

Fluides visqueux

Notes de cours mardi 14 novembre 2017

I- Dynamique des fluides visqueux

1. Introduction de la viscosité



Constatations expérimentales de la viscosité *s'y retrouver*

si l'on jette de l'eau sur une table, celle-ci glisse puis s'arrête. Ainsi, il existe des forces tangentielles (dites forces de viscosité ou de cisaillement) exercées par les couches de fluides les unes sur les autres. De même, si l'on réitère l'expérience avec de l'huile, ou mieux encore avec du miel, la distance parcourue par le fluide sur la table est plus courte : ces forces de viscosité dépendent de la nature du fluide. Plus généralement, toutes les expériences montrent que :

- la vitesse d'écoulement d'un fluide est une fonction continue du temps mais aussi de l'espace,
- la vitesse relative du fluide au contact d'un solide est toujours nulle,

ce qui n'était pas vrai dans le cas du fluide parfait.

Il nous faut donc prendre en compte la viscosité du fluide pour s'approcher du comportement réel d'un fluide.



Contrainte normale et contrainte tangentielle en un point : *s'y retrouver*

soit un élément de surface d^2S sur une surface S et entourant un point M de S . Le système des forces de surface agissant sur d^2S est réductible à une force unique $\vec{d^2F}$ appliquée en M et à un moment $\vec{d^2M_0}$. On admet que $\vec{d^2F}$ est infiniment petit du premier ordre par rapport à d^2S et $\vec{d^2M_0}$ infiniment petit d'ordre supérieur. Lorsque d^2S tend vers zéro, le vecteur $\frac{\vec{d^2F}}{d^2S}$ tend vers un vecteur $\vec{\tau}$ qu'on appelle contrainte en M sur l'élément d^2S .

On peut donc écrire, pour d^2S infiniment petit :

$$\vec{d^2F} = \vec{\tau} d^2S$$

Le vecteur $\vec{\tau}$ peut avoir une orientation quelconque par rapport à $\vec{d^2S}$.

On peut décomposer la contrainte en une composante normale et une composante tangentielle à $\vec{d^2S}$:

$$\vec{d^2F} = \vec{d^2F}_\perp + \vec{d^2F}_\parallel$$

la contrainte tangentielle vient de la viscosité du fluide, due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide, qui frottent les unes sur les autres.



Forces exercées entre veines de fluide dans le cas d'un écoulement unidimensionnel *schéma*

La figure 1 représente un écoulement unidimensionnel $\vec{v} = v_x(y)$. La veine lente (pour $y < y_0$) est séparée de la veine rapide (pour $y > y_0$) à la cote y_0 .

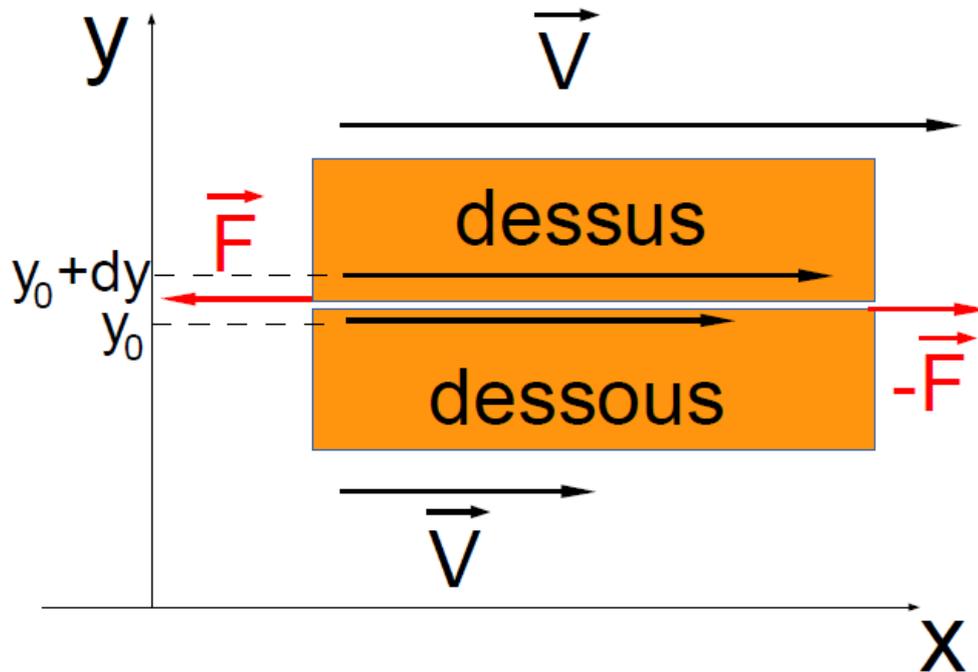


FIGURE 1 – Forces exercées entre veines de fluide dans le cas d'un écoulement unidimensionnel



Expression des forces de viscosité pour un écoulement unidimensionnel *définition*

on peut écrire que la force de viscosité exercée par la veine lente (pour $y < y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine rapide (pour $y > y_0$) est

$$F_x = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

où η est par définition, le coefficient de viscosité dynamique du fluide.



Interprétation *s'y retrouver*

la force de viscosité tend à accélérer les veines lentes et à ralentir les veines rapides. On parle aussi de force de cisaillement. Elles tendent à homogénéiser la vitesse.

NB : les forces de viscosité sont donc nulles pour un fluide au repos. La viscosité ne joue donc aucun rôle dans l'état d'équilibre d'un fluide, contrairement à la pression.



Fluide newtonien *s'y retrouver*

on se restreindra aux fluides newtoniens, pour lesquels la viscosité ne dépend pas du champ des vitesses (seulement de la nature du fluide et de sa température).



Viscosités dynamique et cinématique *définition*

la viscosité dite dynamique se note η . Elle est positive et s'exprime dans le système international en poiseuille

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Le coefficient de viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique sur la masse volumique :

$$\nu = \frac{\eta}{\mu} \text{ s'exprime en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

ν a la dimension d'un coefficient de diffusion...

 **Exemples de valeurs de viscosités** *tableau*

Le tableau 1 présente quelques exemples de valeurs de viscosités dynamiques pour quelques fluides courants.

fluide	air	eau	glycérine	graisse
η en Pl	18×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-3}$	0,870	10^3
ν en $m^2 \cdot s^{-1}$	15×10^{-6}	$1,0 \times 10^{-6}$	635×10^{-6}	1

TABLE 1 – Quelques viscosités dynamiques η et cinématiques ν à $20^\circ C$ et $P = 1atm$

 **La viscosité dépend de la température** *tableau*

Le tableau 2 présente la variation de la viscosité avec la température.

température	$10^\circ C$	$20^\circ C$	$30^\circ C$	$40^\circ C$	$50^\circ C$	$60^\circ C$	$70^\circ C$
huile de ricin	2420	986	451	231	125	74	43
huile d'olive	138	84	52	36	24,5	17	12,4

TABLE 2 – Quelques viscosités dynamiques η (en mPl) en fonction de la température

2. Forces de cisaillement

 **Forces de cisaillement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel** *schéma*

La figure 2 représente le système, un parallélépipède rectangle d'épaisseur dy suivant Oy et de surface S pour les plans de cote y_0 et $y_0 + dy$.

Les forces de cisaillement s'exercent sur :

- le plan de cote y_0 : $\vec{F}(y_0) = -\eta \cdot S \frac{\partial v_x(y_0)}{\partial y} \vec{u}_x$
- et sur le plan de cote $y_0 + dy$: $\vec{F}(y_0 + dy) = +\eta \cdot S \frac{\partial v_x(y_0 + dy)}{\partial y} \vec{u}_x$

 **1 Force de cisaillement** *théorème*

globalement, la force de cisaillement est :

$$\vec{F}_{cis} = \eta \cdot S \cdot \left[\frac{\partial v_x(y_0 + dy)}{\partial y} - \frac{\partial v_x(y_0)}{\partial y} \right] \cdot \vec{u}_x = \eta \cdot S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \vec{u}_x = \eta \cdot S \cdot dy \Delta v_x \vec{u}_x$$

\Rightarrow

Pour un écoulement unidimensionnel, $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$, la force de cisaillement exercée sur un volume élémentaire $d^3\tau = S dy$ est

$$\vec{F}_{cis} = \eta S dy \Delta v_x \vec{u}_x$$

3. Équation de Navier Stokes

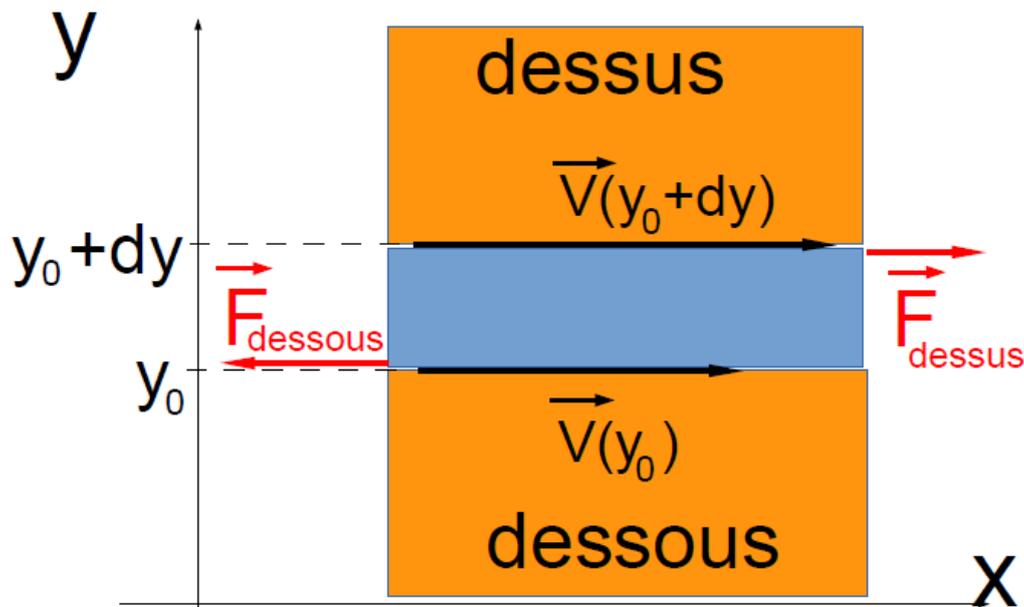


FIGURE 2 – Forces de cisaillement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel



Équivalent volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien *définition*

L'équivalent volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien en écoulement incompressible est :

$$\vec{F}_{cis} = \vec{f}_{cis} d^3\tau \text{ avec : } \vec{f}_{cis} = \eta \Delta \vec{v}$$



2 Equation de Navier Stokes dans le cas d'un référentiel galiléen *théorème*

en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué à un petit élément de volume $d^3\tau$, on trouve :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \Sigma \vec{f}_v$$

Dans le cas de l'étude dans un référentiel galiléen, seuls le poids et les forces de contact (pression et viscosité) interviennent *a priori*. On peut donc transformer la précédente expression en \Rightarrow

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{grad}(P)}{\mu} + \nu \Delta \vec{v}$$



Equation de Navier Stokes dans le cas d'un référentiel non galiléen *s'y retrouver*

si l'étude se fait dans un référentiel R non galiléen, avec $\vec{\Omega}_{R/R_g}$ le vecteur rotation de R par rapport aux référentiels galiléens, il faut ajouter dans le second membre de l'équation d'Euler la force de Coriolis. Soit :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v} - 2 \mu \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v}$$

✳ Interprétation des différents termes dans l'équation de Navier Stokes *s'y retrouver*

on reconnaît

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: le terme d'inertie dit instationnaire dû à la variation temporelle du champ des vitesses ;
- $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}$: le terme d'inertie de convection dû au transport de quantité de mouvement par l'écoulement (terme qui confère à l'équation de Navier - Stokes un caractère non linéaire) ;
- $-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu}$: le terme dû au champ de pression ;
- \vec{g} : le terme dû au champ de pesanteur,
- $\nu \cdot \Delta \vec{v}$: le terme dû à la viscosité, rendant compte de la diffusion de la quantité de mouvement.

✳ Comparaison entre les équations d'Euler et de Navier Stokes *s'y retrouver*

on retrouve l'équation d'Euler à partir de l'équation de Navier Stokes si on considère le fluide comme parfait, c'est à dire sans viscosité.

✳ Caractéristiques de l'équation de Navier Stokes *s'y retrouver*

l'équation de Navier Stokes est une équation différentielle vectorielle (c'est à dire qu'elle donne trois équations différentielles scalaires). De plus, cette équation est non linéaire (à cause du terme en v^2 apporté par $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}$).

On pourra souvent, lors de l'étude de petites perturbations (ondes...), négliger ces termes non linéaires.

II- Influence de la viscosité

1. Nombre de Reynolds

Nombre de Reynolds *définition*

si la dimension caractéristique du problème est L , la vitesse vaut approximativement V , on peut définir le nombre de Reynolds sans dimension :

$$Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} \approx \frac{\mu \frac{V^2}{L}}{\frac{\eta V}{L^2}} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu}$$

Il compare les effets inertiels aux effets de viscosité.

Exemples de nombres de Reynolds *tableau*

Le tableau 3 présente quelques exemples de nombres de Reynolds dans quelques cas.

✳ Interprétation du nombre de Reynolds *s'y retrouver*

On peut distinguer deux grands types d'écoulements, différenciés par la valeur de leur nombre de Reynolds :

- si $Re \ll 1$: la diffusion est prédominante (le temps de transport de la quantité de mouvement par diffusion est beaucoup plus court que par convection) ;
- si $Re \gg 1$: la convection est prédominante (le temps de transport de la quantité de mouvement par

exemple	Re
gros poisson dans l'eau	10^8
oiseau dans l'air	10^6
nageur dans l'eau	10^5
bille dans du miel	10^{-2}
spermatozoïde dans liquide séminal	10^{-3}
bactérie dans l'eau	10^{-5}
glacier	10^{-11}
manteau terrestre	10^{-20}

TABLE 3 – Quelques exemples de nombre de Reynolds

diffusion est beaucoup plus long que par convection).

Notons qu'un fluide parfait correspond à $Re = \infty$.

Influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement autour d'une sphère immobile schéma

La figure 3 représente l'écoulement autour d'une sphère immobile. On voit que celui-ci dépend fortement du nombre de Reynolds associé.

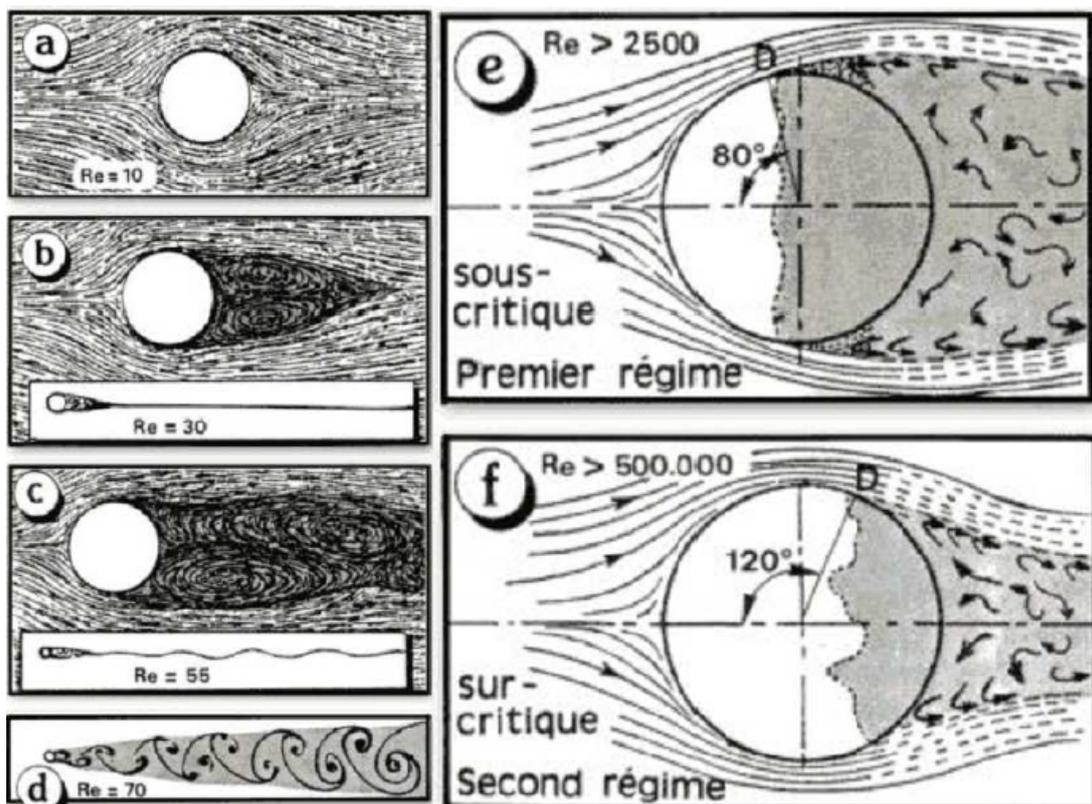


FIGURE 3 – Influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement autour d'une sphère immobile

écoulement autour d'une sphère immobile à faible nombre de Reynolds s'y retrouver

on observe un écoulement symétrique, permanent, rampant et réversible.

- $Re \approx 5$: la symétrie de l'écoulement est perdue lorsque le nombre de Reynolds augmente et devient supérieur à 5 : les lignes de courants sont différentes en aval et en amont, près de la sphère.

- $Re \approx 40$: quand le nombre de Reynolds atteint 40, on observe des tourbillons dit de "recirculation" en aval de la sphère. Les tourbillons apparaissent par paire et tournent en sens opposé. L'écoulement possède ainsi un caractère tourbillonnaire très marqué dans cette zone.
- $Re \approx 100$: lorsque le nombre de Reynolds augmente, ces tourbillons grandissent et atteignent une taille proche de celle de la sphère. Ils restent cependant stationnaires et cohérents.
- $Re \approx 450$: pour cette valeur de Re , les tourbillons se détachent périodiquement de la sphère. Il apparaît une allée de tourbillons en aval de la sphère. L'écoulement devient non permanent et a la même allure que pour cet écoulement autour d'un cylindre. On peut observer une allée de tourbillons dite de Van Karman.



écoulement autour d'une sphère immobile à grand nombre de Reynolds *s'y*

retrouver

pour des écoulements à grand nombres de Reynolds

$$Re > 10^3$$

l'écoulement derrière la sphère devient instable et non stationnaire.

L'écoulement présente deux parties aux comportements distincts : un sillage qui naît à la surface de la sphère (de taille caractéristique proche de celle de la sphère) et le reste de l'écoulement. Le sillage présente un caractère turbulent : le champ de vitesse est très variable dans le temps avec des structures à petite échelle.

- $Re = 15000$: la couche limite se sépare de la sphère à l'équateur et reste laminaire sur une longueur de l'ordre du rayon. L'écoulement devient instable et turbulent passé cette distance.
- $Re \approx 10^5$: pour ces nombres de Reynolds très élevés, la couche limite (qui était auparavant laminaire) devient turbulente. Le sillage diminue alors de taille.



Écoulement laminaire *définition*

Écoulements à bas nombre de Reynolds, où le terme diffusif prédomine :

$$Re < 2000$$



un écoulement laminaire. *schéma*

La figure 4 représente un exemple d'écoulement laminaire. Il s'agit d'un écoulement stable : les lignes de courants sont bien dessinées et évoluent lentement au cours du temps. Il peut être permanent ou non permanent, il peut présenter un caractère tourbillonnaire (un vortex dans un évier est un écoulement laminaire).

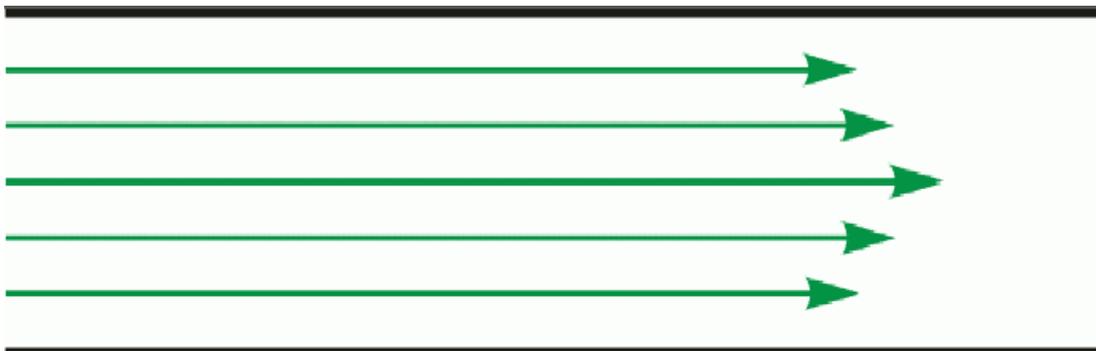


FIGURE 4 – un écoulement laminaire.

**remarque**

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'écoulement peut présenter un caractère tourbillonnaire, il reste cependant laminaire. Il peut se développer des structures tourbillonnaires cohérentes comme une allée de tourbillons dite allée de von Karman.

NB : la valeur critique de Re à partir de laquelle le caractère laminaire disparaît dépend fortement du profil de l'obstacle.

**3 Diffusion de la quantité de mouvement** *théorème*

la quantité de mouvement

$$\vec{p} = \iiint_V \mu \cdot \vec{v} \cdot d^3\tau$$

a une densité volumique

$$\mu \cdot \vec{v}$$

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit pour le volume V :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \iiint_V \frac{\partial(\mu \cdot \vec{v})}{\partial t} d^3\tau = \iiint_V \vec{f}_{cis} \cdot d^3\tau = \iiint_V \eta \cdot \Delta \vec{v} \cdot d^3\tau$$

car la totalité des autres forces (de pression et de pesanteur) a déjà été prise en compte pour un fluide statique (c'est la relation fondamentale de l'hydrostatique). \Rightarrow

si le fluide est incompressible, on aboutit à l'équation locale :

$$\frac{\partial(\mu \cdot \vec{v})}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \Delta(\mu \cdot \vec{v}) = \nu \cdot \Delta(\mu \cdot \vec{v})$$

qui est l'équation de diffusion de la densité volumique de quantité de mouvement (avec comme coefficient de diffusion, le coefficient de viscosité cinématique).

On retrouve encore la propension des forces de viscosité à homogénéiser la vitesse.

**Écoulement turbulent** *définition*

écoulement à fort nombre de Reynolds où la convection est prédominante

$$Re > 2000$$

**Écoulement turbulent** *schéma*

La figure 5 représente un exemple d'écoulement turbulent. Les écoulements turbulents présentent un caractère chaotique où le champ de vitesse possède une grande variabilité spatiale et temporelle. Les lignes de courant s'entremêlent : l'écoulement est instable. Le caractère tourbillonnaire de ce type d'écoulement est très prononcé.

**Caractéristiques des écoulements turbulents** *s'y retrouver*

Ces écoulements sont gouvernés par la convection et les termes non linéaires de l'accélération dominant. Ce type correspond également à un mélange important et à une dissipation d'énergie à différentes échelles (la viscosité jouant à nouveau un rôle dans les petites échelles).

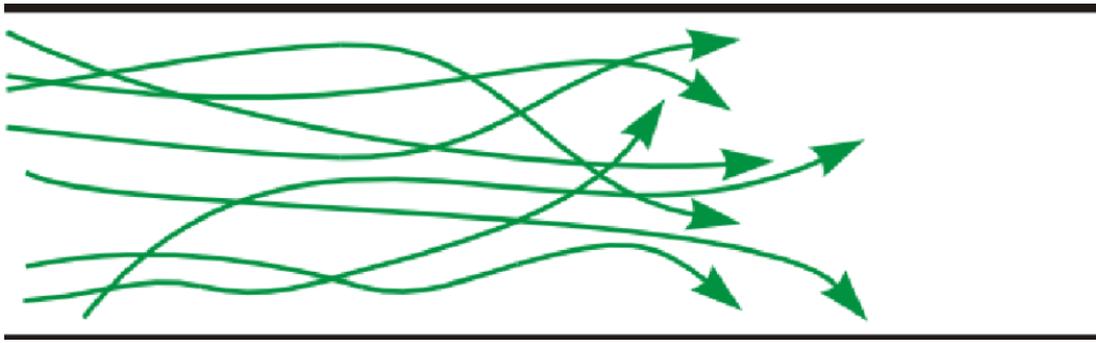


FIGURE 5 – Ecoulement turbulent



Transition entre écoulements laminaire et turbulent : vidéo

Reynolds réalise le premier, en 1883, une expérience dans laquelle on observe les lignes d'émission d'un colorant injecté dans un écoulement dans un long tube. Selon la vitesse de l'écoulement, Reynolds a pu observer différents comportements du fluide.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



Transition entre écoulement laminaire et turbulent dans l'espace photo



Humphrey Bogart- photographie de Karsh

Cette transition entre écoulement laminaire et turbulent peut intervenir spatialement : un écoulement peut être initialement laminaire (et tourbillonnaire) puis devenir turbulent, s'il s'agit par exemple d'un jet accéléré, le nombre de Reynolds augmentant le long de l'écoulement ce qui permet de comprendre ce passage d'un caractère laminaire à turbulent. On peut voir sur une photographie d'Humphrey Bogart (prise par Karsh) la transition entre un écoulement laminaire (proche de la cigarette) et un écoulement turbulent (loin de la cigarette).

2. Traînée

La portance et la traînée vidéo

l'écoulement du fluide crée sur un solide deux forces : la portance (perpendiculairement à l'écoulement) et la traînée (parallèlement à l'écoulement).

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

Maître-couple définition

on s'intéresse à un obstacle fixe plongé dans un fluide d'écoulement uniforme à l'infini

$$\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{u}_x$$

La projection de l'obstacle sur un plan $x = cste$ perpendiculaire à l'écoulement présente une surface d'aire S : c'est le maître-couple.

Force de traînée définition

la force de traînée est la composante parallèle à l'écoulement de la force ressentie par l'obstacle à cause de l'écoulement. Elle est de la forme :

$$\vec{F}_{traînee} = C_x \frac{\rho v_\infty^2 S}{2} \vec{u}_x$$

Le coefficient de traînée C_x est sans dimension. Il ne dépend que de la forme de l'obstacle et du nombre de Reynolds.

Traînée et maître couple schéma

La figure 6 représente l'écoulement du fluide qui n'est homogène qu'à l'infini. On se place dans le référentiel où le solide est fixe.

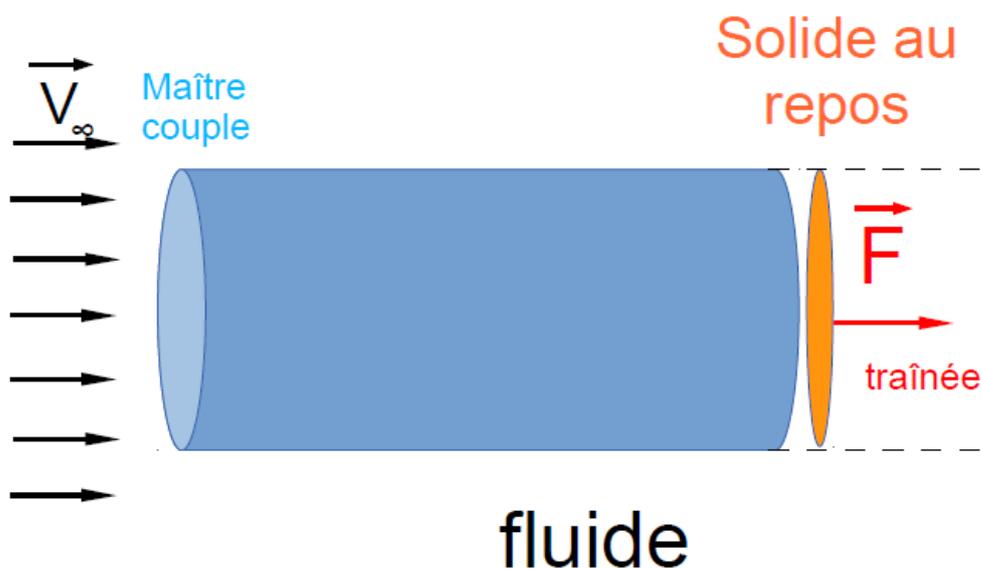


FIGURE 6 – Traînée et maître couple

👁 Influence de la forme de l'objet sur le coefficient de traînée *vidéo*

la traînée dépend de la forme de l'objet : un objet profilé présente un C_x plus faible qu'une surface plane.
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 $C_x = f(Re)$ pour différentes formes d'obstacles. *schéma*

La figure 7 représente l'influence de la forme de l'obstacle et du coefficient de Reynolds Re sur le coefficient de traînée C_x .

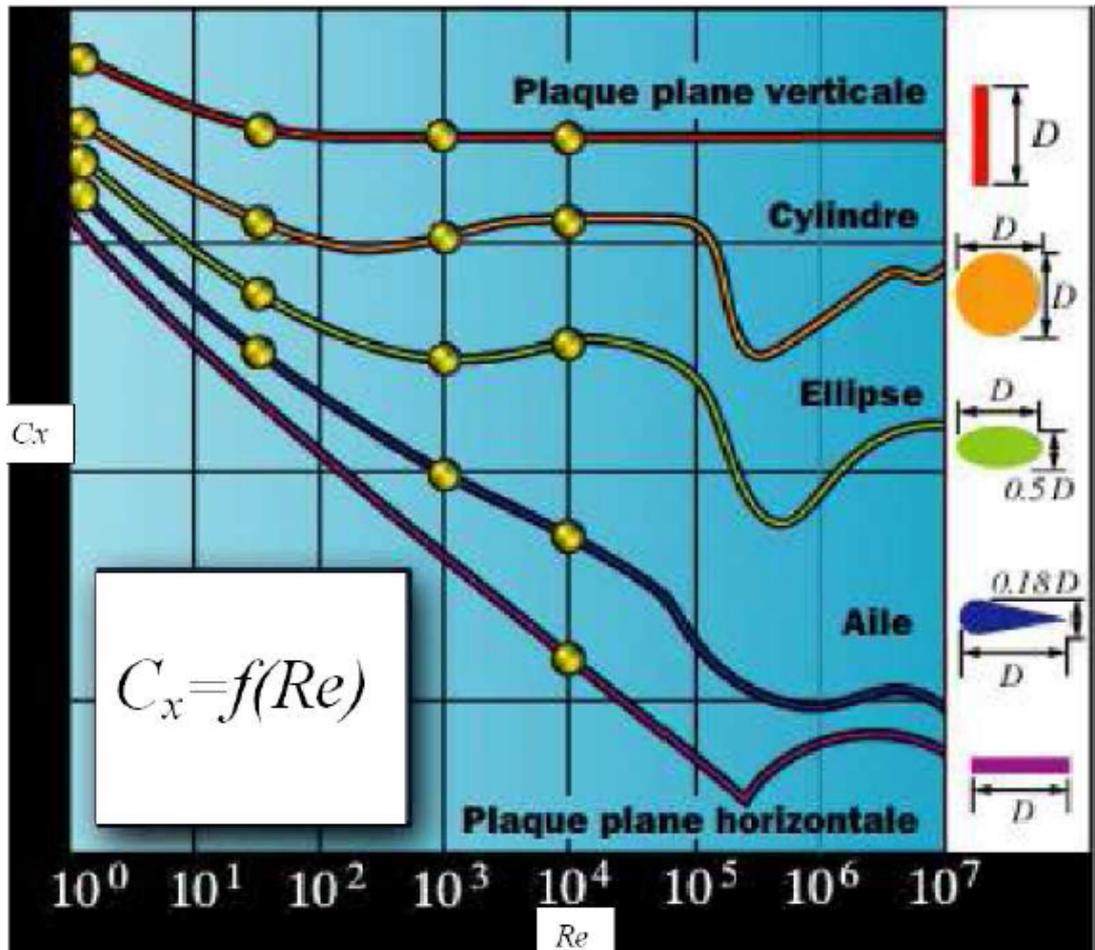


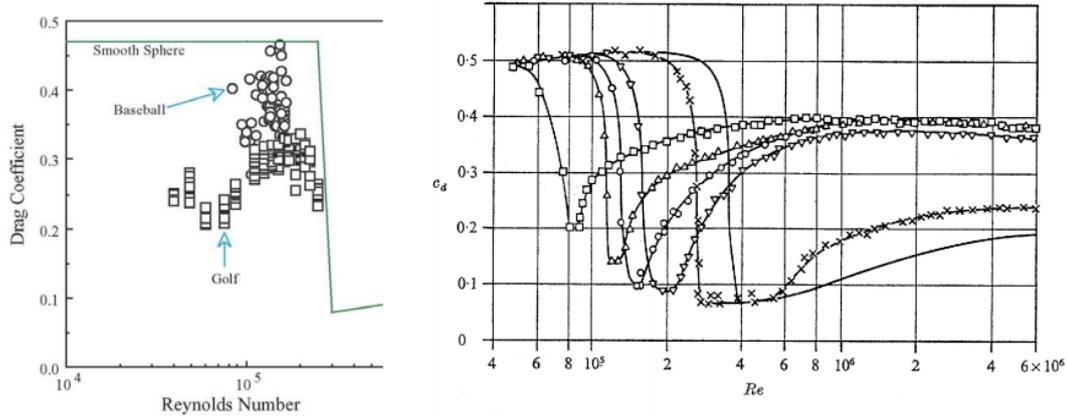
FIGURE 7 - $C_x = f(Re)$ pour différentes formes d'obstacles.

👁 Variation de la courbe $C_x = f(Re)$ pour des rugosités différentes. *schéma*

La figure 8 représente l'influence de la rugosité d'un obstacle et du coefficient de Reynolds Re sur le coefficient de traînée C_x .

✳ Force de traînée et force de frottement fluide *s'y retrouver*

- A forte vitesse (nombre de Reynolds grand), le coefficient de traînée C_x est à peu près constant, donc $\vec{F}_{traînée} = -\beta v^2 \vec{u}_x$ si $Re \gg 1$.
- A faible vitesse (nombre de Reynolds petit), le coefficient de traînée C_x est inversement proportionnel à la vitesse, donc $\vec{F}_{traînée} = -\lambda \vec{v}$ si $Re \ll 1$.

FIGURE 8 – Variation de la courbe $C_x = f(Re)$ pour des rugosités différentes.

4 Force de traînée exercée sur une sphère *exercice*

On s'intéresse à une sphère de rayon R qui se déplace dans un fluide de viscosité η avec la vitesse v . On suppose que le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour pouvoir considérer le coefficient de traînée comme $C_x = \frac{24}{Re}$. Déterminer la force de traînée exercée par le fluide sur la sphère.

$$F_x = \frac{C_x \mu \cdot v_\infty \cdot s}{2} = \frac{1}{2} \frac{24}{Re} \mu \cdot v^2 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \frac{24 \cdot \eta}{\mu \cdot 2 \cdot R \cdot v} \mu \cdot v^2 \cdot \pi \cdot R^2 = 6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot v$$

3. Couche limite

Notion de couche limite : s'y retrouver

l'écoulement à grand nombre de Reynolds autour d'un obstacle présente deux parties aux caractéristiques très différentes.

Près de l'obstacle, une couche limite apparaît où les phénomènes de viscosité dominent. Dans cette couche limite, l'écoulement prend un caractère tourbillonnaire marqué.

La vorticité ainsi crée peut être entra n e par convection dans le sillage de l'obstacle. La couche limite ne possède pas la même taille caractéristique que l'obstacle et présente donc un nombre de Reynolds Re_{CL} différente de celui de l'écoulement principal. On peut ainsi observer des couches limites laminaires ou turbulentes.

En dehors de cette couche limite, l'écoulement présente un caractère plus régulier et plus laminaire.

Influence de la couche limite sur le coefficient de traînée s'y retrouver

le caractère laminaire ou turbulent de la couche limite influe sur le coefficient de traînée. En effet, le passage d'une couche limite laminaire ($Re_{CL} > 1000$)   turbulente entraîne une réduction de la taille de la couche limite et donc une baisse du coefficient de traînée.

Le sillage turbulent est significativement plus petit que le sillage laminaire. La traînée chute. La surface d'une balle de golf est ainsi choisie pour que la couche limite soit turbulente.

La couche limite joue un rôle essentiel sur la valeur de la portance et de la traînée d'un obstacle. Les actions mécaniques exerc es par l'écoulement sont localis es sur la surface de l'obstacle : la présence d'une couche limite d coll e augmente fortement la traînée et diminue la portance. La forme de l'obstacle joue donc un rôle essentiel sur la valeur du C_x par le biais de la couche limite. La forme actuelle des ailes d'avion ou des voitures est  tudi e en soufflerie ou lors de simulations numériques pour limiter le décollement de la couche limite.

✳ **Décollement de la couche limite** *s'y retrouver*

on peut observer un décollement de la couche limite lorsque celle-ci atteint une taille de l'ordre de celle de l'obstacle.

Les deux zones «couche limite - sillage» / «écoulement hors couche limite» sont alors bien délimitées et présentent des trajectoires très différentes.

Pour certains profils (ou inclinaison) d'obstacle, on peut observer un décollement de la couche limite. On observe un décollement de la couche limite avec l'inclinaison de l'obstacle dans laquelle se développe un écoulement qui devient rapidement instable.

Le point de décollement de la couche limite peut évoluer avec le nombre de Reynolds, la couche limite décollant plus rapidement de l'obstacle lorsqu'elle est laminaire par exemple.

👁 **Décollement de la couche limite** *photo*

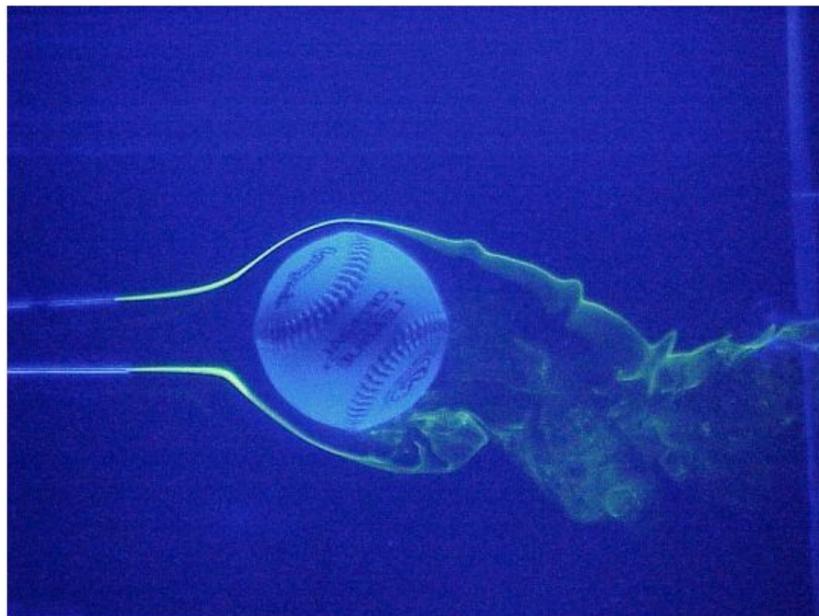


Figure 1 – Ce cliché a été obtenu en injectant du colorant en amont d'une balle de base-ball placée dans un écoulement d'eau de nombre de Reynolds 3400. On observe le décollement des deux filets de colorant sur les coutures de la balle. Celle-ci est également animée d'un mouvement de rotation à 0,5 t/s qui explique la déflexion des filets de colorant (Document J.M. Pallis et R.D. Mehta)

Ce cliché a été obtenu en injectant du colorant en amont d'une balle de base-ball placée dans un écoulement d'eau de nombre de Reynolds égal à 3400. On observe le décollement des deux filets de colorant sur les coutures de la balle. Celle-ci est également animée d'un mouvement de rotation à 0,5 tour/s qui explique la déflexion des filets de colorant (Document LM. Pallis et R.D. Mchta).

✳ **Modèle du fluide parfait et couche limite** *s'y retrouver*

dans le cas de la plupart des écoulements d'air autour d'obstacle ($L \approx 1m$, $u > 1m/s$, $\nu = 10^{-5}m^2/s$), la couche limite est de faible extension (à l'exception des cas de décollements).

Par exemple, pour une voiture : $L = 4m$, $U = 20m/s$, le nombre de Reynolds vaut $Re = 5.10^7$ et la couche limite a une taille $\delta = \frac{L}{Re_{CL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}} = 0,5mm$. Ainsi, les forces de viscosité sont prépondérantes dans une fine couche autour de la voiture et sont négligeables dans le reste de l'écoulement compte tenu de la valeur du nombre de Reynolds. On peut alors modéliser l'écoulement par un écoulement parfait.

**Écoulement parfait** *définition*

Un écoulement est parfait si tous les phénomènes diffusifs et irréversibles sont négligeables :

- la viscosité est alors nulle ;
- il n'y a pas d'échange d'énergie sous forme de chaleur entre particules ;
- chaque particule de fluide évolue de manière adiabatique et réversible : l'écoulement est isentropique.

**Couche limite et conditions aux limites** *s'y retrouver*

C'est au voisinage de l'obstacle que les deux modèles diffèrent. Le profil de vitesses correspondant à l'écoulement parfait et le profil de vitesses correspondant à l'écoulement réel sont identiques en dehors de la couche limite ce qui justifie bien l'utilisation du modèle de l'écoulement parfait.

**Résultante des forces de pression sur un obstacle** *s'y retrouver*

le modèle de l'écoulement parfait permet de déterminer facilement les champs de pression et pourrait donc permettre de déterminer la résultante des forces de pression, responsable de la portance des avions par exemple. Cependant, par définition, ces forces de pression s'exercent sur la paroi et donc dans la couche limite où le modèle de l'écoulement parfait ne fonctionne pas.

Dans la couche limite, la vitesse dépend principalement de la direction transverse à l'obstacle (ici notée y) et est dirigée tangentiellement à l'obstacle : l'accélération selon y est donc négligeable. L'influence du champ de pesanteur sur une hauteur de δ (couche limite d'épaisseur centimétrique) est quasi nulle. Ainsi, le gradient de pression selon y est nul : $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ dans la couche limite.

La pression le long de l'obstacle est donc la même que celle déterminée en dehors de la couche limite. Finalement, on peut utiliser l'expression du champ de pression calculée dans le cadre d'un écoulement parfait pour déterminer la résultante des forces de pression sur l'obstacle. Le modèle de l'écoulement parfait est ainsi parfaitement apte à décrire des écoulements à grand nombre de Reynolds hors de la couche limite.

III- Quelques écoulements visqueux

**Écoulement unidimensionnel d'un fluide visqueux entre un solide et un fluide parfait** *schéma*

La figure 9 représente un fluide visqueux au contact d'un solide (sur la surface xOz) et d'un fluide non visqueux (à l'interface $y = y_s$).

**Conditions aux limites sur un solide** *définition*

comme on le vérifie expérimentalement, la vitesse d'un fluide visqueux s'annule au contact d'un solide (sur la surface xOz) :

$$\vec{v}(y = 0) = \vec{v}_{solide} = \vec{0} \text{ si le solide est fixe dans le référentiel}$$

**remarque**

Pour un fluide parfait, seule la composante normale au solide s'annulait. Pour un fluide visqueux, la composante tangentielle de la vitesse est aussi nulle.

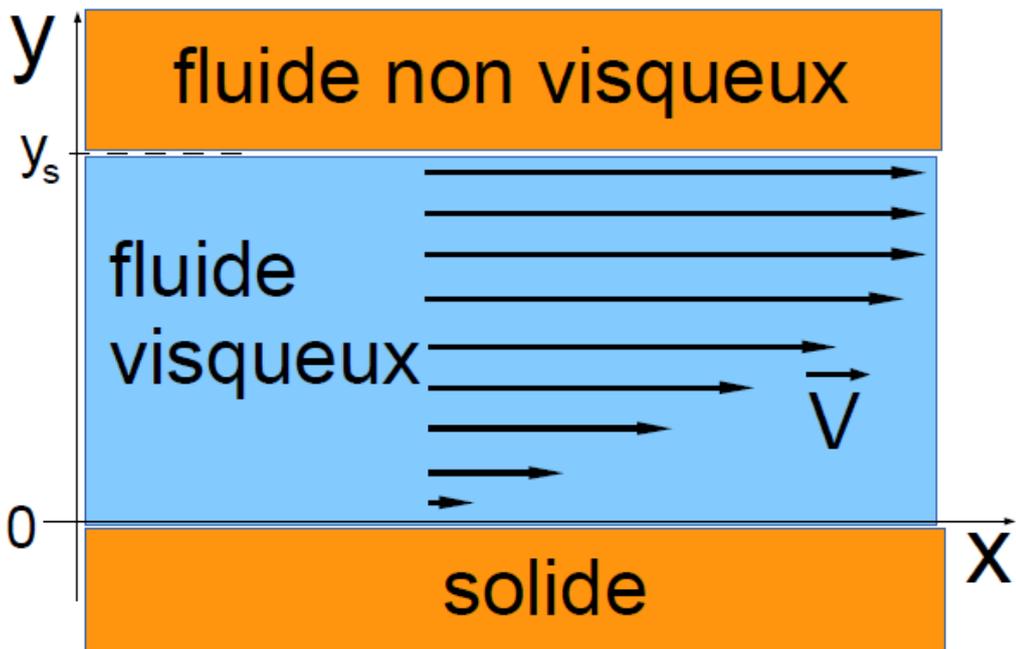


FIGURE 9 – Ecoulement unidimensionnel d’un fluide visqueux entre un solide et un fluide parfait

5 Conditions aux limites sur un fluide non visqueux *théorème*

La force qu’exerce le fluide 1 au dessous de l’interface ($y < y_s$) sur le fluide 2 au dessus de l’interface ($y > y_s$) est

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\eta_1 \cdot S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=y_s^-} \vec{u}_x$$

De même, la force qu’exerce le fluide 2 au dessus de l’interface ($y > y_s$) sur le fluide 1 au dessous de l’interface ($y < y_s$) est

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = +\eta_2 \cdot S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=y_s^+} \vec{u}_x$$

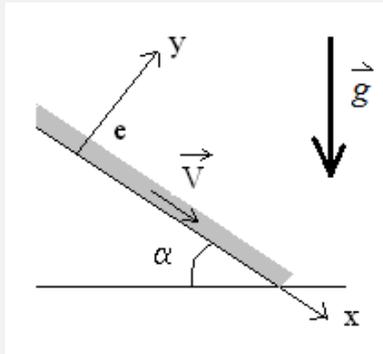
Comme $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$,

$$\eta_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=y_s^-} = \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=y_s^+}$$

Comme $\eta_2 = 0$, on trouve que \Rightarrow la dérivée de la vitesse d’un fluide visqueux suivant une direction orthogonale à l’interface $xO'z$ (en $y = y_s$) entre deux fluides s’annule :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=y_s^-} = 0$$

6 Ecoulement de Couette plan *exercice*



On s'intéresse à une couche mince de fluide incompressible (de viscosité dynamique η , de masse volumique μ) d'épaisseur e qui coule le long d'un plan incliné, dont la ligne de plus grande pente fait un angle α avec l'horizontale.

On considère que l'écoulement est permanent et que l'air est un fluide parfait de pression uniforme P_0 .

Le problème est supposé invariant dans la direction Oz et a une largeur L selon cette direction.

- Montrer que la vitesse ne dépend pas de x . En déduire que l'accélération d'une particule de fluide est nulle.
- Déterminer le champ de pression dans le fluide.
- Préciser les deux conditions limites de la vitesse et déterminer complètement le champ des vitesses.
- Déterminer la relation entre l'épaisseur e et le débit volumique D .

- L'écoulement est incompressible, donc $\text{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, donc $v(y)$ uniquement.
- L'équation de Navier Stokes est

$$\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \cdot \vec{g} + \eta \cdot \Delta \vec{v}$$

soit

$$\mu \left(v(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) v(y) \vec{u}_x = 0 = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \cdot \vec{g} + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

qui donne suivant \vec{u}_y

$$0 = -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \mu \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Cette dernière équation donne

$$P(x, y) = -\mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot y + f(x)$$

Or l'équation de Navier Stokes donne suivant \vec{u}_x

$$0 = -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \mu \cdot g \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \mu \cdot g \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}$$

On a donc $f'(x) = g(y) = \text{cste} = K$. Or $P(x, y = e) = P_0 = -\mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot e + K$ à la surface du fluide, donc :

$$P(x, y) = -\mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (y - e) + P_0$$

qui ne dépend bien sûr que de y .

L'équation de Navier Stokes projetée suivant \vec{u}_x donne

$$0 = -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \mu \cdot g \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta}$$

qu'on intègre une fois :

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y} = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} \cdot y + A$$

et une seconde fois :

$$v(y) = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} y^2 + A \cdot y + B$$

Les conditions aux limites donnent : $v(y = 0) = 0 = B$ et la continuité de la contrainte tangentielle (nulle à la surface avec l'air) : $\left(\frac{dv(y)}{dy} \right)_{y=e} = 0$ or $\left(\frac{dv(y)}{dy} \right) = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} y + A$, donc $A = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} e$. On trouve donc

$$\vec{v} = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot e - y) \cdot y \cdot \vec{u}_x$$

□ Débit volumique :

$$D = L \int_0^e \frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} (2e - y) \cdot y \, dy = \frac{L \mu g \sin \alpha}{2\eta} \left[2e \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^e = \frac{L \mu g \sin \alpha}{3\eta} e^3$$

✪ Exemple de l'écoulement de Poiseuille *s'y retrouver*

on s'intéresse à un fluide visqueux, en écoulement stationnaire dans un tuyau de petit diamètre ou entre deux plaques proches.

En première approximation, si le tuyau est cylindrique ou que les plaques sont parallèles, l'écoulement du fluide est partout parallèle aux parois.

Le frottement aux parois implique qu'aux échelles macroscopiques, la vitesse du fluide y est nulle (condition de non-glissement).

Par ailleurs, la pression ne varie pas dans l'épaisseur de l'écoulement.

👁 Profil de vitesse pour un écoulement de Poiseuille *schéma*

La figure 10 représente l'écoulement de Poiseuille. Il s'organise selon un champ de vitesse parabolique : vitesse nulle aux parois et maximale à mi-hauteur.

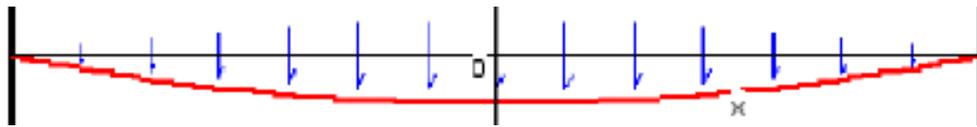


FIGURE 10 – Profil de vitesse pour un écoulement de Poiseuille

🔧 1) Modélisation de l'écoulement de Poiseuille cylindrique *exercice*

Un fluide visqueux de coefficient de viscosité dynamique η est compris dans un cylindre d'axe Oz , de rayon R . On se place dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

On suppose que le problème est à symétrie de révolution : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

On note P_A la pression en $z = z_A$ et $r = 0$. De même, $P_B = P(r = 0, z = L)$.

On suppose l'écoulement stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

On suppose l'écoulement incompressible (c'est un liquide) : $\text{div} \vec{v} = 0$.

On suppose l'écoulement unidimensionnel : $\vec{v} = v_z(r, z)$.

On néglige la pesanteur.

- 1) Montrer que la vitesse ne dépend pas de z .
- 2) En déduire que l'accélération d'une particule de fluide est nulle.
- 3) Déterminer le champ de pression dans le fluide.
- 4) Déterminer le champ des vitesses.

Correction :

1) L'écoulement est incompressible, donc $\text{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, donc $v(r)$ uniquement.

L'accélération d'une particule de fluide est

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(v_z(r) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z(r) \vec{u}_z = 0$$

2) L'équation de Navier Stokes est donc

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}P} + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}P} + \eta \Delta \vec{v}$$

qui donne suivant \vec{u}_r

$$0 = -\frac{\partial P(r, z)}{\partial r}$$

Donc $P(z)$ uniquement.

L'équation de Navier Stokes donne suivant \vec{u}_z

$$0 = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} + \eta \Delta v_z = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right)$$

Cette relation est du type : $f(z) = g(r) = cste = K$, donc

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{dP(z)}{dz} = K \Rightarrow P(z) = Kz + K'$$

Les conditions aux limites donnent :

$$K = \frac{P_B - P_A}{z_B - z_A}$$

3) Reprenons l'équation de Navier Stokes projetée :

$$0 = -\frac{\partial P(z)}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z(r)}{dr} \right) = \frac{K}{\eta} r$$

qu'on intègre une fois :

$$r \frac{dv_z(r)}{dr} = \frac{K}{2\eta} r^2 + A \Rightarrow \frac{dv_z(r)}{dr} = \frac{K}{2\eta} r + \frac{A}{r}$$

or r peut être nul, aussi, $A = 0$. On intègre une autre fois :

$$v_z(r) = \frac{K}{4\eta} r^2 + B$$

On utilise les conditions aux limites ($v_z(r = R) = 0$) sur les parois, afin de déterminer B

$$0 = \frac{K}{4\eta} R^2 + B$$

Donc :

$$v_z(r) = \frac{K}{4\eta} (r^2 - R^2) = \frac{P_B - P_A}{z_B - z_A} \frac{r^2 - R^2}{4\eta}$$

Éléments de correction :

$$v_z(r) = \frac{P_B - P_A}{z_B - z_A} \frac{r^2 - R^2}{4\eta}.$$

Les techniques mathématiques à connaître

Calcul des fonctions $f(x, y)$ dont on connaît les dérivées partielles

Dérivées partielles connues

On suppose que $df(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$, où

- la fonction $a(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ est connue ;
- la fonction $b(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ est connue ;
- la fonction $f(x, y)$ est à déterminer.

Première intégration

On suppose que $y = cste \Rightarrow df(x, y) = a(x, y) dx$, que l'on peut intégrer :

$$\int df(x, y) = \int a(x, y) dx \Rightarrow f(x, y) = A(x, y) + C(y)$$

avec

- $A(x, y)$, une primitive de $a(x, y)$ (par rapport à x) : $A(x, y) = \int a(x, y) dx$;
- $C(y)$, une constante pour x donc *a priori* une fonction de y (qu'il s'agit de déterminer).

Résultat intermédiaire

On a donc maintenant :

$$b(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (A(x, y) + C(y)) = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial C(y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial C(y)}{\partial y} = b(x, y) - \frac{\partial A(x, y)}{\partial y}$$

Comme $C(y)$ n'est fonction que de y , $dC(y) = b(x, y) dy - \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$.

Seconde intégration

Il s'agit maintenant d'intégrer cette précédente relation :

$$\int dC(y) = \int b(x, y) dy - \int \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$$

On trouve donc une primitive $C(y) = B(x, y) - D(x, y) + E$ où

- $B(x, y)$, une primitive de $b(x, y)$ (par rapport à y) : $B(x, y) = \int b(x, y) dy$;
- $D(x, y)$, une primitive de $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y}$ (par rapport à y) : $D(x, y) = \int \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$;
- E , une constante aussi bien pour x que pour y .

Conclusion

La fonction recherchée est $f(x, y) = A(x, y) + B(x, y) - D(x, y) + E$.

Technique à maîtriser

jeudi 16 novembre 2017

I- Les capacités exigibles

1. Forces de viscosité



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser l'expression fournie $\vec{dF} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$

Établir sur cet exemple l'expression $\vec{dF} = \eta \Delta \vec{v} d\tau$. Utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.

2. Champ de vitesse



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible.

3. Utilisation du nombre de Reynolds



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.

II- Méthodes

1. Forces de viscosité



A) Forces de cisaillement *méthode*

La force de viscosité exercée par la veine lente (pour $y < y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine rapide (pour $y > y_0$) est $F_x = -\eta \cdot S \frac{\partial v_x}{\partial y}$. La contrainte tangentielle σ exercée sur le plan solide

de cote $z = z_0$ est $\sigma = \eta \left(\frac{dv(z)}{dz} \right)_{z=z_0}$.

2. Champ de vitesse



B) Appliquer l'équation de Navier Stokes *méthode*

Les inconnues dans l'équation de Navier Stokes sont les trois composantes de la vitesse, la masse volumique et la pression, soit cinq inconnues scalaires. Si on ajoute à l'équation de Navier Stokes la relation locale de conservation de la masse, on dispose de quatre équations scalaires : il nous manque encore

une équation pour déterminer parfaitement les inconnues. Bien souvent, il s'agira de relier la masse volumique μ à la pression P , via une relation thermodynamique : $\mu = f(P)$. Citons par exemple : pour les liquides $\mu = \mu_0 = \text{cste}$ (fluide incompressible), pour les gaz $\chi = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P}$ (fluide compressible). Les solutions de l'équation de Navier Stokes devront bien entendu vérifier les conditions aux limites, aussi bien spatiales que temporelles : au contact d'un solide, la vitesse normale est nulle et la vitesse tangentielle du fluide égale à celle du solide, à l'interface entre deux fluides, la force de cisaillement est continue, donc la dérivée de la vitesse suivant la normale à l'interface est aussi continue. En projetant suivant une direction, on peut n'avoir plus qu'une équation en pression, qu'on intègre, grâce aux conditions aux limites. La projection suivant une direction orthogonale permet de trouver la vitesse, encore grâce aux conditions aux limites : $\vec{v} = \vec{0}$ au contact du solide dans le référentiel du solide.

3. Utilisation du nombre de Reynolds

C) Nombre de Reynolds *méthode*

Il s'agit de faire un raisonnement sur des ordres de grandeurs. Par exemple, avec le nombre de Reynolds $Re = \frac{\mu \cdot V \cdot L}{\eta} = \frac{V \cdot L}{\nu}$ il y a deux cas bien marqués : si $Re \ll 1$: la diffusion est prédominante (le temps de transport de la quantité de mouvement par diffusion est beaucoup plus court que par convection) ; si $Re \gg 1$: la convection est prédominante (le temps de transport de la quantité de mouvement par diffusion est beaucoup plus long que par convection). On parlera d'écoulement laminaire si $Re < 2000$.

D) Forces de traînée *méthode*

La force de traînée est de la forme : $\vec{F}_{traînée} = C_x \frac{\mu \cdot v_{éc}^2 \cdot S}{2} \vec{u}_x$. Suivant la valeur du nombre de Reynolds, on discerne trois comportements : si $Re < 1$, $C_x = \frac{24}{Re}$, si $Re \in [10^3; 10^5]$, $C_x \approx \text{cst}$, autour de $Re = 5 \cdot 10^5$, C_x chute brusquement.

III- Exercices

1. Forces de viscosité

1.1) Contrainte exercée par un ruissellement laminaire

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale sur une hauteur δ constante. On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot \delta - z) \cdot z \cdot \vec{u}_x$$

où \vec{u}_z est orthogonal à l'écoulement (et donc au plan incliné), orienté depuis le plan vers le liquide.

- 1) Quelle est la contrainte tangentielle σ exercée sur le plan incliné ?

- 1) La contrainte tangentielle σ exercée sur le plan incliné est $\sigma = \eta \left(\frac{dv(z)}{dz} \right)_{z=0}$ or

$$\left(\frac{dv(z)}{dz} \right) = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot \delta - 2 \cdot z)$$

soit

$$\sigma = \mu \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \delta$$

qui ne dépend pas de la viscosité du fluide, mais uniquement de la pesanteur qui met en mouvement le fluide.

1.2) Contrainte exercée par le déplacement d'une plaque dans un fluide

Soient deux grandes plaques parallèles, l'espace entre les plaques étant rempli d'un fluide donné. La plaque inférieure (en $y = 0$) est fixe, tandis que la plaque supérieure (en $y = \Delta y$) est entraînée par une force constante $\vec{F}_0 = F_0 \cdot \vec{u}_x$, et on constate qu'elle est animée d'une vitesse constante $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_x$.

Il s'exerce donc sur la plaque une force, dirigée parallèlement à la plaque et opposée à \vec{F}_0 : c'est la force de viscosité, notée \vec{F} .

Le fluide en contact avec la plaque supérieure va y adhérer et va donc être animé de la vitesse $\vec{V} = V \cdot \vec{u}_x$, tandis que le fluide en contact avec la plaque fixe aura une vitesse nulle. La vitesse d'écoulement au sein du fluide est en tout point parallèle à l'axe Ox , mais son module dépend de la cote y : $\vec{v} = v_x(y) \cdot \vec{u}_x$.

Si la distance y et la vitesse V ne sont pas trop grandes, on constate que le profil des vitesses est une droite.

1) Exprimer $\frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Les expériences ont d'autre part montré que la force F_0 à exercer sur la plaque supérieure pour l'entraîner à la vitesse constante V , varie proportionnellement avec la surface de la plaque, avec la vitesse V et inversement avec Δy .

2) Déterminer la force de viscosité exercée par la veine lente (pour $y < y_0$) sur la surface S de cote y_0 qui la sépare de la veine rapide (pour $y > y_0$).

1)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V}{\Delta y}$$

2)

$$F_x = -\eta \cdot S \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\eta \cdot S \frac{V}{\Delta y}$$

1.3) Contrainte exercée par un écoulement de Poiseuille cylindrique

On considère un écoulement de Poiseuille permanent dans un tube cylindrique d'axe Oz , de section circulaire et de rayon R :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Déterminer la projection des forces de cisaillement.

La projection des forces de cisaillement est :

$$\sigma(r) = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz}$$

2. Champ de vitesse

2.4) Ecoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 et R_2 , tournant autour de leur axe commun (Oz) aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left(A \cdot r + \frac{B}{r}\right) \cdot \vec{u}_\theta$$

1) Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres en R_1 et R_2 .

2) Que se passe-t-il dans le cas où $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$?

1) $A \cdot R_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 \cdot R_1$ et $A \cdot R_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 \cdot R_2$ entraînent :

$$\begin{cases} A = \frac{\Omega_2 \cdot R_2^2 - \Omega_1 \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) \cdot R_2^2 \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

2) Si $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, on trouve $A = \Omega$ et $B = 0$, soit :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \Omega.r.\vec{u}_\theta$$

Il y a donc rotation "en bloc" (comme un solide) du fluide.

2.5) Ecoulement au dessus d'un plan oscillant

L'écoulement entre un plan oscillant ($y = 0$) et l'infini ($y \rightarrow +\infty$) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = A.e^{-k.y}.\cos(\omega.t - k.y).\vec{u}_x$$

Vérifier que les conditions aux limites sont correctes.

On vérifie que les conditions aux limites sont correctes :

$$\begin{cases} \vec{v}(y = 0) = A.\cos(\omega.t).\vec{u}_x \\ \vec{v}(y \rightarrow +\infty) = \vec{0} \end{cases}$$

2.6) Loi de Darcy

Une paroi poreuse est modélisée par une couche de matière d'épaisseur ℓ percée de N tubes cylindriques horizontaux, de rayon a et de longueur ℓ ($a \ll \ell$), par unité de surface. Il existe, au sein du liquide, une différence de pression Δp entre les deux faces de la paroi poreuse. On ne tient pas compte du champ de pesanteur.

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien, incompressible, à travers cette paroi est caractérisé par une loi de Poiseuille cylindrique dans chaque tube, avec un champ des vitesses $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ tel que :

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}f(r)$$

où $f(r) = r^2 + B.r + C$ est une fonction polynomiale d'ordre deux de la distance r à l'axe du tube.

Déterminer $v(r)$.

1) En $r = a$, la vitesse s'annule sur la paroi du tube :

$$v(r = a) = 0$$

La vitesse est maximale sur l'axe du tube (en $r = 0$) :

$$\left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_{r=0} = \frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}(-2.r) = 0$$

Donc

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4.\eta.\ell}(a^2 - r^2)$$

2.7) Ecoulement de Poiseuille plan

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule entre deux plans parallèles éloignés de δ suivant l'axe Oz . On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est de la forme :

$$\vec{v} = v(z).\vec{u}_x$$

où \vec{u}_x est parallèle aux plans, orienté dans le sens de l'écoulement. On négligera l'effet de la pesanteur devant celui des forces de pression.

Déterminer $v(z)$.

NB : L'écoulement est incompressible, donc $\text{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, donc $v(z)$ uniquement.
L'équation de Navier Stokes est

$$\mu \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \cdot \Delta \vec{v}$$

soit

$$\mu \left(v(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) v(z) \vec{u}_x = 0 = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \vec{u}_x$$

qui donne suivant \vec{u}_z

$$0 = -\frac{\partial P(x, z)}{\partial z}$$

Cette dernière équation donne

$$P(x, z) = f(x)$$

L'équation de Navier Stokes projetée suivant \vec{u}_x donne

$$0 = -\frac{\partial P(x)}{\partial x} + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

qu'on intègre une fois :

$$\frac{\partial v(z)}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} \cdot z + A$$

et une seconde fois :

$$v(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} z^2 + A \cdot z + B$$

Les conditions aux limites donnent : $v(z=0) = 0 = B$ et $v(z=\delta) = 0 = \frac{1}{2\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} \delta^2 + A \cdot \delta$. On trouve donc

$$\vec{v} = \frac{-1}{2\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} (\delta - z) \cdot z \cdot \vec{u}_x$$

2.8) Ecoulement de Poiseuille cylindrique

On considère l'écoulement permanent d'un fluide de viscosité η (écoulement de Poiseuille) dans un tube cylindrique d'axe Oz , de section circulaire et de rayon R .

On admet que la vitesse est $\vec{v}(r, z, \theta) = v_z(r) \vec{u}_z$; que la pression ne dépend que de z et que la variation de la pression est constante le long de l'axe z . On négligera la pesanteur.

Déterminer la vitesse du fluide.

On applique la loi de Navier-stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} + \nu \cdot \Delta \vec{v}$$

or $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (stationnaire), $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{u}_r$, $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = -\frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{u}_\theta$, donc $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = -v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{u}_r$. Donc le membre de gauche est nul.

Enfin, \vec{g} négligé, $\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \frac{dP}{dz} \vec{u}_z$ et $\Delta v_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right)$. Donc l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dz}$$

qu'on intègre une fois :

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{dP}{dz} + A$$

qu'on intègre encore une fois :

$$v_z = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} + A \cdot \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + B$$

En $r = 0$, la vitesse ne serait pas définie si A était non nulle. Compte tenu de la condition de non-glissement ($v(R) = 0$), on trouve :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

La vitesse est plus importante au centre du conduit :

$$v_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz}$$

malgré le signe négatif, étant donné que la vitesse est orientée à l'encontre du gradient de pression. Écoulement dans le sens positif pour un gradient négatif...

2.9) Champ des vitesses dans un ruissellement laminaire

Un liquide - assimilé à un fluide visqueux, newtonien, incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η s'écoule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale sur une hauteur δ constante. On étudie l'écoulement en régime stationnaire. On admet que le champ de vitesse est de la forme :

$$\vec{v} = v(x, z) \cdot \vec{u}_x$$

où \vec{u}_x est parallèle au plan incliné, orienté dans le sens de l'écoulement et \vec{u}_z est orthogonal à l'écoulement (et donc au plan incliné), orienté depuis le plan vers le liquide.

- 1) Montrer qu'alors $v(z)$ uniquement.
- 2) Déterminer le champ de pression $P(x, z)$ dans le fluide.
- 3) Déterminer $v(z)$.

- 1) L'écoulement est incompressible, donc $\text{div}\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, donc $v(z)$ uniquement.
- 2) L'équation de Navier Stokes est

$$\mu \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \cdot \vec{g} + \eta \cdot \Delta \vec{v}$$

soit

$$\mu \left(v(z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) v(z) \vec{u}_x = 0 = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \mu \cdot \vec{g} + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \vec{u}_x$$

qui donne suivant \vec{u}_z

$$0 = -\frac{\partial P(x, z)}{\partial z} - \mu \cdot g \cdot \cos \alpha$$

Cette dernière équation donne

$$P(x, z) = -\mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot z + f(x)$$

Or $P(x, z = \delta) = P_{atm}$ à la surface du fluide, donc :

$$P(x, z) = -\mu \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (z - \delta) + P_{atm}$$

qui ne dépend que de z .

- 3) L'équation de Navier Stokes projetée suivant \vec{u}_x donne

$$0 = -\frac{\partial P(x, z)}{\partial x} + \mu \cdot g \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$$

soit

$$\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta}$$

qu'on intègre une fois :

$$\frac{\partial v(z)}{\partial z} = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} \cdot z + A$$

et une seconde fois :

$$v(z) = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} z^2 + A \cdot z + B$$

Les conditions aux limites donnent : $v(z = 0) = 0 = B$ et la continuité de la contrainte tangentielle (nulle à la surface avec l'air) : $\left(\frac{dv(z)}{dz} \right)_{z=\delta} = 0$ or $\left(\frac{dv(z)}{dz} \right) = -\frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} z + A$, donc $A = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\eta} \delta$. On trouve donc

$$\vec{v} = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \eta} (2 \cdot \delta - z) \cdot z \cdot \vec{u}_x$$

2.10) Champ des vitesses dans un amortisseur hydraulique

On schématise un amortisseur hydraulique par un cylindre de rayon R , dans lequel peut se déplacer un piston de longueur ℓ et de rayon $R' = R - a$ (où $a \ll R$). Le cylindre contient une huile incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η , qui peut s'écouler entre le piston et la paroi du cylindre. On néglige les effets de la pesanteur. Le champ de vitesse $v_z(r)$ du fluide entre le piston et la paroi est assimilable à un champ $v_z(x)$ puisque $a \ll R$.

- 1) Exprimer l'équation différentielle suivie par $v_z(x)$.
- 2) Trouver $v_z(x)$ dans le référentiel du cylindre (le piston se déplace avec la vitesse v_p).

1) Equation de Navier Stokes : $\vec{0} = -\overrightarrow{grad}p + \eta\Delta\vec{v}$. La pression ne dépend que de z , aussi,

$$\eta \frac{d^2 v_z}{dx^2} = \frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{\ell} = \frac{-F}{\ell \cdot \pi \cdot R^2}$$

si l'opérateur appuie de bas en haut (la vitesse du piston sera alors $v_z = +v_p$).

2) On intègre une fois :

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{-F}{\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} \cdot x + A$$

et une deuxième fois :

$$v_z = \frac{-F}{2\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} \cdot x^2 + A \cdot x + B$$

Les conditions aux limites sont : $v_z(x=0) = 0$ (le long de la paroi du cylindre) et $v_z(x=a) = v_p$ (le long de la paroi du piston). Donc : $B = 0$ et $\frac{-F}{2\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} \cdot a^2 + A \cdot a = v_p$, ainsi

$$v_z = \frac{-F}{2\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} (x-a) \cdot x - \frac{v_p}{a} x$$

3. Utilisation du nombre de Reynolds

3.11) Nombre de Reynolds associé à une voiture

On s'intéresse à une voiture qui se déplace dans l'air de viscosité $\eta = 18 \cdot 10^{-6} \text{Pl}$ avec la vitesse $v = 100 \text{km/h}$. Calculer le nombre de Reynolds. Qualifier l'écoulement.

$$Re = \frac{\mu \cdot L \cdot v}{\eta} = \frac{1,3 \cdot 1,100}{3,6 \cdot 18 \cdot 10^{-6}} = 2,10^6$$

L'écoulement est turbulent.

3.12) Nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'eau d'un robinet

On s'intéresse à un tuyau d'eau de diamètre intérieur $d = 12 \text{mm}$.

Justifier le fait que pour un débit volumique $D_1 = 0,2 \text{L/min}$, l'écoulement est laminaire et pour un débit $D_2 = 10 \text{L/min}$, l'écoulement est turbulent.

La vitesse d'écoulement est telle que $D = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, donc

$$Re = \frac{\mu \cdot d \cdot 4 \cdot D}{\eta \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot \mu \cdot D}{\eta \cdot \pi \cdot d}$$

Pour D_1 , $Re_1 = 3 \cdot 10^2 < 2000$, l'écoulement est laminaire et pour D_2 , $Re_2 = 2 \cdot 10^5 > 2000$, l'écoulement est turbulent.

3.13) Nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'huile sur un plan incliné

On s'intéresse à une mince couche d'huile (de viscosité $\eta = 1,0Pl$, masse volumique $\mu = 1,0 \cdot 10^3 kg/m^3$) d'épaisseur $e = 1mm$, qui coule le long d'un plan zOx incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$. Son champ des vitesses est de la forme

$$\vec{v} = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2\eta} y \cdot (2e - y) \cdot \vec{u}_x$$

L'écoulement est-il laminaire?

On prendra $V = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2\eta} e \cdot (2e - e) = \frac{\mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{2\eta} e^2$, $Re = \frac{\mu \cdot V \cdot L}{\eta} = 2 \cdot 10^{-2}$ donc l'écoulement est laminaire.

3.14) Nombre de Rossby dans l'atmosphère

1) Ecrire l'équation d'Euler dans le référentiel terrestre non galiléen.

On note U un ordre de grandeur caractéristique des vitesses de l'écoulement, L une dimension horizontale caractéristique de celui-ci. On appelle nombre de Rossby (noté R_o) d'un écoulement le rapport sans dimension entre le terme d'accélération et le terme lié à la force de Coriolis dans la précédente équation.

2) Évaluer R_o pour un écoulement atmosphérique typique pour lequel $U = 10m \cdot s^{-1}$ et $L = 1000km$. Commenter le résultat obtenu.

3) Même chose pour un écoulement d'air dans une pièce : $U = 1m \cdot s^{-1}$ et $L = 10m$.

1) L'équation d'Euler dans le référentiel terrestre non galiléen est $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$ et puisque l'écoulement est stationnaire, $\rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{grad}(p) - 2 \cdot \rho \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, ce qui donne en ordre de grandeur le nombre de Rossby :

$$R_o = \frac{\rho \frac{U^2}{L}}{2 \cdot \rho \cdot \Omega \cdot U} = \frac{U}{2 \cdot L \cdot \Omega}$$

2) $R_o \approx \frac{U}{L \cdot \Omega} = 0,14$ de sorte que dans les trois termes de l'équation dynamique, le terme d'accélération est nettement plus petit que les deux autres, qui s'équilibrent donc à peu près :

$$\overrightarrow{grad}(p) \approx -2 \cdot \rho \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

3) $R_o \approx \frac{U}{L \cdot \Omega} = 1375$: les forces de Coriolis sont négligeables.

3.15) Forces de viscosité dans un amortisseur hydraulique

On schématise un amortisseur hydraulique par un cylindre de rayon R , dans lequel peut se déplacer un piston de longueur ℓ et de rayon $R' = R - a$ (où $a \ll R$). Le cylindre contient une huile incompressible, de masse volumique μ et de viscosité dynamique η , qui peut s'écouler entre le piston et la paroi du cylindre. On néglige les effets de la pesanteur. Le champ de vitesse $v_z(r)$ du fluide entre le piston et la paroi est assimilable à un champ $v_z(x)$ puisque $a \ll R$. On admet que $v_z = \frac{-F}{2\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} (x - a) \cdot x - \frac{v_p}{a} x$, où v_p est la vitesse du piston et F la force exercée par l'opérateur.

1) Exprimer le débit volumique D_v :

1.a) à partir du champ de vitesse $v_z(x)$

1.b) grâce à une autre relation.

2) En déduire la relation qui lie la vitesse v_p et F .

1) Débit volumique D_v :

1.a) à partir du champ de vitesse $v_z(x)$:

$$D_v = 2\pi \cdot R \cdot \int_{x=0}^{x=a} v_z(x) \cdot dx = \pi \cdot R \cdot a \left[\frac{F \cdot a^2}{6\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} - v_p \right]$$

1.b) grâce à une autre relation : on déplace un volume $V = v_p \cdot \pi \cdot R^2 \cdot dt$, donc

$$D_v = v_p \cdot \pi \cdot R^2$$

2) Conclusion :

$$v_p = \frac{a}{R} \left[\frac{F \cdot a^2}{6\eta \cdot \ell \cdot \pi \cdot R^2} - v_p \right]$$

soit

$$F \approx 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \ell \cdot v_p \frac{R^3}{a^3}$$

4. Techniques mathématiques - Calcul des fonctions $f(x, y)$ dont on connaît les dérivées partielles

4.16) Calcul d'une fonction $f(x, y)$ telle que $df = a dx + b dy$

1) Déterminer la fonction f dont la différentielle est $df = a dx + b dy$ où a et b sont des constantes.

1) $df = a dx + b dy$ où a et b sont des constantes devient si $y = cste$:

$$df = a dx \Rightarrow f(x, y) = ax + g(y)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dg}{dy} = b \Rightarrow \frac{dg}{dy} = b$$

qu'on intègre

$$g(y) = by + C$$

Donc $f(x, y) = ax + by + C$

4.17) Calcul d'une fonction $f(x, y)$ telle que $df = y dx + x dy$

1) Déterminer la fonction f dont la différentielle est $df = y dx + x dy$.

1) $df = y dx + x dy$ devient si $y = cste$:

$$df = y dx \Rightarrow f(x, y) = \frac{xy}{2} + g(y)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2} + \frac{dg}{dy} = x \Rightarrow \frac{dg}{dy} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

qu'on intègre

$$g(y) = \frac{yx}{2} + C$$

Donc $f(x, y) = \frac{xy}{2} + \frac{yx}{2} + C = xy + C$.

4.18) Calcul d'une fonction $f(x, y)$ telle que $df = (y^2 - 3)x dx + (1 + x^2)y dy$

1) Déterminer la fonction f dont la différentielle est $df = (y^2 - 3)x dx + (1 + x^2)y dy$.

1) $df = (y^2 - 3)x dx + (1 + x^2)y dy$ devient si $y = cste$:

$$df = (y^2 - 3)x dx \Rightarrow f(x, y) = (y^2 - 3) \frac{x^2}{2} + g(y)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - 3) \frac{x^2}{2} + \frac{dg}{dy} = (1 + x^2)y \Rightarrow \frac{dg}{dy} = y - \frac{3}{2}x^2$$

qu'on intègre

$$g(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}x^2 y + C$$

Donc $f(x, y) = (y^2 - 3) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}x^2 y + C = \frac{y^2 x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$

4.19) Calcul d'une fonction $f(x, y)$ telle que $df = y^2 x dx + x^2 y dy$ 1) Déterminer la fonction f dont la différentielle est $df = y^2 x dx + x^2 y dy$.1) Si $y = cste$,

$$df = y^2 x dx + x^2 y dy = y^2 x dx \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + g(y)$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y + \frac{dg}{dy} = x^2 y \Rightarrow \frac{dg}{dy} = -x^2 y + x^2 y = 0 \Rightarrow g = C$$

$$\text{Donc } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} + C.$$

4.20) Calcul d'une fonction $f(x, y)$ telle que $df = 2yx dx + x^2 dy$ 1) Déterminer la fonction f dont la différentielle est $df = 2yx dx + x^2 dy$.1) Si $y = cste$,

$$df = 2yx dx + x^2 dy = 2yx dx \Rightarrow f(x, y) = x^2 y + g(y)$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{dg}{dy} = x^2 \Rightarrow \frac{dg}{dy} = x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

$$\text{Donc } f(x, y) = x^2 y + C.$$

Travaux dirigés

vendredi 17 novembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

L'écoulement de Poiseuille

Site de plomberie disponible à l'adresse :

<http://www.digitec-energies.com/plomberie.php>

Comment choisir le diamètre d'un tuyau d'eau ?

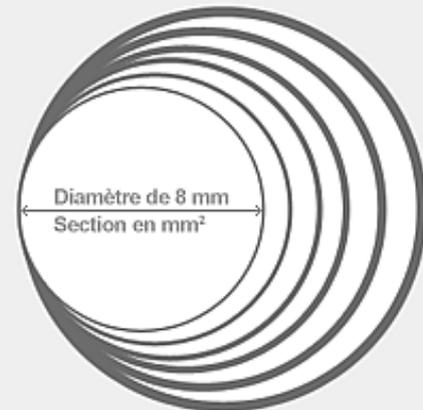
Dans une installation, chaque poste de puisage ouvert (robinet, machine à laver, arroseur...) utilise une partie de la quantité totale qui alimente l'installation. Entre deux tuyaux, c'est le plus gros qui a le plus important débit. Dans une maison, tous les postes de puisage n'ont pas besoin du même débit. Un robinet de baignoire, par exemple, doit avoir un plus gros débit qu'un robinet de lavabo et une chasse d'eau n'a besoin que d'un faible débit.

DIAMETRE ET SECTION

Le débit est proportionnel à la section.
Attention à ne pas confondre *section* et *diamètre*
comme le montre le tableau ci-dessous :

Diamètre en mm	8	10	12	14	16	18
Section en mm ²	50	78,5	113	154	201	254

Un tube de 14 mm de diamètre
a un débit 3 fois supérieur à celui d'un tube de 8 mm
alors que son diamètre n'est même pas doublé



Le débit étant proportionnel à la section de la canalisation, on prévoit généralement les diamètres intérieurs suivants :

- Canalisation d'arrivée : 16 ou 18 mm
- Évier ou Baignoire : 12 mm
- Lavabo, Bidet, Douche, Lave-vaisselle, Lave-linge : 10 mm
- Chauffe-eau, Cuisine avec lave-vaisselle, Salle de bains avec douche, Poste d'arrosage : 14 mm
- W.C., Lave-mains : 8 mm

Enoncé

Un tuyau horizontal d'axe Oz (on négligera la pesanteur), de rayon R est utilisé pour porter d'un endroit en un autre de l'eau (de masse volumique $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$).

On se place dans un repère cylindrique d'axe (Oz).

La pression ne dépend que de z . La variation de pression par unité de longueur notée $\frac{\Delta P}{\Delta z}$ dans le tuyau est constante.

La vitesse du fluide est dirigée suivant \vec{u}_z et ne dépend que de r .

On rappelle la relation de Navier Stokes :

$$\mu \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \cdot \Delta \vec{v}$$

On supposera le régime stationnaire et laminaire.

Enfin, le laplacien scalaire en cylindrique d'une fonction ne dépendant que de r vaut

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

- 1) Par combien faut-il multiplier la valeur du rayon d'un tuyau pour en tripler le débit ?

Correction

1) Navier Stokes se réécrit :

$$\eta \cdot \Delta \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

L'intégration montre que le champ de vitesse est parabolique : $v(r) = \text{const} + \frac{r^2}{4\eta} \frac{dp}{dz}$
Compte tenu de la condition de non-glissement ($v(R) = 0$), on trouve :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

La vitesse est plus importante au centre du conduit :

$$v_{\text{max}} = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta z}$$

malgré le signe négatif, étant donné que la vitesse est orientée à l'encontre du gradient de pression. Écoulement dans le sens positif pour un gradient négatif..

On ne peut pas calculer D_m par une formule du style $D_m = \mu \cdot S \cdot v$ car la vitesse n'est pas uniforme. Découpons un section de la canalisation en couronnes entre les rayons r et $r + dr$, de surface $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ et intégrons les débits élémentaires $D_m = \int_{r=0}^{r=R} \mu \cdot v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$. On trouve :

$$D_m = \frac{\mu \cdot \Delta p \cdot S^2}{8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L}$$

Par analogie entre débit de masse et débit de charges, différence de pression et de potentiel, la loi d'Ohm $I = \frac{\Delta V}{R}$ permet de définir une résistance hydraulique

$$R_h = \frac{8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L}{\mu \cdot S^2}$$

Si l'on essaie de pousser plus loin, on voit que l'analogie a ses limites : les résistances électrique et hydraulique sont bien toutes deux proportionnelles à L , mais la première est inversement proportionnelle à S , le seconde à S^2 .

On passe d'une canalisation de rayon intérieur R à une de rayon R' pour diviser la résistance d'un facteur

$$\frac{R_h}{R'_h} = \left(\frac{R'}{R}\right)^4 \approx 3$$

on doit avoir $\frac{R'}{R} \approx 1,3$, ce qui est proche de ce que déclare le document : $\frac{14}{8} \approx 1,75$.

Devoir non surveillé

vendredi 17 novembre 2017

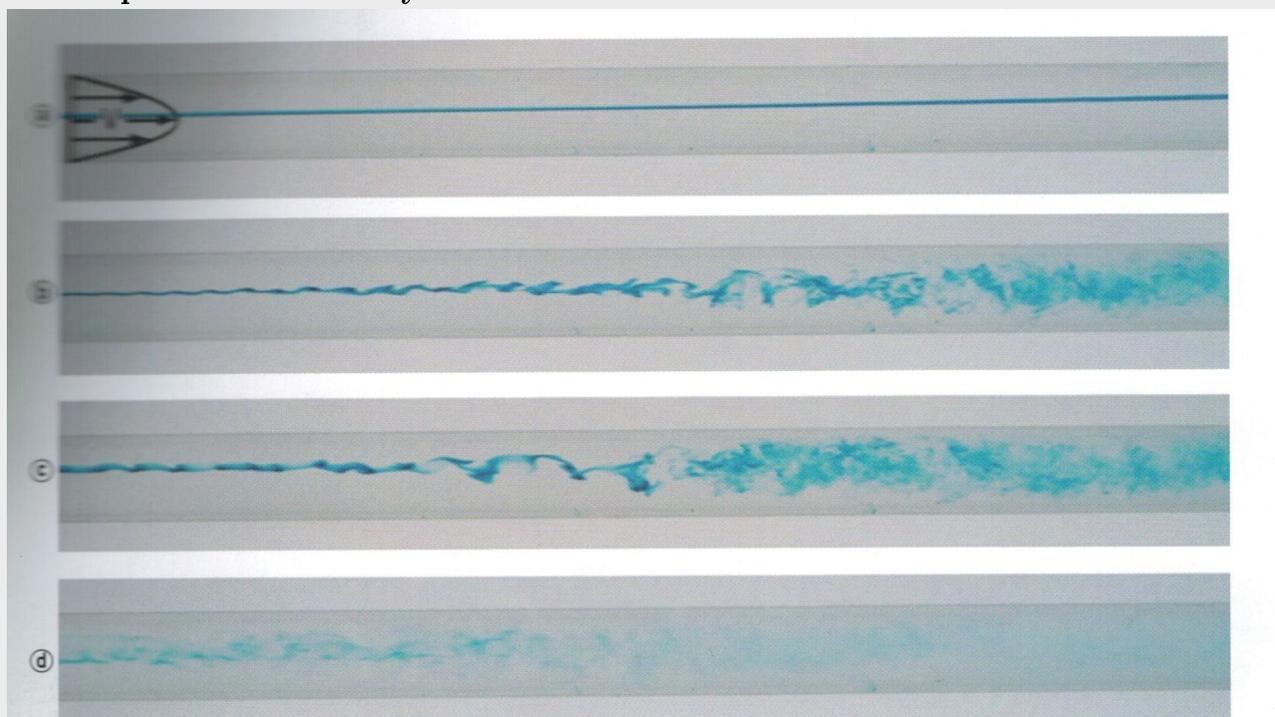
Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Viscosité

"Ce que disent les fluides" - 2^{de} éd. - de E. Guyon, J-P. Hulin et L. Petit
Belin - Pour la Science

De l'écoulement laminaire à la turbulence

Sur les pas d'Osborne Reynolds



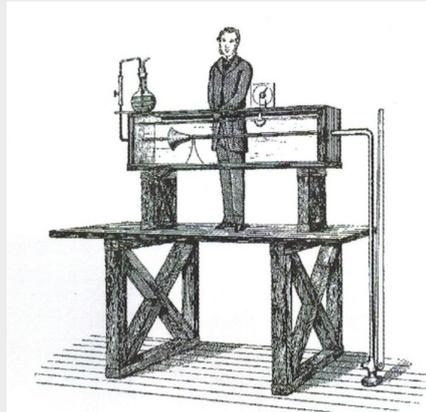
1. Vues des déformations d'un filet de colorant bleu injecté par la gauche dans l'axe d'un écoulement d'eau dans un tube horizontal. Le débit d'écoulement augmente de [a] vers [d]. Notez le passage d'un écoulement complètement laminaire (en haut) à un écoulement turbulent (en bas). Le profil de vitesse en écoulement laminaire est indiqué à gauche de la vue [a].

En ouvrant plus ou moins un robinet, on distingue facilement deux types d'écoulements : aux faibles débits, la forme du jet émergeant est régulière et invariable au cours du temps. Aux débits plus importants, elle devient irrégulière et fluctuante. Le physicien anglais Osborne Reynolds a analysé pour la première fois en 1880 ces deux régimes dans un tube de verre horizontal (Figure 2). Reproduisons ses observations en injectant un filet de colorant dans l'axe d'un tube où s'écoule un fluide visqueux (Figure 1). Aux faibles débits (a), le colorant suit des lignes de courant parallèles à l'axe du tube, sans se mélanger avec le fluide environnant : cet écoulement lent est dit laminaire. Pour les forts débits en revanche (d), le colorant exécute un ballet irrégulier entre l'axe et les bords du tube tout en dérivant le long de ce dernier. Ce mouvement transverse entraîne un mélange efficace, caractéristique de la turbulence. Aux débits intermédiaires (b, c), on observe un écoulement intermittent où se succèdent aléatoirement des « bouffées » turbulentes et des phases d'écoulement laminaire.

L'écoulement de Poiseuille

La première étude d'écoulements laminaires dans un tube cylindrique est due à Jean-Louis Marie Poiseuille en 1844.

Ce médecin s'intéressait à l'écoulement dans les vaisseaux sanguins. Ses expériences montrèrent que, pour une même surpression appliquée, le débit du liquide augmente d'un facteur 16 si le diamètre d du tube est multiplié par 2 (l'expérience de la figure 3 le confirme). Cette loi reflète le contrôle des écoulements laminaires par la viscosité. Cette grandeur traduit la résistance du liquide au cisaillement, c'est-à-dire au glissement des couches de fluides les unes par rapport aux autres (caractérisé par la variation de la vitesse dans une direction transverse à l'écoulement). Les forces par unité de surface correspondantes (les contraintes de cisaillement) sont proportionnelles à ce gradient de vitesse, et sont nulles dans un écoulement uniforme. Le coefficient de proportionnalité est précisément appelé viscosité, et est une caractéristique du fluide considéré.



● 2. Expérience historique d'Osborne Reynolds qui lui a permis d'étudier en 1880 la transition de l'écoulement d'un régime laminaire à un régime turbulent, dans un tube cylindrique horizontal. L'entonnoir convergent limite les perturbations induites par l'arrivée du courant d'eau dans le tube. Le colorant est injecté via un tube séparé, à l'entrée de l'entonnoir. [La gravure est extraite de l'article original de O. Reynolds].



● 3. Les deux écoulements laminaires dans des tubes capillaires horizontaux résultent d'une même différence de pression, mais le tube de droite a un diamètre égal à 2 fois celui de gauche. Le rapport des débits, reflété par le rapport des volumes contenus dans les éprouvettes, est de 16, ce qui correspond à la puissance quatre du quotient des diamètres. Il serait égal au quotient des sections en l'absence de viscosité.

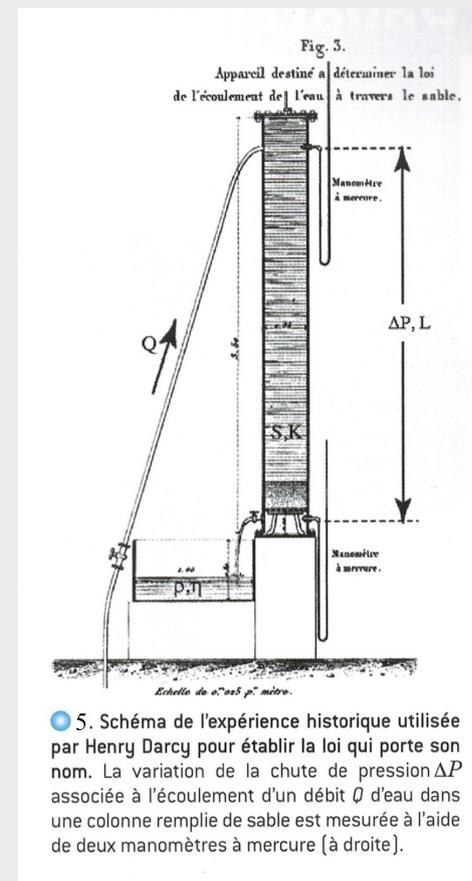
De plus, la vitesse des fluides visqueux s'annule sur les parois du tube. Pour une vitesse moyenne U donnée, le cisaillement (et donc les forces visqueuses) est ainsi d'autant plus élevé que le diamètre d du tube est petit : la variation très rapide du débit avec d en résulte. Enfin, dans un écoulement comme celui de la figure 1a, on montre que la loi de variation de la vitesse est parabolique, avec un maximum sur l'axe du tube.

Le nombre de Reynolds

Dans ses expériences, Reynolds étudia le lien entre la vitesse seuil d'apparition de la turbulence, le diamètre d du tuyau et la viscosité η du liquide. Il constata que la turbulence apparaissait au-delà d'une même valeur seuil du nombre sans dimension $Re = \frac{U \rho d}{\eta}$ (de l'ordre de quelques milliers dans ses conditions expérimentales). Ce nombre combine le diamètre d , la vitesse U du liquide, sa masse volumique ρ et sa viscosité η : c'est le nombre de... Reynolds. De tels nombres sans dimension sont très utiles : ce sont en effet eux qui déterminent les écoulements et non les paramètres individuels qui les composent. On peut ainsi reproduire un écoulement à grande échelle à l'aide d'un modèle réduit, à condition que les nombres sans dimension qui régissent ces écoulements soient les mêmes. Ainsi, pour rendre turbulent un écoulement laminaire, il faut accroître le nombre de Reynolds, soit en augmentant la vitesse moyenne ou la taille du canal, soit en employant un fluide moins visqueux.

Les écoulements de Darcy

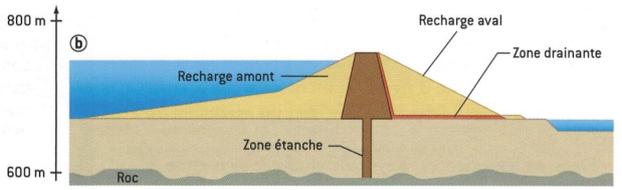
Les sols, tout comme les empilements de cailloux ou de roches, sont poreux, c'est-à-dire formés d'interstices (ou pores) connectés entre eux et présentant des chemins continus à travers le matériau. Versons de l'eau sur leur surface : le liquide ne tarde pas à pénétrer et disparaître, d'autant plus rapidement que la taille des interstices est grande. C'est un ingénieur des Ponts et Chaussées, Henry Darcy, qui a établi vers 1850 les lois de base de tels écoulements, en s'intéressant aux nappes



● 5. Schéma de l'expérience historique utilisée par Henry Darcy pour établir la loi qui porte son nom. La variation de la chute de pression ΔP associée à l'écoulement d'un débit Q d'eau dans une colonne remplie de sable est mesurée à l'aide de deux manomètres à mercure (à droite).

N'est-il pas étonnant dès lors que certains barrages, comme celui de Serre-Ponçon sur la Durance (Figure 4a), soient construits en terre et en blocs de pierre empilés ? En fait, l'étanchéité est assurée par un « noyau » central non visible, constitué d'argile imperméable et de béton, qui descend jusqu'au roc (Figure 4b). Les talus de terre (ou recharges) en amont et en aval permettent au barrage de résister à la poussée de l'eau du lac de retenue. Paradoxalement, l'eau doit pouvoir s'écouler facilement à travers ces talus. Supposons en effet qu'il soit nécessaire de vider très rapidement le lac : le niveau de l'eau contenue dans les pores de la recharge amont devra suivre cette baisse sans

4. (a) Vue de l'aval du barrage de Serre-Ponçon sur la Durance, dans les Hautes-Alpes. La hauteur totale du barrage est de 120 mètres et son épaisseur à la base est de 600 mètres. (b) Coupe transversale du barrage : il est constitué de plusieurs couches dont un noyau central imperméable et des talus latéraux (les recharges) poreux.



retard. Autrement, les différences de niveau induiraient des écoulements intérieurs provoquant des glissements de terrain dans le talus. En aval, l'eau filtrant à travers le noyau ou apportée par la pluie s'accumule entre le noyau central et la recharge : elle doit elle aussi être évacuée par des drains. La conception d'un tel barrage requiert donc une parfaite maîtrise des écoulements dans les poreux : bel exemple de la continuité entre la mission de l'ingénieur et celle du savant, qu'illustre l'œuvre d'Henry Darcy.

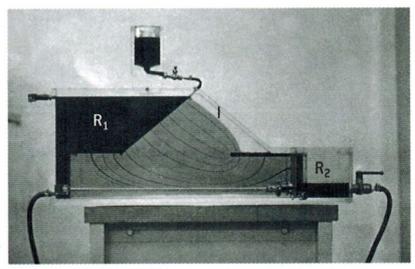
La loi de Darcy exprime la proportionnalité entre le débit Q de fluide passant à travers une surface S d'un milieu poreux (Figure 5), et la «perte de charge» (i.e. la différence de pression par unité de longueur) $\frac{\Delta P}{L}$:

$$\frac{Q}{S} = \frac{K}{\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

η est la viscosité du fluide ; K est appelée perméabilité et caractérise le matériau. Cette loi est formellement similaire à celle qui régit le passage du courant électrique dans un matériau conducteur. Dans cette analogie, l'intensité du courant, la différence de potentiel et la conductivité électriques remplacent respectivement le débit $\frac{Q}{S}$, la différence de pression $\frac{\Delta P}{L}$, et le quotient $\frac{K}{\eta}$. La perméabilité K dépend de la géométrie du réseau de pores, et particulièrement de leur taille : plus précisément, K varie comme le carré de la taille moyenne des pores pour une géométrie donnée. Ainsi, un empilement de gros blocs est beaucoup plus perméable qu'une couche de terre fine.

Visualiser les écoulements à l'intérieur des milieux poreux est chose ardue, même si des outils comme le scanner X ou l'imagerie RMN sont maintenant disponibles. Pour représenter ces écoulements, on a donc longtemps fait appel à des systèmes modèles, comme les cellules de Hele-Shaw constituées de deux plaques transparentes parallèles et proches.

Comme pour un milieu poreux, la vitesse d'écoulement moyennée sur l'intervalle entre les plaques est proportionnelle au gradient de pression, même en présence d'obstacles : la loi de Darcy est donc aussi valable pour ce dispositif. Pour modéliser l'écoulement à travers une digue poreuse, il suffit de placer la cellule verticalement entre deux réservoirs de niveaux différents (Figure 6) : on observe alors que l'interface I est un segment de parabole d'axe horizontal.



6. Modèle de digue poreuse constitué d'une cellule de Hele-Shaw verticale reliant deux réservoirs R_1 et R_2 . Celui de gauche contient un liquide coloré et simule un lac de retenue. Les lignes d'écoulement du liquide dans le modèle sont visualisées par plusieurs injections locales de colorant.

Énoncé

On s'intéresse dans tout le problème à un fluide visqueux newtonien (de viscosité dynamique η), incompressible (de masse volumique ρ). On ne tiendra pas compte du champ de pesanteur.

1) Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement laminaire, permanent, de ce fluide dans un tube cylindrique d'axe Oz , de longueur L , de section circulaire et de diamètre d , aux bornes duquel on impose une différence de pression ΔP .

On admet que :

- la vitesse est $\vec{v}(r, z, \theta) = v_z(r) \vec{e}_z$;
- la variation de la pression est constante le long de l'axe z ;

1.a) Écrire l'équation de Navier Stokes. On donne le laplacien en cylindrique :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]$$

1.b) En conclure que la vitesse suit bien une loi parabolique :

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{4r^2}{d^2} \right)$$

où on exprimera la vitesse maximale v_{\max} en fonction de $\frac{\Delta P}{L}$, de la viscosité et du rayon.

1.c) Exprimer le débit volumique Q_1 dans le tuyau.

1.d) Vérifier que "le débit du liquide augmente d'un facteur 16 si le diamètre d du tube est multiplié par 2".

2) Nombre de Reynolds

2.a) Définir, dans le cas général, le nombre de Reynolds comme le rapport des termes convectif et diffusif, et vérifier la formule donnée dans le document.

2.b) Donner l'expression de la vitesse moyenne U dans le cas de l'écoulement de Poiseuille.

2.c) Pourquoi dans le cas de l'écoulement de Poiseuille l'écoulement est-il laminaire ?

3) Écoulement de Darcy

Une paroi poreuse est modélisée par une couche de matière d'épaisseur L percée de N tubes cylindriques horizontaux par unité de surface, de rayon d et de longueur L ($d \ll L$). Il existe, au sein du liquide, une différence de pression ΔP entre les deux faces de la paroi poreuse.

On admet que l'écoulement du fluide à travers cette paroi est caractérisé par la loi de Poiseuille vue précédemment.

3.a) Montrer que le débit volumique Q du fluide à travers la paroi suit bien

$$\frac{Q}{S} = \frac{K \Delta P}{\eta L}$$

où K est la perméabilité de la paroi (qu'on exprimera) et S représente la section totale de la paroi.

3.b) Comparer avec la loi d'Ohm et définir la notion de résistance hydraulique R_h . R_h varie-t-elle de la même façon qu'une résistance électrique en fonction de sa longueur et de sa section ?

Correction

1) Écoulement de Poiseuille

1.a) L'équation de Navier-Stokes s'écrit (si on néglige la pesanteur) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Comme $\Delta \vec{v} = \Delta v_z(r) \vec{e}_z$,

$$\Delta v_z(r) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv_z(r)}{dr} \right)$$

d'une part et que d'autre part

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = (v_z(r) \vec{e}_z \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot v_z(r) \vec{e}_z = \left(v_z(r) \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \right) \cdot v_z(r) \vec{e}_z = \vec{0}$$

et enfin

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\Delta P}{\ell} \vec{e}_z$$

Donc, on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire : $\boxed{\frac{\Delta P}{L} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv_z(r)}{dr} \right)}$.

1.b) On intègre une fois :

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{\Delta P}{L} + A$$

qu'on intègre encore une fois :

$$v_z = \frac{r^2}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} + A \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + B$$

En $r = 0$, la vitesse ne serait pas définie si A était non nulle. Compte tenu de la condition de non-glissement ($v(\frac{d}{2}) = 0$), on trouve :

$$v(r) = -\frac{d^2}{16\eta} \frac{\Delta P}{L} \left(1 - \frac{4r^2}{d^2} \right)$$

La vitesse est plus importante au centre du conduit :

$$v_{\max} = -\frac{d^2}{16\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

Donc

$$v(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{4r^2}{D^2} \right)$$

1.c) On ne peut pas calculer Q_1 par une formule du style $Q_1 = S \cdot v$ car la vitesse n'est pas uniforme. Découpons un section de la canalisation en couronnes entre les rayons r et $r + dr$, de surface $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ et intégrons les débits élémentaires $Q_1 = \int_{r=0}^{r=\frac{d}{2}} v(r) 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$. On trouve :

$$Q_1 = \frac{\Delta P \pi d^2}{L 32 \eta}$$

1.d) On passe d'une canalisation de diamètre intérieur d à une de diamètre $d' = 2d$. Cela multiplie la résistance d'un facteur

$$\frac{Q'_1}{Q_1} = 2^4 = 16$$

Aussi, "le débit du liquide augmente d'un facteur 16 si le diamètre d du tube est multiplié par 2".

2) Nombre de Reynolds

2.a) Comme l'équation de Navier-Stokes s'écrit (si on néglige la pesanteur) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Le nombre de Reynolds est donc

$$Re = \frac{\frac{U^2}{d}}{\frac{\eta U}{\rho d^2}} = \frac{\rho U d}{\eta}$$

comme dit dans le document.

2.b) La vitesse moyenne est

$$U = \frac{\int_{r=0}^{r=\frac{d}{2}} v(r) 2.\pi.r.dr}{\int_{r=0}^{r=\frac{d}{2}} 2.\pi.r.dr} = \frac{Q_1}{S} = \frac{\Delta P}{L} \frac{\pi}{8\eta}$$

2.c) Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, l'écoulement est laminaire, car l'accélération convective est nulle ($(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$), aussi $Re = 0$.

3) Écoulement de Darcy

3.a) On a vu que le débit volumique dans chaque tube est $\frac{\Delta P}{L} \frac{\pi d^2}{32\eta}$. Aussi, pour tous les NS tubes :

$$Q = NS \frac{\Delta P}{L} \frac{\pi d^2}{32\eta}$$

On a bien

$$\frac{Q}{S} = K \frac{\Delta P}{\eta \cdot L}$$

avec

$$K = \frac{N \pi d^2}{32}$$

3.b) Par analogie entre débit de masse et débit de charges, différence de pression et de potentiel, la loi d'Ohm $I = \frac{\Delta V}{R}$ permet de définir une résistance hydraulique

$$R_h = \frac{8.\pi.\eta.L}{S^2}$$

Si l'on essaie de pousser plus loin, on voit que l'analogie a ses limites : les résistances électrique et hydraulique sont bien toutes deux proportionnelles à L , mais la première est inversement proportionnelle à $S = \pi \frac{d^2}{4}$, la seconde à S^2 .