C} \vec{j}_S(M) \cdot \vec{u} d\ell$$

où  $\vec{j}_S$  en  $A \cdot m^{-1}$  est la densité surfacique de courant.



##### Invariances *s'y retrouver*

On discerne en particulier les symétries

- plane :  $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$  ou  $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$  ;
- cylindrique :  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$  ou  $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, z)$  ;
- circulaire :  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$  ;

- sphérique :  $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$  ou  $\vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r)$ .

**Plans de symétrie et d'antisymétrie pour les courants** *s'y retrouver*

Pour la distribution de courant,

$$(xOy) \text{ est plan de symétrie } \Leftrightarrow \begin{cases} j_x(x, y, -z) = +j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = +j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = -j_z(x, y, z) \end{cases}$$

$$(xOy) \text{ est plan d'antisymétrie } \Leftrightarrow \begin{cases} j_x(x, y, -z) = -j_x(x, y, z) \\ j_y(x, y, -z) = -j_y(x, y, z) \\ j_z(x, y, -z) = +j_z(x, y, z) \end{cases}$$

**Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de courants.** *schéma*

La figure 1 représente un exemple de plan de symétrie (à gauche) et d'antisymétrie (à droite).

*Plan de symétrie pour les courants    Plan d'antisymétrie pour les courants*

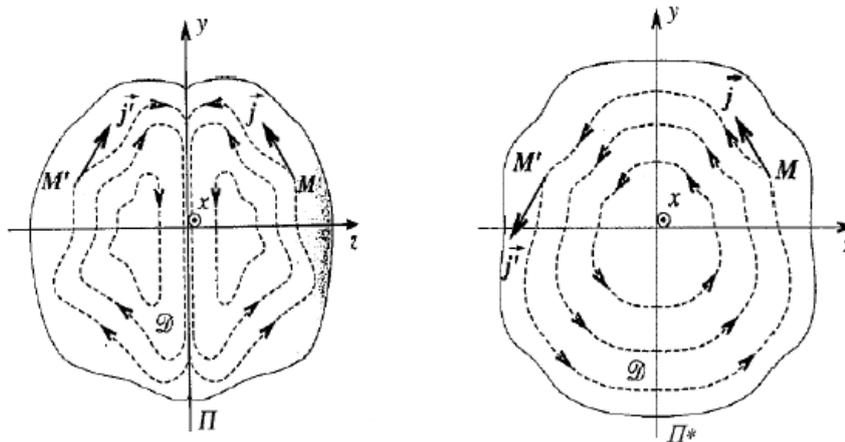


FIGURE 1 – Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de courants.

**1 Symétries d'une distribution cylindrique** *exercice*

▷ Rechercher les symétries (invariances, plans de symétrie et d'antisymétrie) d'une distribution cylindrique infinie d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$  de courants  $(\vec{j} // \vec{u}_z)$ , uniforme dans le cylindre).

▷ On se place dans un repère cylindrique d'axe  $(Oz)$ .  
 $\vec{j}(r)$ , de plans de symétrie  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ , de plans d'antisymétrie  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

**2. Flux du champ magnétique**

**Équation de Maxwell flux** *définition*

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

## 2 Flux du champ magnétique *exercice*

Montrer que le flux du champ magnétique se conserve le long d'un tube de champ

$$\phi_1(\vec{B}) = \iint_{M \in S_1} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{S}_1 = \phi_2(\vec{B}) = \iint_{M \in S_2} \vec{B}(M) \cdot d^2\vec{S}_2$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces (non fermées) qui s'appuient sur le même tube de champ  $\vec{B}$  et qui sont orientées dans le même sens.

Expression intégrale : le flux du champ magnétique à travers une surface fermée  $\Sigma$  est nul

$$\oiint \vec{B} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint \text{div} \vec{B} \cdot d^3\tau = 0$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d^2\vec{\Sigma} = -\phi_1(\vec{B}) + \phi_2(\vec{B})$$

## 3 Zones de fort champ magnétostatique *théorème*

On décompose le flux en trois surfaces, l'une donnant un flux nul car le champ magnétostatique est lui orthogonal, les deux autres se conservant.

Ainsi, le flux du champ magnétostatique se conserve le long d'un tube de champ.

Donc les zones de fort champ magnétostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ magnétostatique sont les plus resserrées.  $\Rightarrow$

Les zones de fort champ magnétostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ magnétostatique sont les plus resserrées.

## 3. Circulation du champ magnétique

### Équation de Maxwell Ampère *définition*

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec la perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## 4 Théorème d'Ampère *théorème*

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \vec{j}_D) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec  $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et  $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{M \in S} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S} = \mu_0 \cdot \left( \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d^2\vec{S} + \iint_{M \in S} \vec{j}_D(M) \cdot d^2\vec{S} \right)$$

$\Rightarrow$

soient un contour fermé orienté  $C$ , et  $S$ , une surface qui s'appuie sur  $C$  et qui est orientée par  $C$ . Alors :

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$

où  $I_{int} = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d^2\vec{S}$  en régime permanent.

### Interprétation de l'expression de Maxwell-Ampère *schéma*

La figure 2 représente le champ  $\vec{B}$  tourne autour des courants (suivant la règle de la main droite).

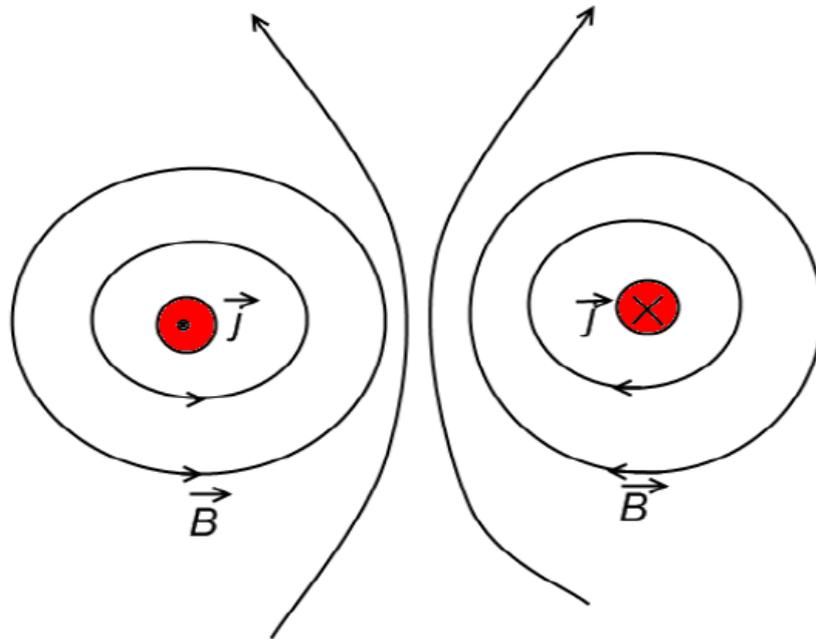


FIGURE 2 – Interprétation de l'expression de Maxwell-Ampère

### Expérience d'Oersted *vidéo*

L'expérience d'Oersted met en évidence la création d'un champ magnétique par le passage d'un courant dans un conducteur.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## II- Détermination de champs magnétiques

### Utilisation des symétries *s'y retrouver*

le principe de Curie énonce que les symétries des causes se retrouvent parmi les symétries des conséquences.

On déduit du principe de Curie que le champ conséquence a (au moins) les symétries de la distribution cause.

Les pseudo vecteurs (comme  $\vec{B}$ ) sont orthogonaux aux plans de symétrie  $\Pi$ , et appartiennent aux plans d'antisymétrie  $\Pi^*$  des causes.

### 5 Effets de symétries d'une distribution cylindrique de courant *exercice*

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$  de courants ( $\vec{j}/\vec{u}_z$ , uniforme dans le cylindre), seule cause du champ magnétique. Déterminer les symétries de  $\vec{B}$  à partir des symétries de  $\vec{j}$ .

On a vu que  $\vec{j}(r)$ , de plans de symétrie  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ , de plans d'antisymétrie  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Aussi  $\vec{B}(r) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ .

### 👁 Visualisation des lignes de champ magnétique *vidéo*

On peut mettre en évidence les lignes de champ magnétique grâce à de la limaille de fer.  
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 👁 Fil rectiligne infini *schéma*

La figure 3 représente un fil rectiligne infini et le champ magnétique généré.

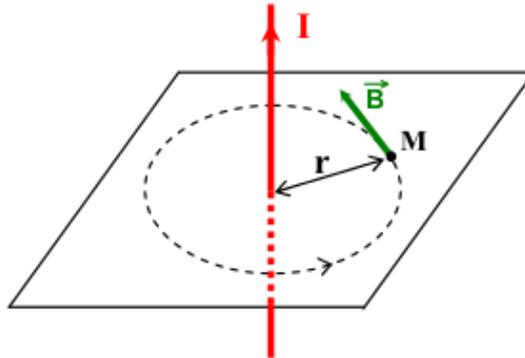


FIGURE 3 – Fil rectiligne infini

### 🔧 6 Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini *exercice*

Un fil rectiligne, infini, cylindrique d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $R$ , est parcouru par un courant (réparti de façon homogène)  $I$ .

▷ Déterminer le champ magnétique créé partout dans l'espace.

La densité volumique de courant est  $\vec{j} = j_z(r) \cdot \vec{u}_z$  telle que :  $\int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{j} \cdot d^2S = I$ , donc :

$$\begin{cases} \vec{j}(r > R) = \vec{0} \\ \vec{j}(r \leq R) = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z \end{cases}$$

Invariances :  $\vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$ . Plans de symétrie de  $\vec{j}$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ , plans d'antisymétrie de  $\vec{j}$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Donc  $\vec{B} = B_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta$ . On applique le théorème d'Ampère à un cercle d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique (donc  $d\vec{l} = r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$  et  $d^2S = dr' \cdot r' \cdot d\theta \cdot \vec{u}_z$ ) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r) \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I_{int} = \mu_0 \cdot \int_{r'=0}^{r'=r} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} j_z(r') \cdot dr' \cdot r' \cdot d\theta$$

avec :

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow I_{int} = \frac{I \cdot r^2}{R^2} \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \\ r \geq R \Rightarrow I_{int} = I \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \end{cases}$$

### 👁 Solénoïde circulaire. *schéma*

La figure 4 représente un solénoïde circulaire et le champ magnétique généré.

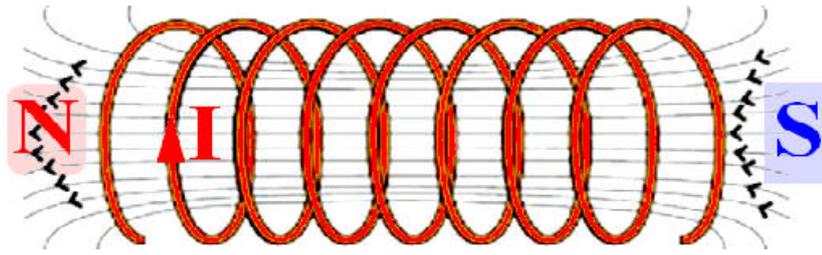


FIGURE 4 – Solénoïde circulaire.

### 7 Champ magnétique créé dans un solénoïde *exercice*

▷ Déterminer le champ magnétique en un point quelconque à l'intérieur d'un solénoïde infini, en admettant que le champ magnétique est nul à l'extérieur.

▷ Pour connaître le champ magnétique partout dans l'espace, on va appliquer le théorème d'Ampère. Pour cela, il faut d'abord étudier les courants. La densité surfacique de courant est  $\vec{j}_s$  telle que :  $\vec{j}_s \cdot dz \cdot \vec{u}_\theta = n \cdot I \cdot dz$ , donc :

$$\begin{cases} \vec{j}_s(r \neq R) = \vec{0} \\ \vec{j}_s(r = R) = n \cdot I \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Invariances :  $\vec{j}_s(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$ . Plans de symétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ; plans d'antisymétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Donc  $\vec{B} = B_z(r) \cdot \vec{u}_z$ . On applique le théorème d'Ampère à un rectangle de côtés  $r$  suivant  $\vec{u}_r$  et  $z$  suivant  $\vec{u}_z$ , qui part dans la direction de  $\vec{u}_z$  sur l'axe  $(Oz)$  :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(0) \cdot z - B_z(r) \cdot z = \mu_0 \cdot I_{int}$$

avec :

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow I_{int} = 0 \Rightarrow B_z(r) = B_z(0) = \mu_0 \cdot n \cdot I \\ r > R \Rightarrow I_{int} = n \cdot I \cdot z \Rightarrow B_z(r) = B_z(0) - \mu_0 \cdot n \cdot I = 0 \end{cases}$$

## III- Dipôles magnétostatiques

### 1. Moment dipolaire magnétique



#### Moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant *définition*

Un contour fermé orienté  $C$ , parcouru par un courant  $I$  (boucle de courant) présente un moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

où  $S$  est une surface qui s'appuie sur  $C$  et qui est orientée par  $C$ .



#### Sources microscopiques du magnétisme : s'y retrouver

un moment cinétique  $\vec{\sigma}$  induit un moment dipolaire

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma}$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique.

## 8 Magnéton de Bohr *exercice*

- ▷ Calculer le rapport gyromagnétique d'un électron tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  à la distance  $r$  du noyau de son atome.
- ▷ En utilisant la constante de Planck réduite ( $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$  J·s), construire par analyse dimensionnelle le magnéton de Bohr  $\mu_B$ , qui joue le rôle de quantum de moment dipolaire magnétique pour l'électron.

▷

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} = \frac{dq}{dt} \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = -e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = \frac{-e \cdot \omega}{2} \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z$$

et le moment cinétique en  $O$ , où se trouve le noyau est :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u}_r \wedge m \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$$

donc :

$$\gamma = \frac{-e}{2 \cdot m}$$

▷  $\hbar$  a les unités d'un moment cinétique ( $\text{J} \cdot \text{s}$ ), donc

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 1,05 \times 10^{-34}}{2 \times 9,11 \times 10^{-31}} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

## 9 Moment magnétique volumique d'un aimant permanent *exercice*

- ▷ Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.
- ▷ En déduire l'ordre de grandeur du moment magnétique d'un aimant permanent usuel.

▷ Le moment magnétique d'un aimant permanent est maximal quand tous les moments dipolaires des électrons le constituant sont alignés dans le même sens. Comme leur densité est  $n \approx 10^{30} \text{ m}^{-3}$  et que chacun a un moment dipolaire  $\mu_B \approx 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , on en déduit que l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent est  $10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

▷ Pour un aimant de dimension  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 10^{-6} \text{ m}^3$ , on trouve  $m \approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

## 2. Dipôle magnétostatique actif



### Champ magnétique créé par un dipôle *à retenir*

Un dipôle magnétostatique positionné au centre  $O$  du repère sphérique, de moment dipolaire  $\vec{m}$  orienté suivant l'axe polaire, crée en  $M$  loin de  $O$  (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ magnétostatique de composantes

$$\begin{cases} B_r(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi(M) = 0 \end{cases}$$



### Champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique *schéma*

La figure 5 représente quelques lignes de champ magnétique créées dans l'approximation dipolaire par un dipôle magnétostatique vues dans un plan  $\varphi = \text{cste}$ .

Les lignes de champ magnétique créées par un dipôle magnétostatique sont orientées dans le sens du moment dipolaire.

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, le champ magnétique créé par un dipôle magnétique est formellement identique au champ électrique créé par un dipôle électrostatique. Attention cependant : ceci ne vaut que dans le cadre de l'approximation dipolaire, c'est à dire "loin" du dipôle.

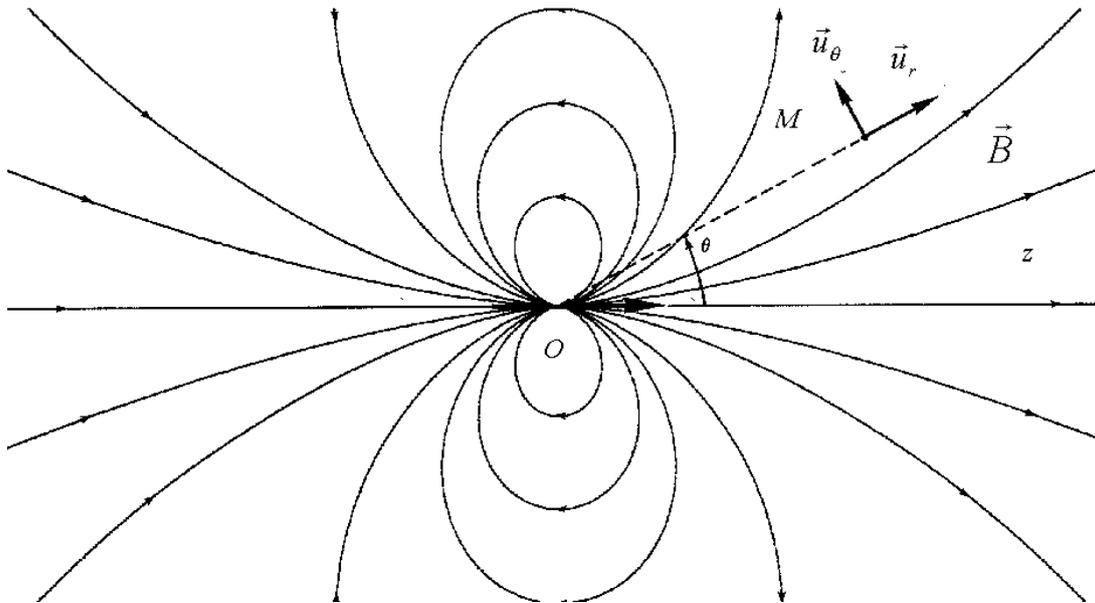


FIGURE 5 – Champ magnétique créé par un dipôle magnétostatique



### 10 Force surfacique d'adhérence entre deux aimants *exercice*

▷ Déterminer un ordre de grandeur de la force surfacique d'adhérence entre deux aimants permanents identiques en contact par analyse dimensionnelle. On cherchera cette force surfacique sous la forme

$$\frac{F}{S} \approx B^\alpha \times \mu_0^\beta$$

où  $B$  est le champ magnétique créé par les aimants à leur surface.

▷ En déduire que cette force surfacique est de l'ordre de la pression atmosphérique.

▷ Les unités sont (en utilisant la force de Laplace  $F = I L B$  et le théorème d'Ampère  $B L = \mu_0 I$ )

$$\begin{cases} [\frac{F}{S}] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \\ [B] = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ [\mu_0] = [B] \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{A}^{-2} \end{cases}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha = -2 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

donc  $\alpha = +2$  et  $\beta = -1$ . Aussi

$$\frac{F}{S} \approx \frac{B^2}{\mu_0}$$

▷ En prenant  $B \approx 1 \text{ T}$  et  $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ , on trouve

$$\frac{F}{S} \approx \frac{B^2}{\mu_0} \approx 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

pas très loin de  $10^5 \text{ Pa}$ .



### Champ magnétique terrestre *schéma*

La figure 6 représente quelques lignes de champ magnétique terrestre.

En première approximation, le champ magnétique terrestre est celui créé par un dipôle magnétique situé au centre de la Terre, orienté vers le pôle sud géographique.

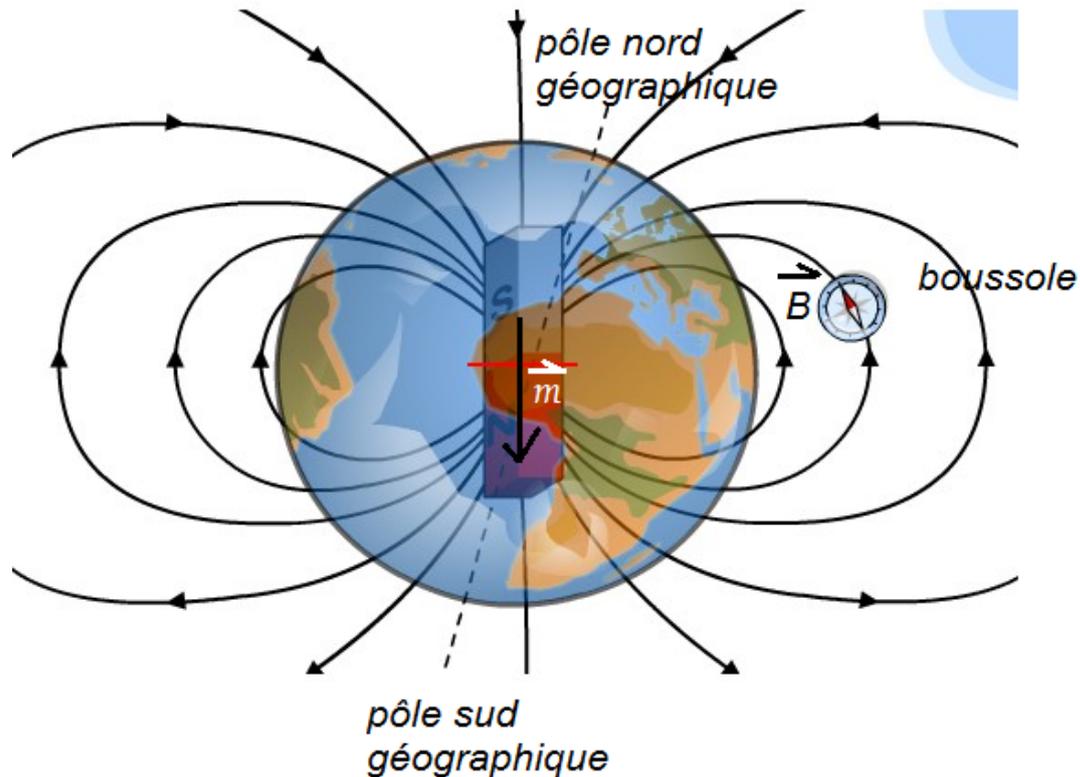


FIGURE 6 – Champ magnétique terrestre

### 3. Dipôle magnétique passif

#### 11 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique *théorème*

On peut prendre une spire de section  $S$  parcourue par un courant  $I$ . L'énergie potentielle des forces de Laplace est  $E_p = -I \cdot \phi = -I \cdot \vec{S} \cdot \vec{B}_{ext}$ .  $\Rightarrow$

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m}$  avec un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  est

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$$

#### ♥ Moment des forces appliquées sur un dipôle magnétostatique *à retenir*

Le moment en un point  $O$  de l'action exercée par un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  sur un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m}$  est

$$\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$$

#### ✳ Effet des interaction magnétiques ressenties par un moment dipolaire magnétique *s'y retrouver*

Le moment tend à aligner parallèlement le dipôle magnétique au champ magnétique.

La position d'équilibre stable correspond à  $\vec{m}$  dans le même sens que  $\vec{B}_{ext}$ .

La résultante tend à déplacer le dipôle magnétostatique vers les régions de champ magnétique intense.



## Actions exercées sur une aiguille aimantée *vidéo*

On peut visualiser les actions exercées sur un dipôle magnétostatique, une aiguille aimantée par exemple. Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



## 1) Modélisation du champ magnétique terrestre *exercice*

1) Fonctionnement d'une boussole.

Le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  se décompose en une composante horizontale  $\vec{B}_h$  et une composante verticale  $\vec{B}_v$  :  $\vec{B}_t = \vec{B}_h + \vec{B}_v$ . A Paris (de latitude  $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  est orienté vers le bas et fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale.

Une aiguille aimantée de moment dipolaire  $\vec{m}$  (repérée par l'aiguille, vers la zone rouge) est posée sur une liaison pivot verticale : elle s'oriente librement dans un plan horizontal.

**1.a)** Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction de  $\vec{m}$  avec  $\vec{B}_t$ . On fera apparaître des angles idoines.

**1.b)** En déduire la direction donnée par la boussole.

2) Inclinaison  $I$  du champ magnétique terrestre.

**2.a)** Proposer un dispositif pour mesurer expérimentalement l'inclinaison  $I$ .

Le pôle Nord magnétique de la Terre est un point errant unique sur la surface où le champ magnétique terrestre pointe vers le bas. En 2015, les coordonnées de ce point ( $86^\circ 27' \text{ N}$ ,  $136^\circ 59' \text{ O}$ ) étaient très proches des coordonnées du pôle nord géographique.

**2.b)** Dans les coordonnées sphériques de centre, le centre de la Terre, d'axe polaire (orienté du pôle géographique sud vers le pôle géographique nord), quelle est l'expression du champ magnétique terrestre au pôle nord magnétique?

3) Norme du champ magnétique terrestre.

On place, à Paris, une boussole au centre d'un solénoïde quasi infini formé de  $n = 716$  spires par mètres, parcourues par le courant  $I$ , d'axe parallèle à la direction Est-Ouest ( $Oy$ ).

**3.a)** Calculer le champ magnétique  $\vec{B}_H$  créé par le solénoïde.

**3.b)** Pour  $I = 22 \text{ mA}$ , l'angle que fait la boussole avec ( $Ox$ ) est  $\alpha = 45^\circ$ . En déduire  $B_h$ .

**3.c)** En déduire  $B_t$ .

4) Lignes de champ magnétique terrestre.

On assimile le champ magnétique terrestre à celui créé par un dipôle permanent de moment  $\vec{m}_t$  positionné au centre de la Terre.

**4.a)** Tracer l'allure des lignes de champ d'un dipôle de moment  $\vec{m}_t$ .

**4.b)** En utilisant les résultats précédents, positionner la Terre, Paris et le pôle nord géographique sur ces lignes de champ. Conclure.

### Correction :

1) Fonctionnement d'une boussole.

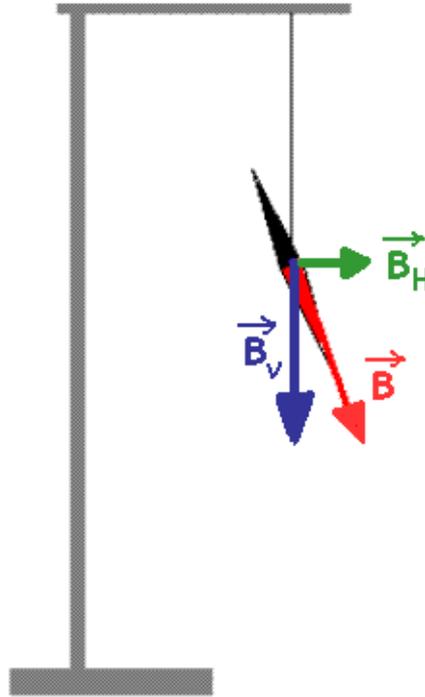
**1.a)** Énergie potentielle d'interaction de  $\vec{m}$  avec  $\vec{B}_t$  :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_t = -\vec{m} \cdot \vec{B}_v - \vec{m} \cdot \vec{B}_h = -m B_v \cos(I) - m B_h \cos \beta$$

**1.b)** Le minimum de  $E_p$  est donné par  $\beta = 0$  :  $\vec{m}$  est dans la même direction et le même sens que  $\vec{B}_h$  (la boussole donne la direction du champ magnétique terrestre horizontal).

2) Inclinaison  $I$  du champ magnétique terrestre.

**2.a)** La boussole d'inclinaison (anglais : « dip circle ») est un instrument utilisé pour mesurer l'angle entre l'horizontale et le champ magnétique terrestre : il s'agit d'une aiguille aimantée libre de s'orienter dans l'espace, avec un rapporteur.



2.b) L'expression du champ magnétique terrestre au pôle nord magnétique est du type  $\vec{B}_t = -B_t \vec{u}_r$ .

3) Norme du champ magnétique terrestre.

3.a) Le champ magnétique créé par le solénoïde est  $\vec{B}_H = \mu_0 n I$  (cf. cours).

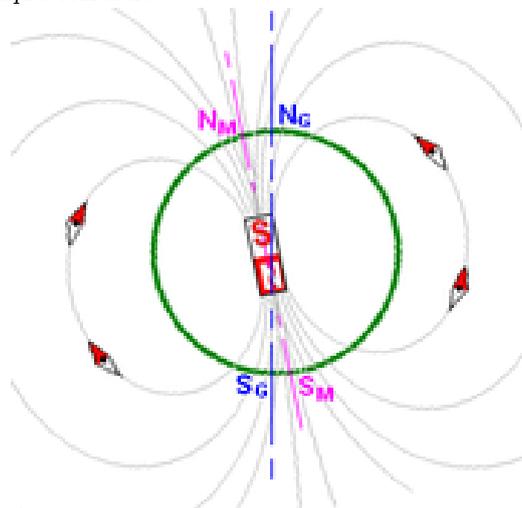
3.b)

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow B_h = B_H = 4\pi \times 10^{-7} \times 716 \times 22 \times 10^{-3} = 19,8 \times 10^{-6} \text{ T}$$

3.c)

$$B_h = B_t \cos I \Rightarrow B_t = 46,8 \times 10^{-6} \text{ T}$$

4) Lignes de champ magnétique terrestre.



Conclusion : le dipôle magnétique terrestre est "à l'envers" **Eléments de correction :**

$$B_t = 46,8 \times 10^{-6} \text{ T.}$$

# Les techniques mathématiques à connaître

## Intégrer un rotationnel

**Position du problème :**

Il s'agit de déterminer le champ  $\vec{A}$  connaissant son rotationnel  $\vec{rot}\vec{A}$ . Autrement dit, il faut intégrer des équations différentielles portant sur les trois composantes  $A_1, A_2, A_3$  de  $\vec{A}$ , elles-même fonction *a priori* de trois variables  $s_1, s_2, s_3$ .

**Symétries :**

Pour simplifier le problème, il faut avant tout utiliser les symétries :

- invariances : si  $\vec{rot}\vec{A}$  ne dépend pas d'une des trois variables  $s_1, s_2, s_3$ , alors  $\vec{A}$  n'en dépendra pas non plus.
- les plans d'antisymétrie pour  $\vec{rot}\vec{A}$  sont des plans de symétrie pour  $\vec{A}$ . Le champ  $\vec{A}$  appartient aux plans d'antisymétrie de  $\vec{rot}\vec{A}$ .
- les plans de symétrie pour  $\vec{rot}\vec{A}$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{A}$ . Aussi, le champ  $\vec{A}$  est orthogonal aux plans de symétrie de  $\vec{rot}\vec{A}$ .

■ *Exemple :*

Si  $\vec{rot}\vec{A} // \vec{u}_z$  en cylindrique et fonction de  $r$  uniquement, alors :

- $\vec{A}$  ne dépend que de  $r$  ;
- les plans de symétrie pour  $\vec{rot}\vec{A}$  sont les plans orthogonaux à  $Oz$  : ce sont les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Donc  $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta$  ;
- les plans d'antisymétrie pour  $\vec{rot}\vec{A}$  sont les plans contenant  $Oz$  : ce sont les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Donc  $\vec{A} = A_\theta \vec{u}_\theta$ .

Conclusion :  $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$ .

**Utilisation de la formule de Stokes :**

On peut utiliser la formule de Stokes : 
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{rot}(\vec{A}) \cdot d^2\vec{S}.$$

Pour ce faire, il faut définir un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté qui vérifie les symétries. La surface  $S$  est délimitée par  $\mathcal{C}$  (autant choisir la plus simple!).

■ *Exemple :*

Si  $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$ , alors :

- $\mathcal{C}$  est un cercle de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$  ;
- $S$  peut être (c'est le plus simple) le disque de rayon  $r$ , d'axe  $Oz$ .

**Utilisation de l'expression du rotationnel dans le repère adapté :**

dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

Coordonnées	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
cartésiennes	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$	$x$	$y$	$z$	1	1	1
cylindriques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_z$	$r$	$\theta$	$z$	1	$r$	1
sphériques	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$	$r$	$\theta$	$\varphi$	1	$r$	$r \sin \theta$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \mu_3} \left[ \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \mu_1} \left[ \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 A_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left[ \frac{\partial(\mu_2 A_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 A_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix}$$

■ *Exemple :*

Si  $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$  en cylindrique, alors :

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(A_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial(A_z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \end{pmatrix}$$

Il reste donc à intégrer  $\frac{1}{r} \frac{d(r A_\theta)}{dr} = \left( \vec{rot}(\vec{A}) \right) \cdot \vec{u}_z$ .

---

# Technique à maîtriser

jeudi 25 janvier 2018

---

## I- Les capacités exigibles

### 1. Propriétés du champ magnétostatique



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens.

Associer l'évolution de la norme de  $\vec{B}$  à l'évasement des tubes de champ.

### 2. Calculs de champs magnétostatiques



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.

Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère.

Utiliser une méthode de superposition.

Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini. Calculer et connaître le champ créé par un fil rectiligne infini. Utiliser ces modèles près d'un circuit filiforme réel.

Calculer et connaître le champ à l'intérieur d'un solénoïde long sans effets de bords, la nullité du champ extérieur étant admise.

Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde.

Associer cette énergie à une densité d'énergie volumique.

### 3. Dipôles magnétostatiques



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Utiliser un modèle planétaire pour relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique.

Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Interpréter sans calculs les sources microscopiques du champ magnétique.

Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.

Obtenir l'expression de la force surfacique d'adhérence par analyse dimensionnelle.

Utiliser des expressions fournies des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.

Approche documentaire de l'expérience de Stern et Gerlach : expliquer sans calculs les résultats attendus dans le cadre de la mécanique classique ; expliquer les enjeux de l'expérience.

## II- Méthodes

### 1. Propriétés du champ magnétostatique

### A) Quelles sont les propriétés des lignes de champ magnétostatique ? *méthode*

- | Les lignes de champ magnétique sont fermées.
- | Elles tournent autour des courants.

### B) Quelles sont les propriétés de symétrie du champ magnétostatique ? *méthode*

- | Les plans d'antisymétrie pour  $\vec{j}$  sont des plans de symétrie pour  $\vec{B}$ .
- | Les plans de symétrie pour  $\vec{j}$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .
- | Le champ  $\vec{B}$  est orthogonal aux plans de symétrie et appartient aux plans d'antisymétrie de  $\vec{j}$ .

## 2. Calculs de champs magnétostatiques

### C) Détermination de champs magnétostatiques *méthode*

- | Il faut utiliser les symétries (s'il y en a assez) puis le théorème d'Ampère en choisissant un contour fermé orienté.

## 3. Dipôles magnétostatiques

### D) Utiliser les dipôles magnétostatiques *méthode*

- | Moment dipolaire magnétique  $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ .
- | Un tel dipôle ressent le moment  $\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$  et a l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$ .
- | La résultante tend à déplacer le dipôle magnétostatique vers les régions de champ magnétostatique intense et le moment tend à aligner parallèlement le dipôle magnétostatique au champ magnétostatique.

## III- Exercices

### 1. Propriétés du champ magnétostatique

#### 1.1) Un champ magnétique radial

- 1) Un champ radial ( $C_r \vec{e}_r$ ) peut-il être un champ magnétique  $\vec{B}$  :
  - 1.a) en cylindrique ?
  - 1.b) en sphérique ?

- | Un champ magnétique ne peut être radial.

#### 1.2) Propriétés des lignes de champ magnétostatique

Les lignes de champ magnétiques sont-elles ouvertes ou fermées ?

- | Les lignes de champ magnétique sont fermées : elles entourent les lignes de courant.

#### 1.3) Symétries d'une spire circulaire

Soit une spire circulaire de centre  $O$ , d'axe  $(Oz)$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de courants :
  - 1.a) invariances ;
  - 1.b) plans de symétrie ;
  - 1.c) plans d'antisymétrie.

▮  $\vec{j}(r, z)$  plans d'antisymétrie : plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$ .

#### 1.4) Symétries d'un ensemble de deux fils parallèles

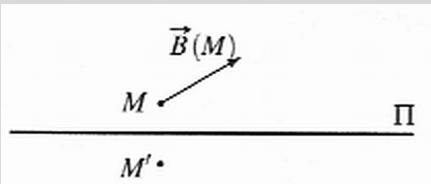
Soit deux fils infinis, sans épaisseur, parallèles à l'axe  $(Oz)$ , passant respectivement par les points  $O_1 = (0, -a, 0)$  (dans un repère cartésien de centre  $O$ ) et  $O_2 = (0, +a, 0)$  dans lesquels circulent respectivement des courants  $I_1$  et  $I_2$ , orientés conventionnellement vers les  $z$  croissants.

Définir les symétries et invariances de cette distribution dans les trois cas suivants :

- 1)  $I_1$  et  $I_2$  quelconques ;
- 2)  $I_1 = I_2 = I$  ;
- 3)  $I_1 = +I$  et  $I_2 = -I$ .

▮  $I_1 = I_2 = I \Rightarrow \vec{j}(x, y)$ , plans d'antisymétrie : plans  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y) \forall M$ .

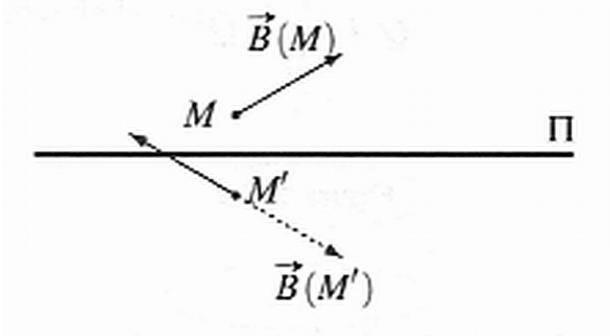
#### 1.5) Plan de symétrie d'une distribution de courant



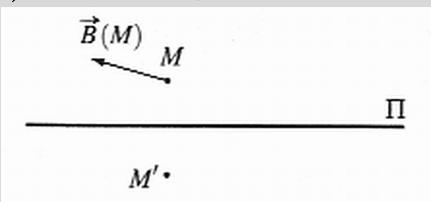
Le plan  $\Pi$  est un plan de symétrie d'une distribution de courant. Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi$ .

- 1) Compléter le schéma en dessinant le champ magnétique au point  $M'$ .

▮ Les plans de symétrie pour  $\vec{j}$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .



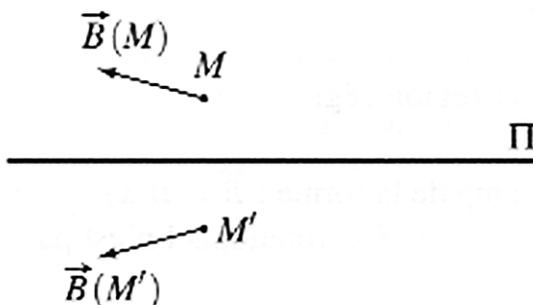
#### 1.6) Plan d'antisymétrie d'une distribution de courant



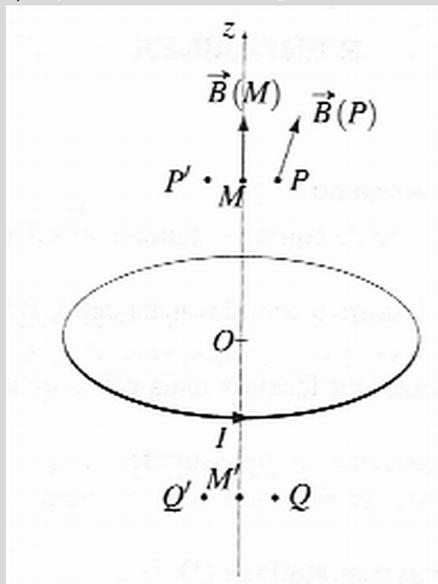
Le plan  $\Pi$  est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant. Le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $\Pi$ .

- 1) Compléter le schéma en dessinant le champ magnétique au point  $M'$ .

▮ Les plans d'antisymétrie pour  $\vec{j}$  sont des plans de symétrie pour  $\vec{B}$ .



1.7) Symétries d'une spire de courant



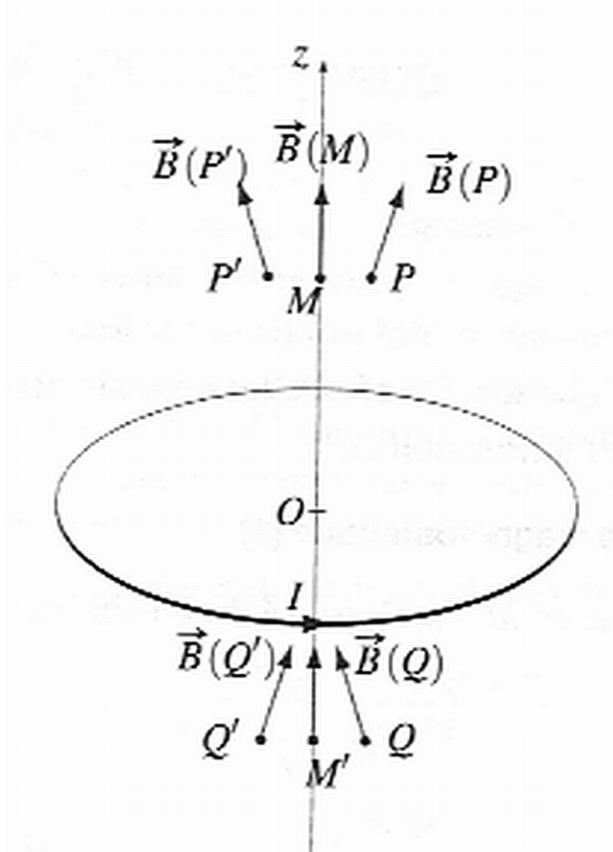
On considère une spire circulaire d'axe  $Oz$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On donne le champ magnétique en  $M$  et en  $P$ .

1) Représenter le champ magnétique

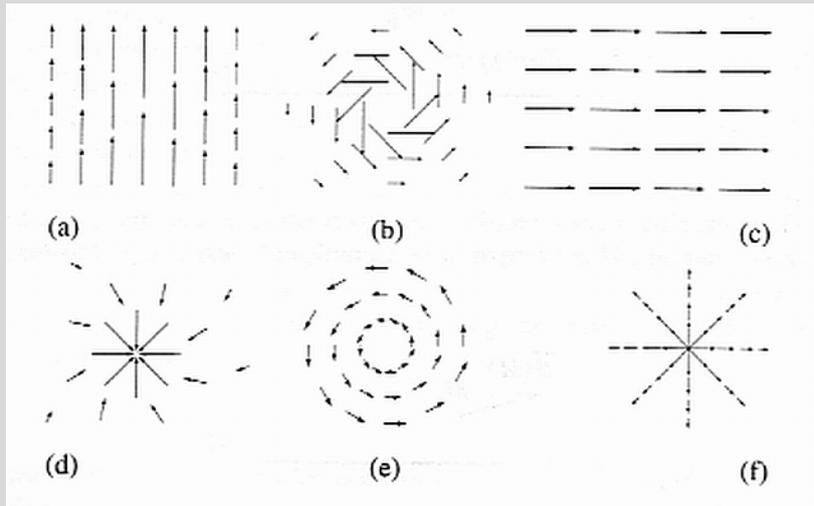
- en  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport au plan de la spire,
- en  $P'$  symétrique de  $P$  par rapport à l'axe,
- en  $Q$  symétrique de  $P$  par rapport au plan de la spire
- et en  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à l'axe.

Les plans d'antisymétrie pour  $\vec{j}$  (comme les plans qui contiennent l'axe de la spire) sont des plans de symétrie pour  $\vec{B}$ .

Les plans de symétrie pour  $\vec{j}$  (comme le plan qui contient la spire) sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .



1.8) Sont-ce des lignes de champ magnétostatique ?



On considère les lignes de champ magnétique des différentes configurations à gauche. On supposera la figure invariante par translation perpendiculaire au plan du dessin.

1) Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique, et si oui, si des courants sont présents dans la région représentée.

- Le cas (a) correspond à un champ de la forme :  $\vec{B} = B_y(x) \vec{u}_y$ . Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel n'est pas nul, il y a donc des courants dans la région représentée.
- Le cas (b) correspond à un champ de la forme :  $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$  où  $B_\theta(r)$  décroît quand  $r$  augmente. Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. La circulation du champ le long d'un cercle n'est pas nulle, il y a donc des courants dans la région représentée. C'est par exemple le champ créé par un fil infini.
- Le cas (c) correspond à un champ uniforme. Un champ uniforme est bien de divergence nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel est nul aussi, il n'y a donc pas de courant dans la région représentée.
- Dans le cas (d) le flux à travers un cylindre dont le centre est celui des lignes de champ, d'axe perpendiculaire à la figure n'est pas nul. Donc la divergence du champ n'est pas nulle, il peut donc pas être de nature magnétostatique.
- Le cas (e) correspond à un champ de la forme :  $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$  où  $B_\theta(r)$  croît quand  $r$  augmente. Sa divergence est nulle, il peut donc être de nature magnétostatique. Son rotationnel n'est pas nul, il y a donc des courants dans la région représentée, répartis dans tout le volume.
- Dans le cas (f) le flux à travers un cylindre dont le centre est celui des lignes de champ, d'axe perpendiculaire à la figure n'est pas nul. Donc la divergence du champ n'est pas nulle, il peut donc pas être de nature magnétostatique.

### 1.9) Détermination d'un champ magnétostatique en symétrie cylindrique

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe ( $Oz$ ) de courants ( $\vec{j}/\vec{u}_z$ , uniforme dans le cylindre de rayon  $R$ ).

1) En déduire les symétries (en statique) de  $\vec{B}$ .

1) On se place dans un repère cylindrique d'axe ( $Oz$ ).  $\vec{j}(r)$ , de plans de symétrie ( $\vec{u}_r, \vec{u}_z$ ), de plans d'antisymétrie ( $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ).  $\vec{B} = B_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta$ .

## 2. Calculs de champs magnétostatiques

### 2.10) Champ magnétique créé par un solénoïde de dimension finie

Soit un solénoïde circulaire, de rayon  $R$ , de longueur  $L$  suivant son axe  $Oz$ , parcouru par un courant  $I$ . Le nombre de spire le constituant par unité de longueur est  $n$ .

On admet que le champ magnétique qui règne en un point  $M$  de l'axe peut se mettre sous la forme :  $B(M) = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{2} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$  où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les angles sous lesquels le point  $M$  "voit" les extrémités du solénoïde.

1) On considère maintenant que ce solénoïde est infini. Déterminer le champ magnétique en un point quelconque de l'espace.

1) Solénoïde infini : d'après ce qui précède, un passage à la limite ( $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ), donne le champ magnétique en un point  $M$  de l'axe :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{u}_z$$

Pour connaître le champ magnétique partout dans l'espace, on va appliquer le théorème d'Ampère. Pour cela, il faut d'abord étudier les courants. La densité surfacique de courant est  $\vec{j}_s$  telle que :  $\vec{j}_s \cdot dz \cdot \vec{u}_\theta = n \cdot I \cdot dz$ , donc :

$$\begin{cases} \vec{j}_s(r \neq R) = \vec{0} \\ \vec{j}_s(r = R) = n \cdot I \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Invariances :  $\vec{j}_s(r) \Rightarrow \vec{B}(r)$ . Plans de symétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  ; plans d'antisymétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ . Donc  $\vec{B} = B_z(r) \cdot \vec{u}_z$ . On applique le théorème d'Ampère à un rectangle de côtés  $r$  suivant  $\vec{u}_r$  et  $z$  suivant  $\vec{u}_z$ , qui part dans la direction de  $\vec{u}_z$  sur l'axe ( $Oz$ ) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(0) \cdot z - B_z(r) \cdot z = \mu_0 \cdot I_{int}$$

avec :

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow I_{int} = 0 \Rightarrow B_z(r) = B_z(0) = \mu_0 \cdot n \cdot I \\ r > R \Rightarrow I_{int} = n \cdot I \cdot z \Rightarrow B_z(r) = B_z(0) - \mu_0 \cdot n \cdot I = 0 \end{cases}$$

### 2.11) Champ magnétique créé par un tore

On considère enfin un tore à section circulaire (de rayon  $a$ ), d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$ , sur lequel sont enroulées  $N$  spires jointives parcourues par un courant  $I$ .

1) Déterminer le champ magnétique qui règne en un point  $M$  quelconque de l'espace.

1) La densité surfacique de courant est  $\vec{j}_s(r, z) \Rightarrow \vec{B}(r, z)$ . Plans de symétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$  ; plan d'antisymétrie de  $\vec{j}_s$  :  $(O, x, y)$ . Donc  $\vec{B} = B_\theta(r, z) \cdot \vec{u}_\theta$ . On applique le théorème d'Ampère à un cercle d'axe ( $Oz$ ), de rayon  $r$ , d'élévation  $z$ , orienté dans le sens trigonométrique (donc  $d\vec{l} = r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$ ) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r, z) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot I_{int}$$

avec :

- soit un cercle dans le tore :  $\Rightarrow I_{int} = N \cdot I \Rightarrow$

$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \vec{u}_\theta$$

- soit un cercle hors du tore :  $\Rightarrow I_{int} = 0 \Rightarrow$

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

### 2.12) Champ magnétique créé dans un cylindre creux conducteur

On se place dans un repère cylindrique d'axe ( $Oz$ ).

On considère d'abord un cylindre conducteur de rayon  $R_0$ , d'axe  $Oz$  et supposé infini, parcouru par un courant volumique uniforme :  $\vec{j} = J \cdot \vec{e}_z$ .

1) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_0$  à l'intérieur de ce cylindre.

On considère maintenant un cylindre conducteur de rayon  $R_1$ , d'axe  $Oz$  et supposé infini, dans lequel on a creusé une cavité cylindrique d'axe parallèle à ( $Oz$ ), de rayon  $R_2 < R_1$ . Le cylindre creux est parcouru par un courant volumique uniforme :  $\vec{j} = J \cdot \vec{e}_z$ .

2) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans la cavité.

$$1) \vec{B}_0(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta.$$

2) En appliquant le théorème de superposition :  $\vec{B}(r, \theta, z) = +\frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta - \frac{\mu_0 \cdot J \cdot r}{2} \vec{u}_\theta = \vec{0}$  : le champ magnétique est nul dans la cavité.

### 2.13) Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

On se place dans un repère cartésien  $(Oxyz)$ ,  $(Oz)$  étant vertical.

Une boussole (assimilée à une aiguille aimantée mobile sans frottements autour de  $(Oz)$ ) est placée en  $O$  et s'oriente parallèlement à la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t = B_t \cdot \vec{u}_x$  (on cherche à déterminer  $B_t$ ).

On place cette boussole au centre de bobines de Helmholtz assimilées à deux spires circulaires parcourues par le même courant  $I$ , d'axe parallèle à la direction Est-Ouest  $(Oy)$ , de rayon  $R = 10\text{cm}$ , disposées dans les plans  $y = +\frac{R}{2}$  et  $y = -\frac{R}{2}$ . Le champ magnétique  $B_H$  créé par les bobines de Helmholtz en  $O$  est  $\vec{B}_H = \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot I}{5 \cdot R \sqrt{5}} \vec{u}_y$ .

1) Déterminer l'angle  $\alpha$  que fait la boussole avec  $(Ox)$ , en fonction de  $I$ .

Pour  $I = 2,2\text{A}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . On donne  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

2) En déduire  $B_t$ .

$$1) \alpha = \arctan\left(\frac{8 \cdot \mu_0 \cdot I}{5 \cdot R \sqrt{5} \cdot B_t}\right).$$

$$2) \text{ Pour } \alpha = 45^\circ, B_t = \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot I}{5 \cdot R \sqrt{5}} = 20 \mu\text{T}.$$

## 3. Dipôles magnétostatiques

### 3.14) Définition du moment dipolaire pour une distribution quelconque de courant

$D$ , une distribution de courants  $\vec{j}$ , présente un moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau$$

où  $O$  est un point fixe quelconque

1) Montrer que la définition du moment dipolaire magnétique d'une distribution de courants quelconque ne dépend pas du choix du point  $O$ .

2) Montrer que cette définition est cohérente avec celle donnée pour une boucle de courant.

1)

$$\frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau = \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau$$

$$\frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau = \frac{\overrightarrow{O'O}}{2} \wedge \iiint_{P \in D} \vec{j}(P) \cdot d^3\tau + \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau$$

avec  $\iiint_{P \in D} \vec{j}(P) \cdot d^3\tau = \vec{0}$  donc  $\vec{m}$  ne dépend pas de  $O$ .

2) En transformant  $\vec{j}(P) \cdot d^3\tau$  en  $I \cdot d\vec{\ell}$  et la triple intégrale en une intégrale simple sur un contour fermé,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{\ell} = I \cdot \iint_S d^2\vec{S}$$

à cause de l'aire d'un parallélogramme.

### 3.15) Rapport gyromagnétique de l'électron tournant autour du noyau

1) Calculer le rapport gyromagnétique d'un électron tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  à la distance  $r$  du noyau de son atome.

1)

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} = \frac{dq}{dt} \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = -e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z = \frac{-e \cdot \omega}{2} \cdot r^2 \cdot \vec{u}_z$$

et le moment cinétique en  $O$ , où se trouve le noyau est :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u}_r \wedge m \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \vec{u}_z$$

donc :

$$\gamma = \frac{-e}{2 \cdot m}$$

### 3.16) Analyse dimensionnelle du magnéton de Bohr

1) Déterminer un ordre de grandeur du magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. On cherchera cette grandeur sous la forme

$$\mu_B \approx e^\alpha \times m^\beta \times \hbar^\gamma$$

où  $e$  est la charge et  $m$  la masse de l'électron.

1) (en utilisant la force de Laplace  $F = I L B$  et le théorème d'Ampère  $B L = \mu_0 I$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} [e] = \text{C} \\ [m] = \text{kg} \\ [\hbar] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ [\mu_B] = \text{A} \cdot \text{m}^2 = \text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^2 \end{array} \right.$$

D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 2 \\ -2\gamma = -2 \end{array} \right.$$

donc  $\gamma = 1$ ,  $\beta = -1$  et  $\alpha = +1$ . Aussi

$$\mu_B \approx \frac{e \hbar}{m}$$

### 3.17) Définition du moment dipolaire pour une distribution quelconque de courant

$D$ , une distribution de courants  $\vec{j}$ , présente un moment dipolaire magnétique

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau$$

où  $O$  est un point fixe quelconque

1) Montrer que la définition du moment dipolaire magnétique d'une distribution de courants quelconque ne dépend pas du choix du point  $O$ .

2) Montrer que cette définition est cohérente avec celle donnée pour une boucle de courant.

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau &= \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau \\ \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{O'P} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau &= \frac{\overrightarrow{O'O}}{2} \wedge \iiint_{P \in D} \vec{j}(P) \cdot d^3\tau + \frac{1}{2} \iiint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \cdot d^3\tau \end{aligned}$$

avec  $\iiint_{P \in D} \vec{j}(P) \cdot d^3\tau = \vec{0}$  donc  $\vec{m}$  ne dépend pas de  $O$ .

2) En transformant  $\vec{j}(P) \cdot d^3\tau$  en  $I \cdot d\vec{\ell}$  et la triple intégrale en une intégrale simple sur un contour fermé,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{P \in D} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{\ell} = I \cdot \iint_S d^2\vec{S}$$

à cause de l'aire d'un parallélogramme.

### 3.18) Moment des forces de Laplace et moment des forces appliquées sur un dipôle magnétostatique

On s'intéresse à une spire de section  $S$  parcourue par un courant  $I$  plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_{ext}$ .

- 1) Montrer que le moment des forces de Laplace que subit la spire est

$$\vec{M}_O = I \oint_{P \in C} (\vec{OP} \cdot \vec{B}_{ext}) \cdot d\vec{\ell}(P)$$

- 2) En utilisant la formule de Kelvin, en déduire que le moment en un point  $O$  de l'action exercée par un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  sur un dipôle magnétostatique de moment dipolaire  $\vec{m}$  est

$$\vec{M}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$$

- 1) Le moment des forces de Laplace est

$$\vec{M}_O = \oint_{P \in C} \vec{OP} \wedge (I \cdot d\vec{\ell}(P) \wedge \vec{B}(P))$$

Or  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$ , donc :

$$\vec{M}_O = I \oint_{P \in C} (\vec{OP} \cdot \vec{B}_{ext}) \cdot d\vec{\ell}(P) - I \cdot \oint_{P \in C} (\vec{OP} \cdot d\vec{\ell}(P)) \vec{B}_{ext}$$

La seconde intégrale est nulle, donc :

$$\vec{M}_O = I \oint_{P \in C} (\vec{OP} \cdot \vec{B}_{ext}) \cdot d\vec{\ell}(P)$$

- 2) La formule de Kelvin donne :

$$\vec{M}_O = -I \iint \overrightarrow{\text{grad}}_P (\vec{OP} \cdot \vec{B}_{ext}) \wedge d^2\vec{S}$$

Or  $\overrightarrow{\text{grad}}_P (\vec{OP} \cdot \vec{B}_{ext}) = \overrightarrow{\text{grad}}_P (x \cdot B_{ext_x} + y \cdot B_{ext_y} + z \cdot B_{ext_z}) = \vec{B}_{ext}$ . Ainsi,

$$\vec{M}_O = -I \iint \vec{B}_{ext} \wedge d^2\vec{S} = I \cdot \vec{S} \wedge \vec{B}_{ext}$$

### 3.19) Interaction de deux dipôles magnétiques à distance constante

On étudie deux dipôles magnétiques de moments dipolaires respectifs  $\vec{m}_1$  et  $\vec{m}_2$ . Le premier est fixe en  $O$ , centre d'un repère sphérique d'axe polaire  $(O, \vec{u}_z)$ , parallèle à son moment dipolaire :  $\vec{m}_1 = m_1 \cdot \vec{u}_z$ .

Le second dipole est placé en  $r = cste$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi = 0$ . On repère son moment dipolaire par l'angle  $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{m}_2)$ , qui peut varier.

- 1) Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\alpha)$  d'interaction du second dipole avec le champ magnétique créé par le premier dipole.

- 2) Que doit vérifier  $\tan(\theta - \alpha)$  à l'équilibre stable ?

- 3) Application : que vaut  $\alpha$  si

- 3.a)  $\theta = 0$  ;  
 3.b)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ;  
 3.c)  $\theta = \pi$ .

1)  $E_p(\alpha) = \frac{-\mu_0 \cdot m_1 \cdot m_2}{4 \cdot \pi \cdot r^3} [2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta - \alpha)]$ .

2)  $2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) = 0$  donc  $\tan(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} \tan(\theta)$  à l'équilibre stable.

- 3) Application :

- 3.a)**  $\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ;
- 3.b)**  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$ ;
- 3.c)**  $\theta = \pi \Rightarrow \alpha = 0$ .

### 3.20) Modèle classique du spin de l'électron

#### 1) Modélisation de l'électron :

Une modélisation simpliste du "spin" de l'électron est donnée par une sphère, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge volumique  $\rho$  homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire uniforme  $\omega$ .

**1.a)** Exprimer le courant  $dI$  créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance  $r$  (à  $dr$  près) à  $O$  et par l'angle  $\theta$  (à  $d\theta$  près) par rapport à ( $Oz$ ).

**1.b)** Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire  $d\vec{m}$  associé à cette spire, en fonction de  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $\theta$ ?

**1.c)** En déduire le moment dipolaire magnétique total  $\vec{m}$  de l'électron en fonction de  $e$  (la charge de l'électron),  $R$  et  $\omega$ .

#### 2) Discussion de la modélisation :

On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr

$$m = \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

et que le rayon de la sphère doit être  $R = 2,8fm$ .

**2.a)** Que vaut la vitesse angulaire  $\omega$ ?

**2.b)** En déduire la vitesse maximale  $v_{max}$  d'un point de la sphère.

**2.c)** Que faut-il conclure d'un tel résultat?

#### 1) Modélisation de l'électron :

**1.a)**  $dI = \rho \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta$ .

**1.b)**  $d\vec{m} = \pi \cdot \rho \cdot \omega \cdot r^4 \cdot \sin^3(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{u}_z$ .

**1.c)**  $\vec{m} = \frac{-1}{5} e \cdot \omega \cdot R^2 \cdot \vec{u}_z$ .

#### 2) Discussion de la modélisation :

**2.a)**  $\omega = \frac{5 \cdot \mu_B}{e \cdot R^2} = 3,7 \cdot 10^{25} \text{ rad.s}^{-1}$ .

**2.b)**  $v_{max} = \omega \cdot R = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ m.s}^{-1}$ .

**2.c)**  $v_{max} > c$  : la modélisation est donc inacceptable!

### 3.21) Moment dipolaire magnétique terrestre

La Terre de centre  $O$  et de rayon  $R_T$ , d'axe polaire ( $O, \vec{u}_z$ ) orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipole magnétique de moment dipolaire :  $\vec{m} = m \cdot \vec{u}_z$ .

On repère un point  $M$  du globe terrestre par  $r = R_T = 6371 \text{ km}$ ,  $\theta$  fixé, et  $\varphi$  quelconque. On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé en  $M$  par le dipôle :

$$\begin{cases} B_r(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot m \cdot \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m \cdot \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi(M) = 0 \end{cases}$$

**1)** Exprimer la latitude  $\lambda$  comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de  $\theta$ .

A Paris ( $\lambda = 49^\circ$ ), le champ magnétique terrestre  $\vec{B}_t$  est vers le sol : il fait un angle  $I = -65^\circ$  avec l'horizontale et sa composante horizontale est  $B_h = 20 \mu T$ .

#### 2) Exprimer :

**2.a)** la composante verticale  $B_v$  du champ magnétique terrestre;

**2.b)** la norme  $B_t$  du champ magnétique terrestre.

**3)** Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre  $m$ .

**1)**  $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$ .

#### 2) Champ magnétique terrestre :

**2.a)** composante verticale  $B_v = B_h \cdot \tan I = 43 \mu T$ ;

**2.b)** norme  $B_t = \frac{B_h}{\cos I} = 47 \mu T$ .

$$3) m = \frac{4 \cdot \pi \cdot R_T^3}{\mu_0 \cdot \sin\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right)} = 78 \cdot 10^{21} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

#### 4. Techniques mathématiques - Intégrer un rotationnel

##### 4.22) Calcul d'un champ de rotationnel donné (1)

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{a}{r} \vec{u}_z$$

où  $a$  est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{\text{d}}^2 \vec{S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{\text{d}} \vec{\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon  $r$  vaut :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{\text{d}}^2 \vec{S} = \iint \frac{a}{r} \vec{u}_z \cdot \vec{\text{d}}^2 \vec{S} = \iint \frac{a}{r} r \, dr \, d\theta = a r 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\text{d}} \vec{\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = a r 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = a$$

Donc  $\vec{B} = a \vec{u}_\theta$ .

##### 4.23) Calcul d'un champ de rotationnel donné (2)

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = a \vec{u}_z$$

où  $a$  est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{\text{d}}^2 \vec{S} = \oint \vec{B} \cdot \vec{\text{d}} \vec{\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon  $r$  vaut :

$$\iint \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot \vec{\text{d}}^2 \vec{S} = \iint a \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r \, dr \, d\theta = \frac{a r^2}{2} 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\text{d}} \vec{\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^2}{2} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r}{2}$$

Donc  $\vec{B} = \frac{a r}{2} \vec{u}_\theta$ .

**4.24) Calcul d'un champ de rotationnel donné (3)**

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = a r \vec{u}_z$$

où  $a$  est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon  $r$  vaut :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint a r \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r^2 \, dr \, d\theta = \frac{a r^3}{3} 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^3}{3} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r^2}{3}$$

Donc  $\vec{B} = \frac{a r^2}{3} \vec{u}_\theta$ .

**4.25) Calcul d'un champ de rotationnel donné (4)**

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = a r^2 \vec{u}_z$$

où  $a$  est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon  $r$  vaut :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint a r^2 \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \vec{u}_z = \iint a r^3 \, dr \, d\theta = \frac{a r^4}{4} 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B_\theta(r) 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) 2\pi r = \frac{a r^4}{4} 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a r^3}{4}$$

Donc  $\vec{B} = \frac{a r^3}{4} \vec{u}_\theta$ .

**4.26) Calcul d'un champ de rotationnel donné (5)**

1) Déterminer le champ  $\vec{B}$  tel que, dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ ,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{a}{r^2} \vec{u}_z$$

où  $a$  est une constante.

1) On peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes sur un cercle d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Or le flux du rotationnel sur le disque de rayon  $r$  vaut :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint \frac{a}{r^2} \vec{u}_z \cdot r \, dr \, d\theta \, \vec{u}_z = \iint \frac{a}{r} \, dr \, d\theta = a \ln r \, 2\pi$$

et la circulation sur le cercle de rayon  $r$  :

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = B_\theta(r) \, 2\pi r$$

Donc :

$$B_\theta(r) \, 2\pi r = a \ln r \, 2\pi \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{a \ln r}{r}$$

Donc  $\vec{B} = \frac{a \ln r}{r} \vec{u}_\theta$ .

# Travaux dirigés

vendredi 26 janvier 2018

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## Les électroaimants

Extraits d'une notice technique d'un vendeur spécialisé (accessoires levage manutention - ALM) disponible à l'adresse [http://www.almfrance.com/shop/Generatrice-integree\\_p10.html](http://www.almfrance.com/shop/Generatrice-integree_p10.html)

### soulever et déposer des métaux ferromagnétiques

Les électro-aimants circulaires sont particulièrement adaptés, selon leur type, aux applications suivantes :  
Travaux très lourds dans :

- Aciéries.
- Fonderies.
- Démolitions par moyen de sphères.
- Chargements - déchargements de wagons de chemin-de-fer.
- Ports.

Activités de nettoyage dans :

- Déchèteries.
- Récupération de déchets de démolitions civiles / industrielles.

Les électro-aimants circulaires peuvent être montés sur ponts roulants, ou sur pelles hydrauliques et peuvent être réalisés sur demande en version hautes températures (jusqu'à 600°C) et en version sous-marine.



## Énoncé

- 1) Estimer le champ magnétique que l'électroaimant génère pour soulever la carcasse de voiture.

## Correction

1) Comme dans le cours, on peut chercher la force surfacique sous la forme

$$\frac{F}{S} \approx B^\alpha \times \mu_0^\beta$$

où  $B$  est le champ magnétique créé par les aimants à leur surface.

Les unités sont (en utilisant la force de Laplace  $F = I L B$  et le théorème d'Ampère  $B L = \mu_0 I$ )

$$\begin{cases} \left[ \frac{F}{S} \right] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \\ [B] = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ [\mu_0] = [B] \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{A}^{-2} \end{cases}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha = -2 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

donc  $\alpha = +2$  et  $\beta = -1$ . Aussi

$$\frac{F}{S} \approx \frac{B^2}{\mu_0}$$

Appliquons cela : la voiture pèse une tonne ( $F \approx 10^4 \text{ N}$ ), compactée elle offre une surface  $S \approx 1 \text{ m}^2$ , et comme  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ ,

$$B \approx \sqrt{\frac{10^4 \times 4\pi \times 10^{-7}}{1}} \approx 10^{-1} \text{ T}$$

ce qui semble possible.

# Devoir non surveillé

vendredi 26 janvier 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## La spectroscopie de masse

Disponible à l'adresse "[www.icsn.cnrs-gif.fr/IMG/pdf/chapitre2.pdf](http://www.icsn.cnrs-gif.fr/IMG/pdf/chapitre2.pdf)".

### Comment fonctionne un spectrographe de masse ?

L'information primordiale apportée par la spectrométrie de masse, à savoir la valeur de  $m/z$  des particules chargées, découle de l'analyse d'un phénomène unique : la déviation de ces ions par des champs électromagnétiques. C'est d'ailleurs par la mise en évidence de l'effet de champs électriques et magnétiques sur la trajectoire d'un faisceau de particules émises par des décharges électriques dans un tube à faible pression que Wien pu démontrer, en 1898, leur nature ionique.

Avant d'aborder la description des analyseurs de masse dans la suite, une mise au point doit être faite au sujet d'un facteur instrumental important : la résolution.

#### Qu'est-ce que la résolution ?

La résolution est la capacité d'un instrument de mesure à distinguer entre eux deux signaux voisins. Plus la résolution est élevée, plus la différence entre deux signaux distincts est faible sur le paramètre mesuré. En spectrométrie, la résolution correspond également à la finesse des pics. A chacune de ces définitions correspond un mode de calcul particulier. En considérant le pouvoir séparatif, on peut définir la résolution en spectrométrie de masse comme le rapport  $m/\Delta m$  où  $m$  est la masse d'un ion considéré et  $\Delta m$  la différence minimale entre le pic considéré et son voisin le plus proche dont il peut être distingué. Selon cette définition, un instrument qui est en mesure de distinguer des ions de masses 100 et 100,1 possède une résolution de  $100/(100,1 - 100) = 1000$ .

#### Analyseur à temps de vol (Time-of-Flight, TOF)

Dans son principe, l'analyseur à temps de vol est le plus simple de tous. C'est Dempster (1918) qui, le premier, introduisit l'usage de faisceaux monoénergétiques en appliquant une différence de potentiel ( $V_0$ ) à la sortie de la source d'ions. Cette tension confère une énergie cinétique au faisceau ionique ( $\frac{1}{2}m v^2$ ) homogénéisée à la valeur  $z V_0$  :

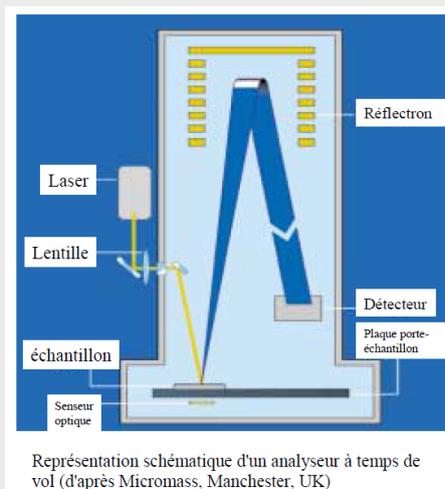
$$\frac{1}{2}m v^2 = z V_0 \quad (1)$$

Cette simple égalité "contient" le rapport  $m/z$  que l'on peut déduire directement de la vitesse  $v$ , donc du temps  $t$  (temps de vol) que met un ion à franchir une distance fixe  $d$ .

$$\frac{m}{z} = 2 V_0 \frac{t^2}{d^2} \quad (2)$$

Ainsi, après l'accélération due à  $V_0$ , les ions "volent" d'autant plus vite qu'ils sont plus légers. Les analyseurs à temps de vol mesurent donc le temps que mettent les ions à franchir une distance fixe. Le temps final correspond à l'arrivée sur le détecteur, le temps initial  $t_0$  étant déterminé de manière différente selon les appareils et le mode d'ionisation mis en œuvre. La qualité du résultat dépend de celle de la mesure de temps très courts (de l'ordre de la microseconde) ce qui explique que cette instrumentation s'est développée parallèlement aux progrès de l'électronique et de l'informatique.

Théoriquement, l'analyse par temps de vol ne pose pas de limite à la masse des ions. Par ailleurs, du fait qu'aucun balayage de masse n'est effectué, elle présente l'intérêt de détecter tous les ions produits d'où mie

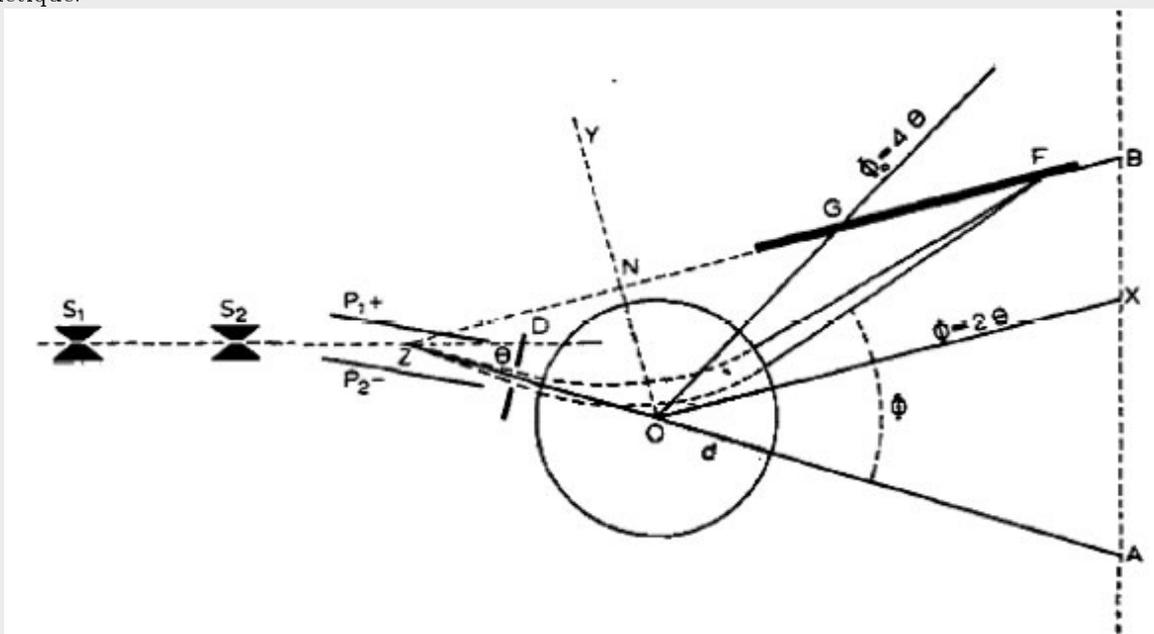


très grande sensibilité des expériences. En ce qui concerne la résolution, celle-ci est définie par la distribution du temps de vol d'une population d'ions de même masse. Différents facteurs sont susceptibles d'altérer cette résolution, notamment la distribution des énergies cinétiques initiales des ions au sortir de la source et la dispersion angulaire du faisceau ionique. La mise au point de l'extraction retardée, qui consiste à homogénéiser les énergies cinétiques des ions dans la source avant leur injection dans l'analyseur, a grandement amélioré les performances instrumentales. Il en est de même de l'interposition de miroirs électrostatiques sur le trajet ionique. Ces miroirs, appelés aussi "réflectrons" compensent les différences de vitesse pour une valeur de  $m/z$  donnée en imposant des trajets à parcourir d'autant plus longs que les ions sont plus rapides. Ils permettent aussi de s'affranchir des espèces neutres formées par dissociation métastable qui, en l'absence de réflectron, contribuent au signal des espèces ioniques dont elles sont issues et le dégradent. Désormais, les résolutions obtenues sur les instruments à temps de vol modernes peuvent atteindre environ 20000 en routine dans une gamme de masse compatible avec l'utilisation du réflectron ( $m/z < 10\,000$ ).

### Analyseur magnétique

La propriété des aimants à dévier les trajectoires ioniques d'abord mise à profit par Thomson (1913) puis par Aston (1919) à des fins d'analyse de matériaux gazeux, ce qui permit à Thomson, après la découverte de l'électron qui lui valut le prix Nobel, de prouver que certains éléments stables pouvaient exister sous différentes formes isotopiques.

Aston construisit ensuite ce qu'il définit lui-même comme un "spectrographe de masse" (cf. ci-dessous). Sur cet appareil étaient disposés, sur le trajet d'un faisceau issu du tube de décharge, deux fentes fines ( $S_1, S_2$ ) puis un champ électrique homogène ( $P_1, P_2$ ) et enfin, après un diaphragme ( $D$ ), un champ magnétique sur le plan focal duquel était placée une plaque photographique (plan  $G-B$ ). L'obtention de raies distinctes pour des corps de masses différentes se déduisait simplement de l'équation de déviation de particules chargées dans un champ magnétique.



Pour une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , possédant par surcroît une certaine énergie cinétique ( $E_c = 1/2 m v^2$ ), la force centripète due au champ magnétique  $B$  et la force centrifuge qui l'équilibre font adopter à la particule incidente une trajectoire circulaire uniforme de rayon  $r$  : d'où :

$$q v B = \frac{m v^2}{r} \quad (3) \text{ et } r = \frac{m v}{q B} \quad (4)$$

L'architecture choisie par Aston (direction inverse des champs électriques et magnétiques) permettant de réduire la dispersion initiale de la vitesse  $v$  des ions issus de la source, y pouvait être considérée comme à peu près constante et donc le rayon de la trajectoire comme directement proportionnel à  $m/q$ .

L'imposition par Dempster d'une tension d'accélération  $V_0$  en sortie de source (voir plus haut) se fit sur un instrument qui imposait à la fois le rayon de la trajectoire des ions ( $r$  fixe sur un demi-cercle de trajectoire) et la valeur du champ magnétique. Des équations (1) et (3) on peut en effet déduire facilement l'égalité suivante :

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 V_0} \quad (5)$$

Par conséquent, en faisant varier le seul potentiel d'accélération  $V_0$ , Dempster était en mesure de détecter

sélectivement des espèces de différentes valeurs de rapport  $m/q$ . Cette expérience lui permit, entre autres, de caractériser les isotopes des ions lithium, potassium, magnésium, calcium et cadmium.

L'intérêt, évident si l'on considère ce qui précède, de disposer d'un faisceau monoénergétique provient de la capacité à mesurer des valeurs de  $m/q$  non plus par la position d'une raie sur une plaque photosensible, avec tous les défauts de résolution que cela peut poser (dispersions en vitesse et en énergie cinétique), mais de calculer, à partir d'une valeur de potentiel variable, les valeurs de  $m/q$  qui correspondent à la réception d'un signal. D'une certaine façon, on peut considérer que Dempster a introduit l'idée de réaliser des spectres en balayant des tensions. Qu'il s'agisse de balayages de  $V_0$  ou de  $B$ , la résolution du signal dépendra du fait que les autres paramètres de l'équation (5) seront réellement constants (c'est à dire avec le minimum de dispersion). C'est la raison pour laquelle on peut faire appel à l'effet des champs électrostatiques sur la trajectoire des particules chargées. Si un ion incident de vitesse  $v$ , de masse  $m$ , et de charge  $q$ , subit l'effet d'un champ électrostatique  $E$ , il adoptera une trajectoire circulaire uniforme telle que la force centrifuge équilibre la force centripète :

$$\frac{m v^2}{r'} = qE \quad (6) \quad \text{d'où} : E = \frac{2 E_c}{q r'} \quad (7)$$

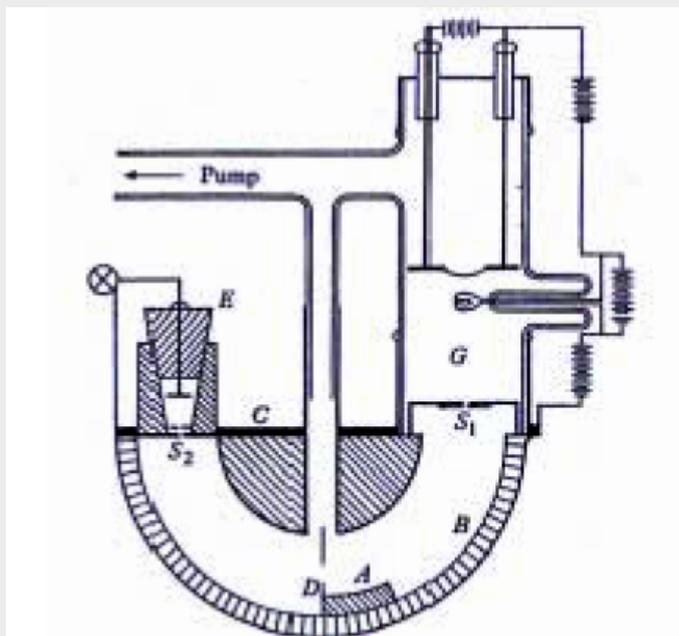
En conséquence, l'ajout d'un champ électrostatique sur le trajet ionique joue le rôle de filtre d'énergie cinétique à la condition que  $r'$  demeure constant (on impose  $r'$  par construction du tube de vol). Par ailleurs, si le faisceau ionique est préalablement accéléré par une différence de potentiel  $V_0$ , ce qui est généralement le cas, le paramètre  $q$  n'intervient plus dans l'équation. En intégrant l'équation (1) dans l'égalité (5), on obtient en effet :

$$E = \frac{2 V_0}{r'} \quad (8)$$

L'asservissement de  $E$  à  $V_0$  permet donc de filtrer des ions de même énergie cinétique et ce, indépendamment de leur charge. Dans certains cas, un champ  $E$  a été utilisé pour réaliser des filtres de vitesse (et non plus d'énergie cinétique). Si l'on parvient, en effet, à faire en sorte qu'un champ magnétique s'exerce dans un sens opposé au champ électrostatique, il faudra que leurs forces s'équilibrent pour qu'un faisceau incident ne subisse aucune déviation. C'est le principe du "filtre de Wien" :

$$q v B = q E \quad (9) \quad \text{soit} \quad v = \frac{E}{B} \quad (10)$$

Dans ce cas, l'imposition d'un rapport  $E/B$  particulier permet de définir la vitesse  $v$  des espèces ioniques issues de la source. C'est ce que Bainbridge mis en œuvre en 1933 pour obtenir une échelle linéaire des masses en fonction du rayon des trajectoires ioniques, amélioration importante du travail initial d'Aston.



Premier spectrographe de masse de Dempster

A: zone analytique (aimant); B, C: parois de la chambre à vide; D: diaphragme destiné à l'élimination des ions réfléchis; E: unité de détection; G: source d'ions; S1 et S2 sont respectivement les fentes de la source et du collecteur.

## Enoncé

Démontrer toutes les équations numérotées du document.

## Correction

1) Dans la zone de champ électrique, accélératrice - Equation (1) :

Un ion de masse  $m$  et de charge  $z$  subit une différence de potentiel  $V_0$  et passe d'une vitesse quasi-nulle à une vitesse  $v$  à la sortie de la zone où règne une différence de potentiel (donc un champ électrique). La seule force qui s'applique est la force de Lorentz électrique qui dérive de l'énergie potentielle  $E_p = zV$ .

La conservation de l'énergie mécanique en absence de force non conservative donne :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 = \frac{1}{2} m v^2 - 0 + z(0 - V_0) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = z V_0 \quad (1)$$

2) Après la zone accélératrice - Equation (2) :

Dans cette zone, l'ion n'est plus soumis à aucune force : sa vitesse se conserve.

La vitesse  $v$  de l'ion est reliée à la durée  $t$  (temps de vol) que met un ion à franchir une distance fixe  $d$  :

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow (1) \Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{d^2}{t^2} = z V_0 \Rightarrow \frac{m}{z} = 2 V_0 \frac{t^2}{d^2} \quad (2)$$

3) Dans la zone de champ magnétique - Equations (3) et (4) :

Dans cette zone règne un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . On peut se placer dans le repère de Frénet  $(\vec{u}_t, \pm \vec{u}_n, \vec{u}_z)$ .

Dans le référentiel du sol (galiléen : il n'y a pas de forces d'inertie) la seule force qui s'applique est la force de Lorentz magnétique (NB : maintenant la charge est notée  $q$ ) :

$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = q v \vec{u}_t \wedge B \vec{u}_z = q v B \vec{u}_n$$

dont la puissance est nulle :  $v$  est constante. Le principe fondamental de la dynamique projeté suivant  $\vec{u}_n$  s'écrit :

$$m \frac{v^2}{r} = q v B \quad (3) \Rightarrow r = \frac{m v}{q B} \quad (4)$$

Le mouvement de l'ion est donc circulaire uniforme de rayon  $r$ .

4) Liaison entre zone accélératrice et zone de champ magnétique - Equation (5) :

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q V_0 \Rightarrow m v^2 = 2 q V_0$$

qu'on reporte dans (3) :

$$m \frac{v^2}{r} = q v B \Rightarrow 2 q V_0 = r q v B \Rightarrow v^2 = \left( \frac{2 V_0}{r B} \right)^2$$

Enfin,

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q V_0 \Rightarrow v = \frac{2 q V_0}{m}$$

qu'on reporte dans la précédente équation :

$$\frac{2 q V_0}{m} = \left( \frac{2 V_0}{r B} \right)^2 \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2 V_0}{r^2 B^2} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 V_0} \quad (5)$$

5) Dans la zone de champ électrostatique - Equations (6) et (7) :

Dans cette zone règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ . La question est de savoir comment est ce champ électrostatique. On va partir des résultats :

$$\frac{m v^2}{r'} = q E \quad (6) \text{ d'où : } E = \frac{2 E_c}{q r'} \quad (7)$$

Le mouvement de l'ion est donc circulaire uniforme de rayon  $r'$ .

On peut se placer dans le repère cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  : la vitesse est alors  $\vec{v} = v \vec{u}_\theta$  et l'accélération  $\vec{a} = -v \dot{\theta} \vec{u}_r = -\frac{v^2}{r'} \vec{u}_r$ .

Les trois projections du principe fondamental de la dynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} -m \frac{v^2}{r'} = q E_r \\ 0 = q E_\theta \\ 0 = q E_z \end{cases}$$

On en déduit donc que c'est possible ssi le champ électrostatique est à symétrie cylindrique :

$$\vec{E} = -\frac{m v^2}{q r'} \vec{u}_r$$

ce qui est réalisable avec un condensateur cylindrique, mais semble compliqué à mettre à la bonne valeur. La suite va nous expliquer comment on fait...

**6)** Lien entre les deux zones de champ électrostatique - Equation 8

En intégrant l'équation (1) ( $m v^2 = 2 q V_0$ ) dans l'égalité (6) ( $\frac{m v^2}{r'} = q E$ ), et pas l'égalité (5) comme le dit le document (erreur), on obtient :

$$E = \frac{2 V_0}{r'} (8)$$

**7)** "filtre de Wien" - Equations (9) et (10)

On peut se placer dans le repère cartésien ( $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ). Dans cette zone règnent :

- un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$
- un champ électrique  $\vec{E} = E \vec{u}_y$

Dans le référentiel du sol (galiléen : il n'y a pas de forces d'inertie) la seule force qui s'applique est la force de Lorentz :

$$q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = q E \vec{u}_y + q (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z) \wedge B \vec{u}_z = (q E - q v_x B) \vec{u}_y + q v_y B \vec{u}_x$$

La projection du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = q E - q v_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

En ne sélectionnant que les ions se déplaçant suivant  $\vec{u}_x$ ,  $v_y = v_z = 0$  (dont les dérivées sont nulles) et  $v_x = v$ , la seconde projection donne :

$$q v B = q E (9) \text{ soit } v = \frac{E}{B} (10)$$