Introduction à la mécanique des fluides

Notes de cours

mardi 10 octobre 2017

I- Bilan de masse

Système ouvert : *s'y retrouver*

le système ouvert est défini comme le volume V délimité par une surface fermée Σ. Σ est fixe dans le référentiel d'étude au cours du temps.
Pour le système ouvert correspondant au volume V :

$$M_{ouvert} = \iiint_V \mathrm{d}^3 m = \iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3 \tau$$

où μ est la masse volumique du fluide.

Passer d'un système ouvert à un système fermé *schéma*

La figure 1 représente un système ouvert et le système fermé qui le traverse.

- Le système fermé à l'instant t correspond au système ouvert et Σ_A ;
- le système fermé à l'instant $t + dt$ correspond au système ouvert et Σ_B.

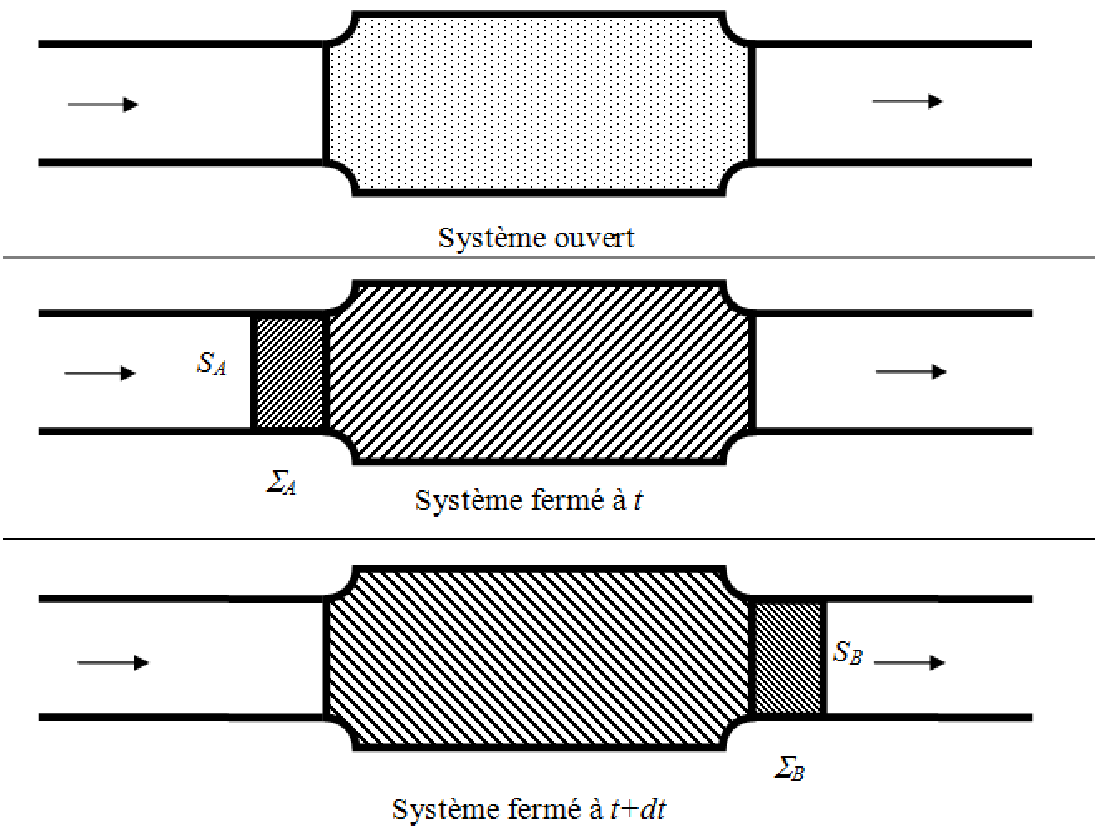


FIGURE 1 – Passer d'un système ouvert à un système fermé

Débits massique et volumique *définition*

le débit massique à travers une surface non fermée S orientée est :

$$D_m = \iint_S \mu \, \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

Il s'exprime en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. La masse δm qui passe à travers la surface pendant dt est telle que $D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t}$.
On aurait tout aussi bien pu définir le débit volumique à travers la surface orientée S :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S}$$

qui s'exprime en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1 Débits pour un fluide incompressible *théorème*

La variation temporelle de M pour le système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t} = 0$$

où

- la variation temporelle de la masse M pour le système fermé : $\frac{\mathrm{d}M_{ferme}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$;
- la variation temporelle explicite de M pour le système ouvert : $\frac{\mathrm{d}M_{ouvert}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3\tau\right) = 0$, car $\mu = cste$;
- les flux entrant ($\frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t}$) et sortant ($\frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t}$) de masse qui ne sont rien d'autre que les débits massiques.

$\Rightarrow$
Dans le cas d'un fluide incompressible (liquide),

- le débit massique se conserve entre l'entrée et la sortie : $\frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} = D_m$
- ainsi que le débit volumique : $\frac{\delta V_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta V_s}{\mathrm{d}t} = D_V$.

2 Débits en régime permanent *théorème*

La variation temporelle de M pour le système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t} = 0$$

où

- la variation temporelle de la masse M pour le système fermé : $\frac{\mathrm{d}M_{ferme}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$;
- la variation temporelle explicite de M pour le système ouvert : $\frac{\mathrm{d}M_{ouvert}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3\tau\right) = 0$, car $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;
- les flux entrant ($\frac{\delta m_A}{\mathrm{d}t}$) et sortant ($\frac{\delta m_B}{\mathrm{d}t}$) de masse qui ne sont rien d'autre que les débits massiques.

$\Rightarrow$
Dans le cas d'un écoulement permanent, quel que soit le fluide (liquide ou gaz), le débit massique se conserve entre l'entrée et la sortie : $\frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} = D_m$.

3 Non conservation du débit d'un gaz en régime non permanent : *exercice*

Une pompe injecte un débit massique D_m constant d'air (considéré comme un gaz parfait de masse molaire M à la température T) dans une chambre à air.

. ▷ Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la pression P dans la chambre à air.

▷ La variation temporelle de M pour le système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}$$

où

- la variation temporelle de la masse M pour le système fermé : $\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0$;
- la variation temporelle explicite de M pour le système ouvert : $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \mu \, \mathrm{d}^3\tau\right) = V\frac{\partial \mu}{\partial t}$;
- les flux entrant ($\frac{\delta m_e}{dt} = D_m$) et sortant ($\frac{\delta m_s}{dt} = 0$) de masse.

Comme $\mu = \frac{m}{V} = \frac{n.M}{V} = \frac{P.M}{R.T}$, on trouve $V\frac{\partial \mu}{\partial t} = D_m = \frac{V.M}{R.T}\frac{\partial P}{\partial t}$.

II- Bilans de quantité de mouvement

Quantité de mouvement d'un système ouvert : *définition*

la quantité de mouvement du système ouvert de volume V est :

$$\vec{P} = \iiint_V \vec{v}\, \mathrm{d}^3m = \iiint_V \mu\, \vec{v}\, \mathrm{d}^3\tau$$

4 Bilan de quantité de mouvement : *théorème*

la variation temporelle de la quantité de mouvement du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \frac{\vec{P}_f(t+dt) - \vec{P}_f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

où $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de la quantité de mouvement du système ouvert et δm_s (respectivement δm_e) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de la résultante cinétique impose par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures qui s'appliquent sur le système fermé coïncident. $\Rightarrow$

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

5 Résultante des forces de pression *théorème*

un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de la part de son environnement. Sur l'élément infinitésimal $\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$ (orienté vers l'extérieur) s'exerce $\overrightarrow{\mathrm{d}^2F} = -P\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$.

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \overrightarrow{grad}P(M)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Dans le cas statique, $\overrightarrow{grad}P = \mu\,\vec{g}$. Donc $\Rightarrow$
un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de résultante

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \mu(M)\,\vec{g}\,\mathrm{d}^3\tau$$

. Dans le cas statique, la poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

6 Force de poussée en régime permanent *exercice*

Montrer qu'en régime permanent apparaît une grandeur qui a la dimension d'une force et qui est due au débit massique D_m

Si le régime est permanent, le débit massique se conserve ($D_m = \frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt}$) et $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$, aussi

$$D_m \left(\vec{v}_s - \vec{v}_e\right) = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Cette dernière grandeur a la dimension d'une force. On peut la nommer force de poussée :

$$\vec{F}_{poussee} = D_m \left(\vec{v}_e - \vec{v}_s\right)$$

remarque

La "force" de poussée n'est pas à prendre en compte dans le bilan des forces car elle apparaît naturellement dans le bilan de quantité de mouvement.

III- Bilan d'énergie

Energie cinétique d'un système ouvert : *définition*

l'énergie cinétique du système ouvert est :

$$E_c = \iiint_V \frac{v^2}{2}\,\mathrm{d}^3 m = \iiint_V \frac{\mu\, v^2}{2}\,\mathrm{d}^3\tau$$

7 Bilan d'énergie cinétique : *théorème*

la variation temporelle de l'énergie cinétique du système fermé est :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \frac{E_{c_f}(t+dt) - E_{c_f}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de l'énergie cinétique du système ouvert et δm_s (respectivement δm_e) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant dt à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où ΣP_{ext} est la somme des puissances des actions extérieures et ΣP_{int} est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système.
On admet que $\Sigma P_{int} = 0$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible. $\Rightarrow$

$$\Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où :

- la masse δm_e à l'entrée a une vitesse v_e,
- la masse δm_s à la sortie a une vitesse v_s,
- ΣP_{ext} est la somme des puissances des actions extérieures,

- et ΣP_{int} est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système ($\Sigma P_{int} = 0$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible).

8 Bilan d'énergie cinétique dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible et permanent *exercice*

Que devient le bilan d'énergie cinétique dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible et permanent ?

Si le régime est permanent, le débit massique se conserve ($D_m = \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}$) et $\frac{\partial E_c}{\partial t} = 0$, aussi

$$D_m \left(\frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} \right) = \Sigma P_{ext}$$

1) Modélisation de l'effet d'un jet d'eau sur une plaque mobile *exercice*

On s'intéresse à un jet d'eau de section S qui arrive, dans le référentiel du sol, avec une vitesse $\vec{v}_j = +v_j\,\vec{u}_x$ sur une plaque qui se déplace à la vitesse $\vec{v}_p$.

1) On considérera que l'eau repart dans un sens opposé ($-\vec{u}_x$) en conservant la section S du jet. En faisant un bilan de masse, déterminer

1.a) la vitesse de l'eau $\vec{v}_e$ incidente sur la plaque dans le référentiel de la plaque,

1.b) la vitesse de l'eau $\vec{v}_s'$ après choc sur la plaque dans le référentiel du sol.

2) On suppose que la pesanteur est négligeable et que la pression de l'eau est partout égale à la pression atmosphérique.

2.a) Calculer la résultante des forces de pression $\vec{\Pi}$.

2.b) En appliquant un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force $\vec{F}_{j\to p}$ qu'applique le jet sur la plaque.

3) Etude énergétique

3.a) Faire un bilan d'énergie cinétique dans le référentiel de la plaque.

3.b) Calculer, dans le référentiel du sol, la puissance $P_{j\to p}$ de la force qu'applique le jet sur la plaque.

3.c) On pose $v_p = x\,v_j$. Déterminer le maximum de $P_{j\to p}$.

Correction :

1) *Bilan de masse.*

1.a) *Dans le référentiel R de la plaque, en déplacement à la vitesse $\vec{v}_p$, par rapport au référentiel R' du sol,*

$$\vec{v}_e' = \vec{v}_e + \vec{v}_p = (v_e + v_p)\,\vec{u}_x = v_j\,\vec{u}_x \Rightarrow v_e = v_j - v_p$$

1.b) *On se place dans le référentiel R de la plaque, en déplacement à la vitesse $\vec{v}_p$. Dans ce référentiel,*

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le débit massique se conserve (fluide incompressible), aussi :

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}$$

Si on considère que la section du jet est constante,

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \mu\,v_e\,S = \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t} = \mu\,v_s\,S \Rightarrow v_e = v_s \Rightarrow \vec{v}_e = +v_e\,\vec{u}_x = -\vec{v}_s = -v_s\,\vec{u}_x$$

Donc la vitesse de l'eau après choc avec la plaque est

$$\vec{v}_s' = \vec{v}_s + \vec{v}_p = (-v_e + v_p)\,\vec{u}_x = (-v_j + 2\,v_p)\,\vec{u}_x$$

2) *Forces :*

2.a) *Un volume V de fluide délimité par une surface fermée Σ ressent des forces de pression de résultante*

$$\vec{\Pi} = -\oiint_{M\in\Sigma} P(M)\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = -\iiint_{M\in V} \overrightarrow{grad}P(M)\ \mathrm{d}^3\tau = \vec{0}$$

qui est cohérent avec la poussée d'Archimède nulle car égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (on néglige la pesanteur !).

2.b) *On se place dans le référentiel R de la plaque : la variation temporelle de la quantité de mouvement du système fermé est :*

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \frac{\vec{P}_f(t+dt)-\vec{P}_f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\vec{v}_e$$

où $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ est la variation temporelle de la quantité de mouvement du système ouvert et $\delta m_s = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$ (respectivement $\delta m_e = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de la résultante cinétique impose par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{P}}{\mathrm{D}t} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{\Pi} + \vec{F}_{p\to j} = -\vec{F}_{j\to p}$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures qui s'appliquent sur le système fermé coïncident. Donc

$$-\vec{F}_{j\to p} = D_m\vec{v}_s - D_m\mathrm{d}t\vec{v}_e = \mu\, v_e\, S\,(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

Reste à revenir dans le référentiel R' du sol, où

$$\vec{v}'_e = \vec{v}_e + \vec{v}_p = \vec{v}_j \Rightarrow v_e = v_j - v_p$$

et

$$\vec{v}'_s = \vec{v}_s + \vec{v}_p = (-v_j + 2\,v_p)\,\vec{u}_x \Rightarrow \vec{v}_s = (-v_j + v_p)\,\vec{u}_x$$

aussi

$$\vec{F}_{j\to p} = \mu\, v_e\, S\,(\vec{v}_e - \vec{v}_s) = \mu\ (v_j - v_p)\, S\,(v_j - v_p - (-v_j + v_p))\,\vec{u}_x = 2\,\mu\, S\,(v_j - v_p)^2\,\vec{u}_x$$

3) *Etude énergétique*

3.a) *Dans le référentiel de la plaque, la variation temporelle de l'énergie cinétique du système fermé est :*

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \frac{E_{c_f}(t+dt)-E_{c_f}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{dt}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$ est la variation temporelle de l'énergie cinétique du système ouvert et $\delta m_s = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$ (respectivement $\delta m_e = D_m\ \mathrm{d}t = \mu\, v_e\, S\ \mathrm{d}t$) est la masse qui est sortie (respectivement entrée) pendant $\mathrm{d}t$ à la vitesse $\vec{v}_s$ (respectivement $\vec{v}_e$).
Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{D}E_c}{\mathrm{D}t} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta m_s}{\mathrm{d}t}\frac{v_s^2}{2} - \frac{\delta m_e}{\mathrm{d}t}\frac{v_e^2}{2}$$

où $\Sigma P_{int} = 0$ est la somme des puissances des actions intérieures qui s'appliquent sur le système.
et $\Sigma P_{ext} = -\vec{F}_{j\to p}\cdot\vec{0}$ est la somme des puissances des actions extérieures car la vitesse de la plaque est nulle dans le référentiel de la plaque.
Comme $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0$ et $v_s = v_e$, on trouve $0 = 0$!

3.b) *La puissance de la force $\vec{F}_{j\to p}$ qu'applique le jet sur la plaque est*

$$P_{j\to p} = \vec{F}_{j\to p}\cdot\vec{v}_p = 2\,\mu\, S\,(v_j - v_p)^2\, v_p$$

3.c)

$$P_{j\to p} = \vec{F}_{j\to p}\cdot\vec{v}_p = 2\,\mu\, S\, v_j^3\,(1-x)^2\, x$$

On dérive $f(x) = x\,(1-x)^2$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (1-x)^2 - 2\ (1-x)\,x = (1-x)\,(1-x-2\,x) = (1-x)\,(1-3\,x)$$

qui s'annule pour $x = 1$ (minimum : $P_{j\to p} = 0$), ou $x = \frac{1}{3}$, qui est un maximum :

$$P_{max} = \frac{2}{3}\mu\, S\, v_j^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3\mu\, S\, v_j^3$$

Eléments de correction :

$\vec{F}_{j\to p} = 2\,\mu\, S\,(v_j - v_p)^2\,\vec{u}_x$, $P_{j\to p} = 2\,\mu\, S\, v_j^3\,(1-x)^2\, x$, si $x = \frac{1}{3}$, $P_{max} = \left(\frac{2}{3}\right)^3\mu\, S\, v_j^3$.

Les techniques mathématiques à connaître

Utilisation de formules d'analyse vectorielle

Formules locales de dérivation d'une somme

$$\vec{\nabla}(U+V) = \vec{\nabla}U + \vec{\nabla}V$$
$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\vec{A} + \vec{\nabla}\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} + \vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

Formules locales de dérivation d'un produit

$$\vec{\nabla}(U.V) = \left(\vec{\nabla}U\right).V + U.\left(\vec{\nabla}V\right)$$
$$\vec{\nabla}\left(U.\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}U\right).\vec{A} + U.\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(U.\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}U\right)\wedge\vec{A} + U.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right).\vec{B} - \vec{A}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right).\vec{A} - \left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right).\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A} - \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{A}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) + \vec{B}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) + \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right).\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right).\vec{A}$$

Formules locales de double dérivation

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}U\right) = \vec{0}$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = 0$$
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right) = \nabla^2 U$$
$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \nabla^2.\vec{A}$$

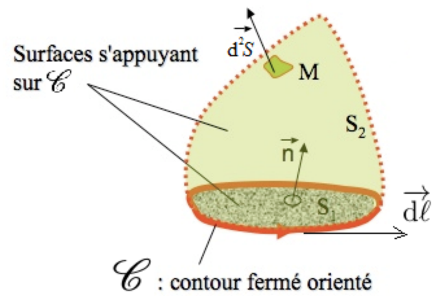
Formules intégrales pour une surface S délimitée par un contour fermé $\mathscr{C}$

Formule de Stokes :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{d^2S}$$

Formule de Kelvin :

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\overrightarrow{d\ell} = \iint_S \overrightarrow{d^2S}\wedge\overrightarrow{grad}(f)$$



Formules intégrales pour un volume V délimité par la surface fermée Σ

Formule d'Ostrogradsky :

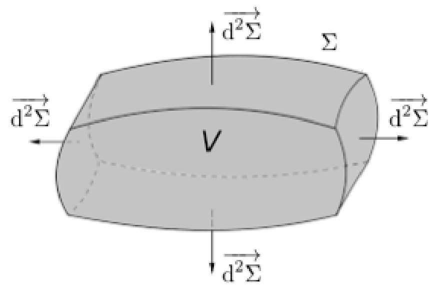
$$\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V div\left(\vec{A}\right)\,d^3\tau$$

Formule du gradient :

$$\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \overrightarrow{grad}(f)\,d^3\tau$$

Formule du rotationnel :

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{d^2\Sigma}\wedge\vec{A} = \iiint_V \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\,d^3\tau$$



Technique à maîtriser

jeudi 12 octobre 2017

I- Les capacités exigibles

1. Bilans de masse et calculs de débits

ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile. Utiliser un bilan de masse.

2. Bilans de quantité de mouvement

ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan. Utiliser la loi de la quantité de mouvement pour exploiter un bilan.

3. Bilans d'énergie cinétique

ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan.
Utiliser la loi de l'énergie cinétique pour exploiter un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.

II- Méthodes

1. Bilans de masse et calculs de débits

A) Calculs de débits *méthode*

Il faut bien définir la surface et son orientation.
Il faut discerner débit massique ($D_m = \iint_S \mu.\overrightarrow{v}.\overrightarrow{d^2S}$) et débit volumique ($D_v = \iint_S \overrightarrow{v}.\overrightarrow{d^2S}$).

B) Faire un bilan de masse *méthode*

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule la masse d'un système fermé est toujours constante (pas celle d'un système ouvert en régime non permanent) : $\frac{DM}{Dt} = 0$.

2. Bilans de quantité de mouvement

C) Faire un bilan de quantité de mouvement *méthode*

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule la quantité d'un système fermé suit le théorème de la résultante cinétique : $\frac{D\vec{P}}{Dt} = \Sigma\vec{F}_{ext}$.
Attention à ne pas introduire dans le bilan des forces une force de poussée !
Ne pas oublier la résultante des forces de pression.

3. Bilans d'énergie cinétique

D) Faire un bilan d'énergie cinétique *méthode*

Il faut faire un schéma avec :

- à l'instant t le système ouvert et le système fermé qui le traverse ;
- à l'instant $t + dt$ le système ouvert et le système fermé qui le traverse.

Seule l'énergie cinétique d'un système fermé suit le théorème de la puissance cinétique : $\frac{DE_c}{Dt} = \Sigma P_{ext} + \Sigma P_{int} = \Sigma P_{ext}$ dans le cas d'un écoulement parfait et incompressible.

III- Exercices

1. Bilans de masse et calculs de débits

1.1) Débit d'un ruissellement laminaire

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale sur une hauteur δ constante. On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\left(2.\delta - z\right).z.\vec{u}_x$$

où $\vec{u}_z$ est orthogonal à l'écoulement (et donc au plan incliné), orienté depuis le plan vers le liquide.

1) En déduire le débit volumique D_v par unité de largeur de l'écoulement.

1) Le débit volumique D_v par unité de largeur de l'écoulement est

$$D_v = \int_{z=0}^{z=\delta} \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\left(2.\delta - z\right).z.dz = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\int_{z=0}^{z=\delta}\left(2.\delta - z\right).z.dz = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{2.\eta}\left(\delta^3 - \frac{\delta^3}{3}\right)$$

soit

$$D_v = \frac{\mu.g.\sin\alpha}{3.\eta}\delta^3$$

1.2) Débit à travers une paroi poreuse (loi de Darcy)

Une paroi poreuse est modélisée par une couche de matière d'épaisseur ℓ percée de N tubes cylindriques horizontaux, de rayon a et de longueur ℓ ($a \ll \ell$), par unité de surface. Il existe, au sein du liquide, une différence de pression Δp entre les deux faces de la paroi poreuse. On ne tient pas compte du champ de pesanteur.

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien, incompressible, à travers cette paroi est caractérisé par une loi de Poiseuille cylindrique dans chaque tube, avec un champ des vitesses $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ tel que :

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}\left(a^2 - r^2\right)$$

où r désigne la distance à l'axe du tube.

1) Exprimer le débit volumique D_v du fluide à travers la paroi sous la forme

$$D_v = K\frac{S.\Delta p}{\eta.\ell}$$

où K est la perméabilité de la paroi et S représente la section totale de la paroi.

2) En déduire la vitesse moyenne V du fluide - vitesse de Darcy - à travers la paroi.

1) Le débit volumique dans chaque tube est

$$D_0 = 2\pi\int_{r=0}^{r=a} v(r).dr = 2\pi\frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}\int_{r=0}^{r=a}\left(a^2 - r^2\right).r.dr = 2\pi\frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right)$$

soit

$$D_0 = \frac{\Delta p.\pi.a^4}{8.\eta.\ell}$$

(c'est la loi de Poiseuille pour un tube). Pour tous les N tubes :

$$D_v = \frac{N.\Delta p.\pi.a^4}{8.\eta.\ell}$$

On a bien

$$D_v = K\frac{S.\Delta p}{\eta.\ell}$$

avec

$$K = \frac{N.\pi.a^4}{8.S}$$

2) La vitesse est telle que $D_v = S.V$, soit

$$V = K\frac{\Delta p}{\eta.\ell}$$

2. Bilans de quantité de mouvement

2.3) Jet sur une plaque fixe

On s'intéresse à une plaque plane orthogonale à $\vec{u}_x$, immobile dans le référentiel du sol, sur laquelle arrive un jet d'eau à la pression atmosphérique (de masse volumique μ, de vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$, de section S et donc de débit massique $D_m = \mu.S.v_0$). Après contact avec la plaque, le jet est dévié d'un angle α, il garde la même section S, et la même pression. On néglige tous phénomènes de viscosité.

1) Déterminer la force $\vec{F}_{jet}$ exercée par le jet sur la plaque en régime permanent.

2) Montrer en particulier que si $\alpha = 0$ (le fluide repart dans la direction d'incidence),

$$\vec{F}_{jet} = 2.D_m.\vec{v}_0$$

1) On prend comme système la plaque et le fluide compris entre deux surfaces : S_e la surface d'entrée et S_s, la surface de sortie. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé coïncident donne :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt}\vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{dt}\vec{v}_e$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures, qui prend en compte les forces de pression (de résultante nulle) et la force $\vec{F}_{support}$ due au support de la plaque. En régime permanent,

$$\vec{F}_{support} = D_m.\left(\vec{v}_s - \vec{v}_e\right)$$

où $\vec{v}_e = \vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ et $\vec{v}_s = v_0.\left(-\cos\alpha.\vec{u}_x + \sin\alpha.\vec{u}_y\right)$. Aussi, la force due au jet d'eau sur la plaque peut apparaître comme :

$$\vec{F}_{jet} = -\vec{F}_{support} = D_m.\left(\vec{v}_e - \vec{v}_s\right) = D_m.v_0\left(\left(1+\cos\alpha\right).\vec{u}_x - \sin\alpha.\vec{u}_y\right)$$

2) Dans le cas où $\alpha = 0$ (le fluide part dans la direction d'incidence),

$$\vec{F}_{jet} = 2.D_m.\vec{v}_0$$

2.4) Jet sur une plaque mobile

Une plaque, perpendiculaire à la direction horizontale (Ox), est en translation, de vitesse constante $\vec{v} = v.\vec{e}_x$. Elle est « poussée » par un jet d'eau, dont la vitesse est $\vec{v}_i 0 = v_0.\vec{e}_x$ et le débit massique D_m.

Un déflecteur dévie le jet d'un angle dont la valeur est α dans le référentiel de la plaque. Le jet garde une section uniforme, sa pression reste égale à la pression atmosphérique et on néglige toute viscosité.

1) Calculer le débit D'_m du jet dans le référentiel de la plaque.

2) Calculer la force exercée sur la plaque.

1) Le débit dans le référentiel du sol est $D_m = \mu.v_0.S$.

La vitesse du jet incident dans le référentiel de la plaque est $\vec{V}_i = \left(v_0 - v\right).\vec{e}_x$. Aussi le débit dans le référentiel de la plaque est $D'_m = \mu.V'.S = \mu.\left(v_0 - v\right).S$, soit :

$$D'_m = D_m.\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$$

2) Le référentiel de la plaque est galiléen. La conservation de l'énergie dans celui-ci implique que la norme de la vitesse de l'eau est constante (on ne tient pas compte de la pesanteur). La vitesse du jet émergent dans le référentiel de la plaque est $\vec{V}_f = \left(v_0 - v\right).\left[-\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y\right]$. Le système plaque + eau en contact avec le déflecteur est soumis à la pression atmosphérique de résultante nulle et à une force du support $\vec{F}_s$.

Un bilan de quantité de mouvement pour ce système donne : $\vec{F}_s = D'_m.\left(\vec{V}_f - \vec{V}_i\right)$.

On voit donc apparaître la force exercée par le jet : $\vec{F}_s = -\vec{F}_j$, soit

$$\vec{F}_j = D_m.\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)\left(v_0 - v\right).\left[\left(1+\cos\alpha\right)\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_y\right]$$

2.5) Force sur une lance d'incendie

Un tuyau souple, de section S se termine par un embout dont la section terminale $s = 1cm^2$ est très petite devant S.

La pression dans le tuyau est $P_1 = 10bar$ et le jet sort dans l'atmosphère à la pression $P_0 = 1bar$. L'embout fait un angle droit avec la partie antérieure du tuyau.

La vitesse du jet sera supposée très grande devant la vitesse du fluide dans le tuyau.

1) L'eau étant assimilée à un fluide partait, calculer le débit massique D_m

2) Calculer F_y, la composante parallèle au jet de la force $\vec{F}$ exercée par la personne qui tient la lance.

1) $D_m = \mu.s.v_{jet} = \mu.S.v_{tuyau}$. Comme $S \gg s$, $v_{jet} \gg v_{tuyau}$.

Le fluide étant parfait, on peut calculer le débit en utilisant ta relation de Bernouilli :
$\frac{v_{jet}^2}{2} + \frac{P_0}{\mu}\frac{v_{tuyau}^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} \approx \frac{P_1}{\mu}$.

Aussi, $v_{jet} \approx \sqrt{2\frac{P_1-P_0}{\mu}}$, d'où :

$$D_m = s.\sqrt{2.\mu\left(P_1 - P_0\right)} = 4,2kg.s^{-1}$$

2) Les forces appliquées sur le système formé par l'embout, le coude du tuyau et le fluide sont :

- $\vec{F}$ la force à exercer sur l'extrémité du tuyau,
- $\vec{F'}$ les forces de cohésion du tuyau en amont (suivant $\vec{e}_x$),
- $\left(P_1 - P_0\right).S\vec{e}_x$ les forces de pression suivant l'axe du tuyau,
- $\left(P_0 - P_0\right).s\vec{e}_y$ les forces de pression suivant le jet,

Le bilan de quantité de mouvement appliqué à ce système donne :
$\vec{F} + \vec{F'} + \left(P_1 - P_0\right).S\vec{e}_x = D_m.\left(\vec{v}_{jet} - \vec{v}_{tuyau}\right) \approx D_m.\vec{v}_{jet}$.
En projetant suivant $\vec{e}_y$, on trouve $F_y = D_m.v_{jet} = \mu.s.v_{jet}^2$. On en déduit :

$$F_y = 2\left(P_1 - P_0\right).s = 180N$$

2.6) Force de poussée subie par une fusée

Une fusée, dont la masse à l'instant t est m éjecte vers l'arrière les gaz issus de la combustion du carburant et du comburant qu'elle contient. On suppose qu'elle est en translation, de vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel d'étude, galiléen, et que la vitesse $\vec{u}$ des gaz éjectés dans le référentiel de la fusée est uniforme et constante. D_m représente leur débit massique.

1) Calculer la poussée de la fusée, c'est-à-dire la force $\vec{F}_p$ qu'il faudrait appliquer à un système fermé soumis aux mêmes forces extérieures pour obtenir la même accélération.

1) On se place dans le référentiel non galiléen de la fusée. Soit le système ouvert constitué par la fusée, le carburant et les gaz qu'elle contient, et le système fermé coïncident. Ce système est soumis à une force d'interaction $\vec{F}$ (pesanteur, frottements, etc.) Sa quantité de mouvement est constante, le bilan de quantité de mouvement donne : $\vec{F} + \vec{F}_i = D_m.\vec{u}$ (il n'y a pas de flux entrant). Aussi :

$$\vec{F}_p = -D_m.\vec{u}$$

2.7) Evolution de la vitesse d'une fusée

Une fusée, de masse totale $m(0) = 12t$ au départ, est lancée verticalement. La propulsion est assurée par un dispositif à réaction : éjection de gaz produits par la combustion de propergol à travers une tuyère, avec un débit massique constant $a = 120kg.s^{-1}$, à la vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée ($u = 2400m.s^{-1}$). Le mélange combustible a une masse $m_c(0) = 0,8.m(0)$ au départ.

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{V}$ de la fusée à l'instant t dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, en fonction de $\vec{g}$, intensité du champ de pesanteur au lieu où se trouve la fusée, u, et $m(t)$ masse de la fusée à l'instant t.

2) Pour une intensité du champ de pesanteur constante, intégrer la précédente relation pour trouver $\vec{V}(t)$, la vitesse de la fusée à l'instant t.

3) On prendra $g = 10m.s^{-2}$. Calculer la vitesse maximale V_{max} acquise par la fusée.

1) $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} + \frac{dm}{m.dt}.\vec{u}$.
2) $\vec{V}(t) = \vec{g}.t + \ln\left(\frac{m(t)}{m(t=0)}\right).\vec{u}$.
3) $V_{max} = 3,1.10^3 m.s^{-1}$.

3. Bilans d'énergie cinétique

3.8) Puissance d'une pompe

Une pompe aspire l'eau d'un puits, et la transvase dans un réservoir pressurisé avec un débit massique D_m constant. Le niveau supérieur de l'eau dans le réservoir est à une altitude h au-dessus de celui du puits, et la pression y est égale à P_1, supérieure à la pression atmosphérique P_0. On néglige toute viscosité.

1) Calculer la puissance utile P_u fournie par la pompe au fluide.

1) On effectue un bilan d'énergie mécanique pour le système constitué par l'eau comprise à l'instant t, dans un tube de courant qui relie la surface supérieure du puits à celle du réservoir.

Les énergies cinétiques entrante et sortante sont négligeables.

L'énergie potentielle massique entrante est nulle en prenant l'origine des énergies potentielles au niveau de la surface du puits. L'énergie potentielle massique sortante est égale à $g.h$.

Le régime étant permanent l'énergie mécanique du système ouvert ne varie pas.

La puissance des force de pression est $P_p = (P_0 - P_1)\,\frac{D_m}{\mu}$.

Conclusion :

$$P_u = D_m.\left(g.h + \frac{P_1 - P_0}{\mu}\right)$$

4. Techniques mathématiques - Utilisation de formules d'analyse vectorielle

4.9) Démonstration de la formule de Kelvin

1) En utilisant, dans la formule de Stokes, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule de Kelvin.

1) On applique la formule de Stokes avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$:

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\vec{K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$$

Or

$$\overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla}\wedge\left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} + f.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{K} = \overrightarrow{grad}f\wedge\vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est uniforme. On remplace :

$$\vec{K}\cdot\left[\oint_{\mathscr{C}} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\right] = \iint_S \left(\overrightarrow{grad}f\wedge\vec{K}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} = \left[\iint_S \left(\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}\wedge\overrightarrow{grad}f\right)\right]\cdot\vec{K}$$

par permutation circulaire. Cette dernière relation est vraie pour $\vec{K} = \vec{u}_x$, ou $\vec{u}_y$ ou encore $\vec{u}_z$. Donc la relation de Kelvin :

$$\oint_{\mathscr{C}} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{d}^2S}\wedge\overrightarrow{grad}\,(f)$$

est vérifiée.

4.10) Démonstration de la formule du gradient

1) En utilisant, dans la formule d'Ostrogradsky, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule du gradient.

1) On applique la formule d'Ostrogradsky avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$:

$$\oiint_{\Sigma} f\,\vec{K}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = \iiint_V div\left(f\,\vec{K}\right)\,\mathrm{d}^3\tau$$

Or

$$div\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{K} + f\left(\vec{\nabla}\vec{K}\right) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{K} = \overrightarrow{grad}f\cdot\vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est uniforme. On remplace :

$$\vec{K}\cdot\left[\oiint_{\Sigma} f\,\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\right] = \iiint_V \overrightarrow{grad}f\cdot\vec{K}\,\mathrm{d}^3\tau = \left[\iiint_V \overrightarrow{grad}f\,\mathrm{d}^3\tau\right]\cdot\vec{K}$$

Cette dernière relation est vraie pour $\vec{K} = \vec{u}_x$, ou $\vec{u}_y$ ou encore $\vec{u}_z$. Donc la formule du gradient :

$$\oiint_{\Sigma} f \, \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} = \iiint_{V} \overrightarrow{grad} f \; \mathrm{d}^3\tau$$

est vérifiée.

4.11) Démonstration de la formule du rotationnel

1) En utilisant, dans la formule du gradient, $f\,\vec{K}$ où $\vec{K}$ est un vecteur uniforme, démontrer la formule du rotationnel.

1) On calcule

$$\iiint_{V} \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \mathrm{d}^3\tau = \iiint_{V} \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) \mathrm{d}^3\tau$$

Or

$$\overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(f\,\vec{K}\right) = (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{K} + f\,\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{K}\right) = (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{K} = \overrightarrow{grad}\,(f) \wedge \vec{K}$$

puisque $\vec{K}$ est homogène. En remplaçant,

$$\iiint_{V} \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) \mathrm{d}^3\tau = \iiint_{V} \left(\overrightarrow{grad}\,(f) \wedge \vec{K}\right) \mathrm{d}^3\tau = \left(\iiint_{V} \overrightarrow{grad} f \; \mathrm{d}^3\tau\right) \wedge \vec{K}$$

Or, d'après la formule du gradient avec $\vec{A} = f\,\vec{K}$,

$$\left[\iiint_{V} \overrightarrow{grad}\,(f) \; \mathrm{d}^3\tau\right] \wedge \vec{K} = \left[\oiint_{\Sigma} f \, \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}\right] \wedge \vec{K} = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} \wedge f\,\vec{K}$$

qui donne

$$\iiint_{V} \overrightarrow{rot}\left(f\,\vec{K}\right) \mathrm{d}^3\tau = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} \wedge f\,\vec{K}$$

Donc la formule du rotationnel :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma} \wedge \vec{A} = \iiint_{V} \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \mathrm{d}^3\tau$$

est vérifiée.

4.12) Rotationnel d'un gradient

1) Montrer que le rotationnel d'un gradient est nul :

1.a) en utilisant des formules locales de double dérivation,

1.b) en utilisant des formules intégrales.

1)

1.a)

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

grâce à la nullité du produit vectoriel d'un vecteur ($\vec{\nabla}$) avec lui-même.

1.b) On utilise la formule de Stokes :

$$\iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}^2 S} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{grad}\,(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}f = [f]_A^A = 0 \forall S$$

ce qui assure que $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,(f)\right) = \vec{0}$.

4.13) Divergence d'un rotationnel

1) Montrer que la divergence d'un rotationnel est nulle :

1.a) en utilisant des formules locales de double dérivation,

1.b) en utilisant des formules intégrales.

1)

1.a)

$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{0}$$

grâce à l'orthogonalité du produit vectoriel avec un vecteur ($\vec{\nabla}$) le composant.

1.b) On utilise la formule d'Ostrogradsky :

$$\iiint_V div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \oiint_\Sigma \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2\Sigma}$$

Si maintenant on décompose la surface fermée Σ en deux surfaces S_1 et S_2 :

$$\iiint_V div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \iint_{S_1} \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S_1} + \iint_{S_2} \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}^2S_2}$$

la formule de Stokes nous donne :

$$\iiint_V div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau = \oint_{\mathscr{C}_1}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell_1} + \oint_{\mathscr{C}_2}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell_2}$$

où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les mêmes contours fermés, mais orientés dans des sens opposés ! Donc :

$$\iiint_V div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right)\,\mathrm{d}^3\tau = 0\forall V$$

ce qui assure que $div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right) = 0$.

Travaux dirigés

vendredi 13 octobre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

Un "jetlev" est un dispositif fixé au dos d'un pilote lui permettant de s'élever au-dessus d'une étendue d'eau (lac, mer...).

Une poussée suffisante est permise grâce à l'expulsion d'eau à grande vitesse par deux tuyères orientées vers le bas et alimentées grâce à un tuyau flexible d'une dizaine de mètres de long.

Afin de limiter le poids de l'engin, la pompe et le carburant sont disposés dans un bateau auxiliaire.

Enoncé

Pour répondre aux questions qui suivent, il vous appartiendra de modéliser la situation physique et de la mettre en équation.
Il est attendu que :

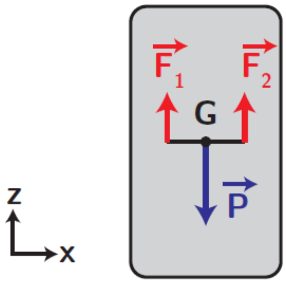
- vous représentiez par un (ou plusieurs) schéma(s) la situation physique étudiée
- vous choisissiez les notations que vous utilisez en attribuant un nom à chacune des grandeurs physiques que vous serez amené à introduire
- vous précisiez les lois physiques que vous appliquez
- vous précisiez, en le justifiant, les différentes hypothèses ou approximations que vous utilisez
- vous proposiez des ordres de grandeur réalistes des données physiques manquantes
- les éventuels calculs soient menés sous forme littérale, avec pour objectif final d'obtenir une valeur numérique

1) Effectuer une analyse qualitative des phénomènes physiques permettant d'expliquer le vol stationnaire de l'utilisateur d'un jetlev.

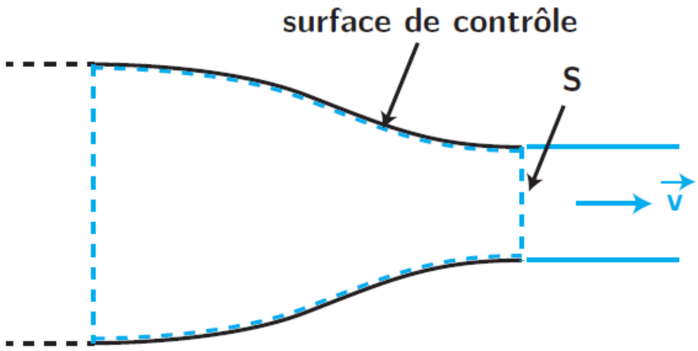
2) Quelle puissance doit fournir la pompe permettant au pilote de rester à une hauteur de quelques mètres au dessus de la surface de l'eau ? On pourra s'aider d'un bilan de quantité de mouvement et d'énergie entre deux instants successifs.

Correction

- Pour simplifier, on cherche à déterminer la force de poussée permettant l'équilibre de l'utilisateur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Par application du **principe fondamental de la statique** au système {utilisateur + dispositif} on a donc $\vec{P} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$ où $\vec{P} = m_{tot}\vec{g}$ est la force de pesanteur, m_{tot} la masse du système et $\vec{F_i}$ sont les deux forces liées à l'éjection d'eau en sortie des tuyères. Ces dernières doivent être de même intensité $F_1 = F_2 = \frac{m_{tot}\,g}{2}$ après projection selon l'axe vertical ; et positionnées de manière symétrique par rapport au centre de masse (même bras de levier), sinon il y a un mouvement de rotation.



- Calculons maintenant la norme de la force de poussée en sortie d'une des tuyères de section $S = \pi\frac{D^2}{4}$ où D est le diamètre de la tuyère. On effectue pour cela un bilan de quantité de mouvement au système fermé constitué de l'extrémité de la tuyère contenant une certaine masse d'eau m_1, constante (débit supposé constant) délimité par une surface de contrôle comme schématisé ci-dessous.



L'ensemble étant immobile dans le référentiel terrestre, cherchons l'action de l'eau, supposée incompressible, lors d'un écoulement à vitesse constante $\vec{v}$, de débit massique $D_m = \rho S v$. On a donc : $\delta\vec{p} = \vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t) = (m_1 + \delta m)\vec{v}) - m_1\vec{v} = \delta m\vec{v} = (D_m\delta t)\vec{v}$. Ainsi $D_m\vec{v} = \frac{\delta\vec{p}}{\delta t} = m_1\vec{g}$ (il n'y a a priori pas d'autres forces s'exerçant sur le fluide, la résultante des forces de pression étant nulle), soit $m_1\vec{g} - D_m\vec{v} = \vec{0}$ constituant le PFS pour le système. On identifie $-D_m\vec{v} = \rho S v^2\vec{e}z$ à la force de poussée subie par une des tuyères.

- On effectue maintenant un bilan d'énergie pour en déduire la puissance associée. On reprend le même système, et l'on utilise le **théorème de l'énergie cinétique** entre deux instants t et $(t+\delta t)$, en l'absence de pertes (viscosité négligée) : $\frac{1}{2}(D_m\delta t)v^2 = \delta W = P\delta t$ dont on déduit la puissance associée à l'une des forces de poussée $P = \frac{1}{2}D_m v^2 = \frac{1}{2}\rho S v^3$.

- Il faut coupler les deux bilans : avec $F_1 = F_2 = \frac{m_{tot}g}{2} = \rho S v^2$ on peut isoler la vitesse $v = \sqrt{\frac{m_{tot}\,g}{2\,\rho S}}$. La puissance associée aux deux tuyères est alors $P_{tot} = 2P = \rho S v^3 = \rho S\left(\frac{m_{tot}g}{2\rho S}\right)^{3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(m_{tot}g)^3}{2\rho S}}$.

- Il est temps d'évaluer numériquement la puissance. On considère un ordre de grandeur typique de la masse totale de $m_{tot} = 200$ kg (une personne + son équipement) ; le diamètre est, d'après la photo, de l'ordre de $\frac{1}{20}$ de la taille d'une personne, soit typiquement 5 cm, donc $S \simeq 20\ \text{cm}^2 = 2,0\times10^{-3}\ \text{m}^2$; la masse volumique de l'eau est de $\rho = 1000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, et l'on prendra $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On obtient alors $\boxed{P_{tot} \simeq 22\ \text{kW}}$ soit l'équivalent d'un moteur de 30 chevaux (1 ch $= 0,736$ kW), cela paraît relativement cohérent, et compatible avec les brochures des produits commerciaux.

Devoir non surveillé

vendredi 13 octobre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

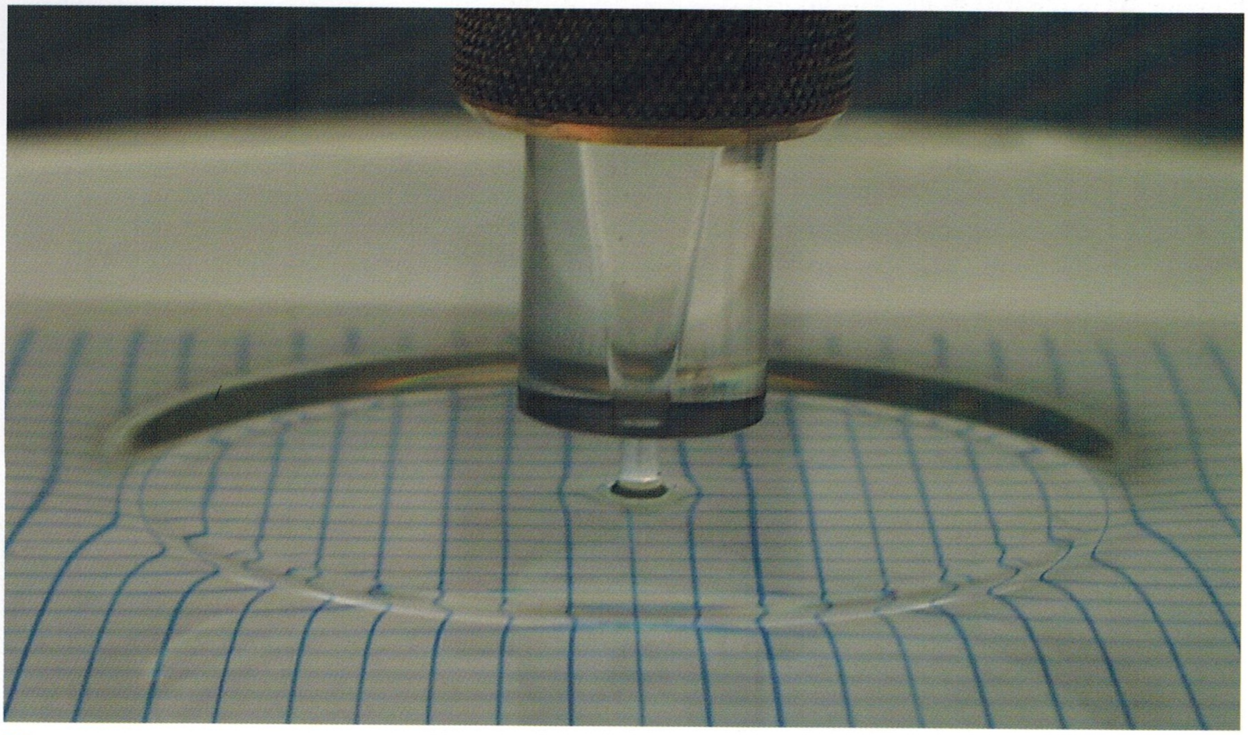
Ressaut et mascarets

"Ce que disent les fluides" - 2nde éd. - de E. Guyon, J-P. Hulin et L. Petit
Belin - Pour la Science

Des vagues fixes

Ressaut hydraulique

Un jet d'huile qui arrive verticalement sur un plan solide horizontal donne naissance à un film liquide. Ce film s'écoule radialement sur cette surface, vers l'extérieur (Figure 4). Près de la zone d'impact du jet, l'épaisseur du film est faible et sa vitesse élevée. L'observation la plus surprenante est l'existence d'un bourrelet stationnaire de liquide qui se forme à une certaine distance du centre : il s'accompagne d'une brusque augmentation de l'épaisseur du film vers l'extérieur, et d'un ralentissement simultané de l'écoulement.



4. Ressaut hydraulique formé par un jet incident sur un plan horizontal. Le fond quadrillé permet d'estimer l'épaisseur de la couche liquide.

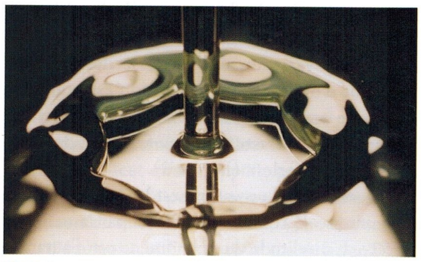
Cette expérience est semblable à l'observation courante d'un filet d'eau qui tombe sur le fond d'un évier. Comme dans l'exemple précédent, il se produit, à quelques centimètres du point d'impact, une transition d'un régime d'écoulement rapide vers un régime lent. Le bourrelet à la frontière entre les deux zones fluctue, et entraîne de nombreuses bulles. La différence d'aspect entre les deux expériences tient à la vitesse du liquide : elle est plus faible dans la figure 4, où l'écoulement est régulier (ou «laminaire»), que dans l'exemple de l'évier où l'écoulement est fluctuant (c'est-à-dire «turbulent»). Curieusement, pour des conditions expérimentales légèrement différentes, on observe des figures spectaculaires comme des hexagones (Figure 5) au lieu d'un cercle.

Dans tous les cas, la transition entre les deux zones d'écoulement représente un ressaut hydraulique. À une échelle beaucoup plus grande, des discontinuités analogues sont observées en bas des déversoirs (Figure 6) par lesquels s'évacue le «trop plein» des barrages : l'écoulement y est turbulent et accompagné d'un fort brassage d'air (c'est, cette fois, un écoulement parallèle et non plus radial).

Nombre de Froude

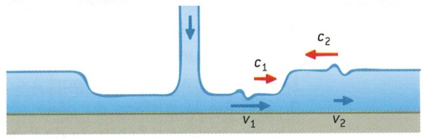
Le nombre de Froude Fr caractérise le rapport entre la vitesse v du liquide et la célérité $(g\,h)^{\frac{1}{2}}$ des ondes de surface (h est l'épaisseur de la couche de fluide). Le ressaut hydraulique marque le passage d'une zone où Fr est supérieur à l'unité, à une région où il lui est inférieur et où le fluide s'écoule plus lentement. Les déformations accidentelles de la surface viennent par ailleurs renforcer le ressaut : celles qui sont dans la zone lente en aval peuvent «remonter» le courant vers le ressaut (puisque $Fr < 1$), tandis que les perturbations dans la zone rapide sont au contraire entraînées par le courant jusqu'au ressaut (Figure 7). Il existe une analogie entre le bourrelet d'un ressaut et les «ondes de choc» dans les souffleries et écoulements supersoniques : les fronts de choc séparent en effet une zone d'écoulement supersonique (équivalente à la zone amont du ressaut) d'une zone d'écoulement subsonique (à comparer à la région aval). Le nombre de Mach joue en acoustique le rôle du nombre de Froude pour le ressaut hydraulique.

Si les ressauts sont fixes, les mascarets ou les vagues déferlantes se propageant sur un fluide globalement immobile, constituent la version «mobile» du même phénomène. Imaginez que vous fixez le mascaret en vous déplaçant à sa vitesse : vous contemplerez alors une discontinuité stationnaire du niveau, comparable à celle observée dans un ressaut.



5. Ressaut hydraulique de contour hexagonal créé par l'impact d'un fluide visqueux sur un plan. Le nombre de côtés des polygones observés est variable suivant l'épaisseur de la couche de fluide, son débit et sa viscosité. Le ressaut a ici une forme de bourrelet, limité à l'extérieur comme à l'intérieur par des couches liquides planes sur lesquelles se reflètent le jet et le dispositif d'éclairage.

6. Ressaut hydraulique en bas d'un déversoir à proximité du barrage d'Itaipu (frontière Brésil-Paraguay). L'eau s'écoule très rapidement sur le plan incliné avant que l'épaisseur de la couche liquide n'augmente brusquement. Cette transition est ici déclenchée par une légère remontée du plan incliné.



7. Vue en coupe d'un ressaut hydraulique pour un jet de fluide visqueux arrivant sur un plan. Les célérités c des ondes de surface sont inférieures à la vitesse v_1 du liquide dans la région centrale (Fr > 1), et supérieures à la vitesse v_2 (Fr < 1) dans l'anneau externe.

Enoncé

On note μ la masse volumique du liquide, P_{atm} la pression atmosphérique et g l'intensité de la pesanteur.

1) Ressaut cylindrique

On s'intéresse au ressaut de la figure 7. Le jet a un débit volumique D_v, et la vitesse dépend de la distance r à l'axe du problème :

- à l'intérieur ($r < R$), la hauteur de liquide est h_1 et la vitesse $v(r) = v_1(r)$;
- à l'extérieur ($r > R$), la hauteur de liquide est $h_2 > h_1$ et la vitesse $v(r) = v_2(r)$.

1.a) Faire un schéma où apparaissent ces données.

1.b) Qu'impose la conservation du débit ?

1.c) Tracer l'allure des variations du nombre de Froude Fr avec r.

2) Ressaut rectiligne

On modélise le ressaut (la vague) par une marche rectangulaire de hauteur Δh, sur une rivière. On suppose le fleuve rectiligne, suivant Ox (x croissant de l'amont vers l'aval), et de largeur uniforme, égale à L . On se place dans le référentiel du sol où le régime est permanent car la vague y est immobile. Dans ce référentiel, la vitesse de déplacement de l'eau du fleuve est :

- $V.\vec{u}_x$ en amont de la vague, où h_r est la profondeur du fleuve sans la vague ;
- $V'.\vec{u}_x$ en aval de la vague, où $h_m = h_r + \Delta h$ est la profondeur du fleuve avec la vague.

On choisit un système ouvert d'eau, portion de fleuve limité par une section verticale en amont de la vague et une section verticale en aval du ressaut.

2.a) Faire un schéma où apparaissent ces données.

2.b) En faisant un bilan de masse, montrer que :

$$(1) \quad h_r.V = h_m.V'$$

2.c) Faire un bilan de quantité de mouvement reliant le système ouvert au système fermé coïncident. Calculer la somme des forces de pression appliquées sur le système fermé coïncident, en supposant qu'en amont comme en aval, la pression de l'eau varie comme en hydrostatique. En déduire que

$$(2) \quad \left(h_m.V'^2 - h_r.V^2\right) = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} g$$

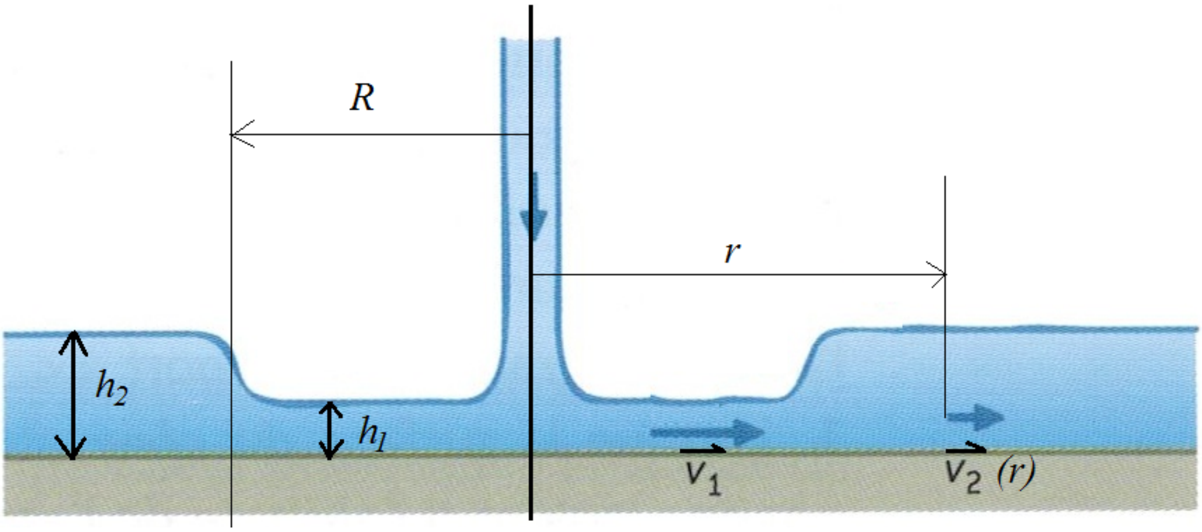
2.d) Déduire des deux relations précédentes une expression de V et de V'.

2.e) On admet que le nombre de Froude avant le ressaut est $Fr = \frac{V}{\sqrt{g\,h_r}} > 1$ et que le nombre de Froude après le ressaut est $Fr' = \frac{V'}{\sqrt{g\,h_m}} < 1$. Montrer que si une particule liquide s'échappe du ressaut vers l'amont elle est donc ramenée vers le ressaut ; réciproquement, si la particule liquide s'échappe du ressaut vers l'aval, elle revient en arrière dans le ressaut.

Correction

1) Ressaut cylindrique

1.a) Schéma :



1.b) La conservation du débit volumique impose

$$D_v = \int\int v(r)\,r\,d\theta\,dz$$

soit

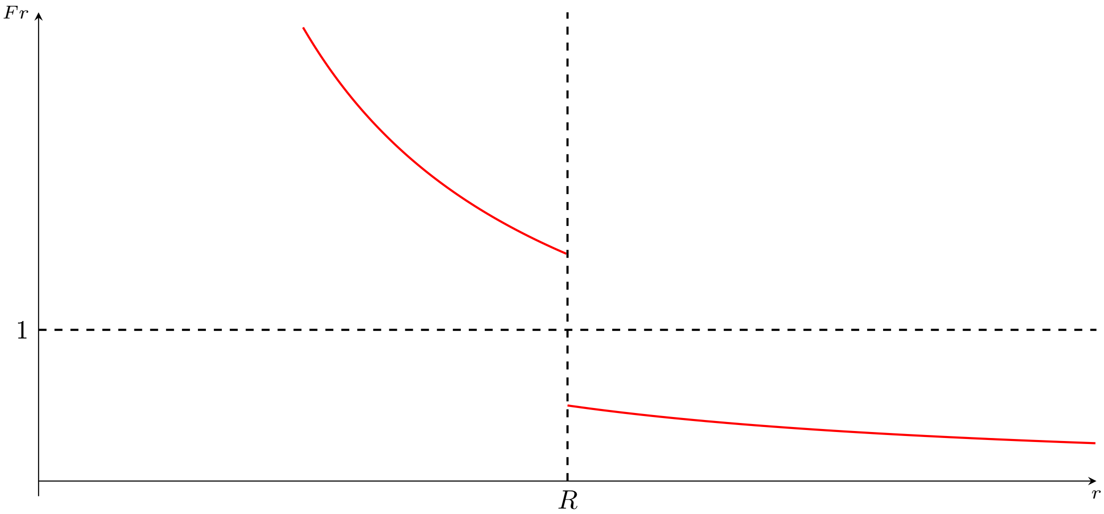
- à l'intérieur ($r < R$), $D_v = 2\pi\,r\,h_1\,v_1(r)$;
- à l'extérieur ($r > R$), $D_v = 2\pi\,r\,h_2\,v_2(r)$.

1.c) Le nombre de Froude est

$$Fr = \frac{v(r)}{\sqrt{g\,h}}$$

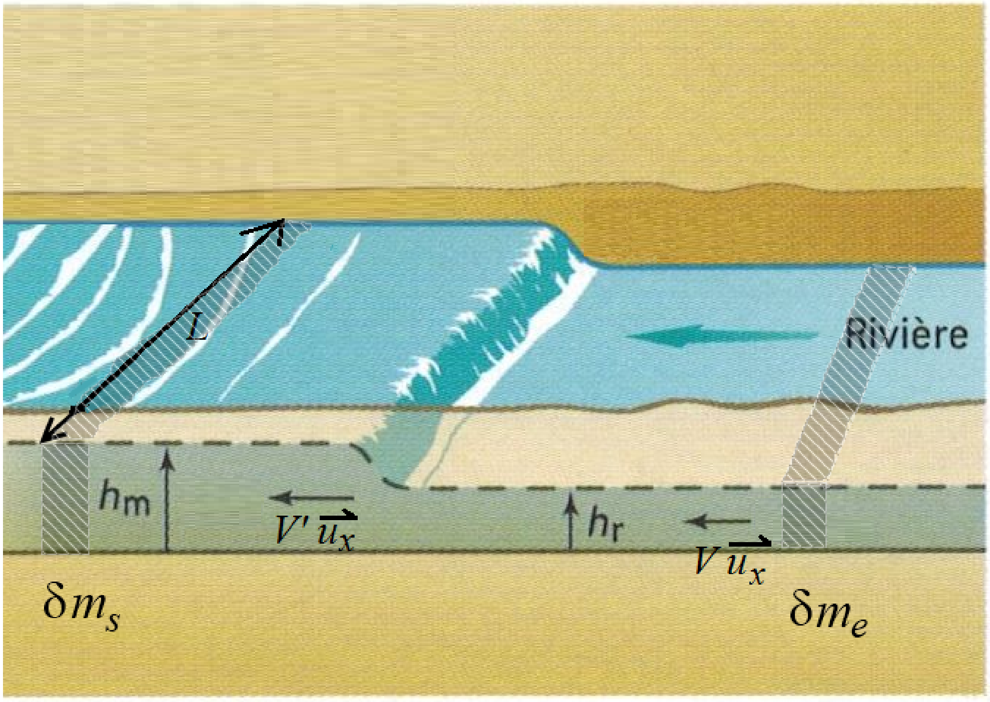
soit

- à l'intérieur ($r < R$), $Fr = \frac{v_1(r)}{\sqrt{g\,h_1}} = \frac{D_v}{2\pi\,r\,\sqrt{g}\,h_1^{\frac{3}{2}}}$;
- à l'extérieur ($r > R$), $Fr = \frac{v_2(r)}{\sqrt{g\,h_2}} = \frac{D_v}{2\pi\,r\,\sqrt{g}\,h_2^{\frac{3}{2}}}$.



2) Ressaut rectiligne

2.a) Schéma :



2.b) On note la masse $\delta m_e = \mu.h_r.L.V.dt$ qui va entrer dans le système ouvert entre t et $t+dt$ et la masse $\delta m_s = \mu.h_m.L.V'.dt$ qui va en sortir.

La masse du système fermé à l'instant t est égale à la masse du système ouvert : $M_f(t) = M_o(t)$.

La masse du système fermé à l'instant $t+dt$ est reliée à la masse du système ouvert par : $M_f(t+dt) = M_o(t+dt) + \delta m_s - \delta m_e$.

Comme la masse du système fermé se conserve ($M_f(t+dt) = M_f(t)$ et qu'on est en régime permanent ($M_o(t+dt) = M_o(t)$), donc $\delta m_s = \delta m_e$, soit :

$$h_r.V = h_m.V'$$

2.c) Bilan de quantité de mouvement.

La variation temporelle de la quantité de mouvement du système fermé est :

$$\frac{D\vec{P}_f}{Dt} = \frac{\vec{P}_f(t+dt) - \vec{P}_f(t)}{dt} = \frac{d\vec{P}_o}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} V'\,\vec{u}_x - \frac{\delta m_e}{dt} V\vec{u}_x$$

où la variation temporelle de la quantité de mouvement du système ouvert est $\frac{d\vec{P}_o}{dt} = \vec{0}$ car on est en régime permanent. Aussi, le bilan donne :

$$\frac{D\vec{P}_f}{Dt} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \mu.L\left(h_m.V'^2 - h_r.V^2\right).\vec{u}_x$$

où $\Sigma\vec{F}_{ext}$ est la somme des résultantes des actions extérieures qui s'appliquent sur le système fermé.

Sur la face en amont, la pression vérifie $p_{amont}(z) = P_{atm} + \mu.g.(h_r - z)$. La pression n'est pas homogène, on obtient la force en intégrant les forces élémentaires sur des bandes de largeur L (celle du fleuve) entre les cotes z et $z+dz$, donc

$$\vec{F}_{amont} = \int_{z=0}^{z=h_r} p_{amont}(z).L.dz\vec{u}_x = \left(P_{atm} + \mu.g.\frac{h_r}{2}\right).L.h_r.\vec{u}_x$$

De même, sur la face en aval, la pression vérifie $p_{aval}(z) = P_{atm} + \mu.g.(h_m - z)$ et la pression :

$$\vec{F}_{aval} = -\int_{z=0}^{z=h_m} p_{aval}(z).L.dz\vec{u}_x = -\left(P_{atm} + \mu.g.\frac{h_m}{2}\right).L.h_m.\vec{u}_x$$

Enfin, on n'oublie pas que la vague elle-même a une surface $L(h_m - h_r)$ soumise à la pression P_{atm}, d'où une troisième force

$$\vec{F}_{vague} = P_{atm}.L.(h_m - h_r).\vec{u}_x$$

Au total, la résultante des forces de pression suivant $\vec{u}_x$ est :

$$\vec{F} = \vec{F}_{amont} + \vec{F}_{aval} + \vec{F}_{vague} = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} \mu.g.L.\vec{u}_x$$

On trouve donc :

$$\left(h_m.V'^2 - h_r.V^2\right) = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} g$$

2.d) Expression de la vitesse.
(2) dans (1) donne :

$$V^2.\left(\frac{h_r^2}{h_m} - h_r\right) = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} g$$

Après simplification on en déduit

$$V^2.\left(h_r - h_m\right) = \frac{h_r^2 - h_m^2}{2} g.\frac{h_m}{h_r}$$

soit encore :

$$V = \sqrt{\frac{h_r + h_m}{2} \frac{h_m}{h_r} g} \quad \text{et} \quad V' = \sqrt{\frac{h_r + h_m}{2} \frac{h_r}{h_m} g}$$

2.e) Si une particule liquide s'échappe du ressaut vers l'amont, sa vitesse de propagation $c = \sqrt{g\,h_r}$ est inférieure à celle de l ?écoulement supercritique V et elle est donc ramenée vers le ressaut.

Réciproquement, si la particule liquide s'échappe du ressaut vers l'aval, sa vitesse de propagation $c' = \sqrt{g\,h_m}$ est supérieure à celle de l'écoulement sous-critique V' et donc lui permet de revenir en arrière dans le ressaut.