

# Fluides parfaits

## Notes de cours

mardi 7 novembre 2017

### I- Forces exercées sur les fluides parfaits

#### 1. Forces locales dans le cas d'un fluide parfait

##### Forces surfaciques *s'y retrouver*

un volume  $V$  de fluide délimité par une surface fermée  $\Sigma$  ressent des forces de surface de la part de son environnement. Sur l'élément infinitésimal  $d^2\Sigma$  s'exerce  $\vec{d^2F}$  qui a une composante normale, liée à la pression  $P$ , et une composante tangentielle, la force de viscosité.

##### **Fluide parfait** *définition*

Pour un fluide parfait, on négligera la viscosité. Aussi,

$$\vec{d^2F} = -P \cdot \vec{d^2\Sigma}$$

##### Forces de tension superficielle *schéma*

La figure 1 représente schématiquement les forces entre molécules d'eau. Une asymétrie existe à la surface, qui explique une force appelée tension superficielle.

Les effets de la tension superficielle se font sentir principalement pour des systèmes de petites dimensions (tubes capillaires, gouttes, ...), on se placera dans l'étude des écoulements parfaits avec des limites (bords du fluide) suffisamment éloignées.

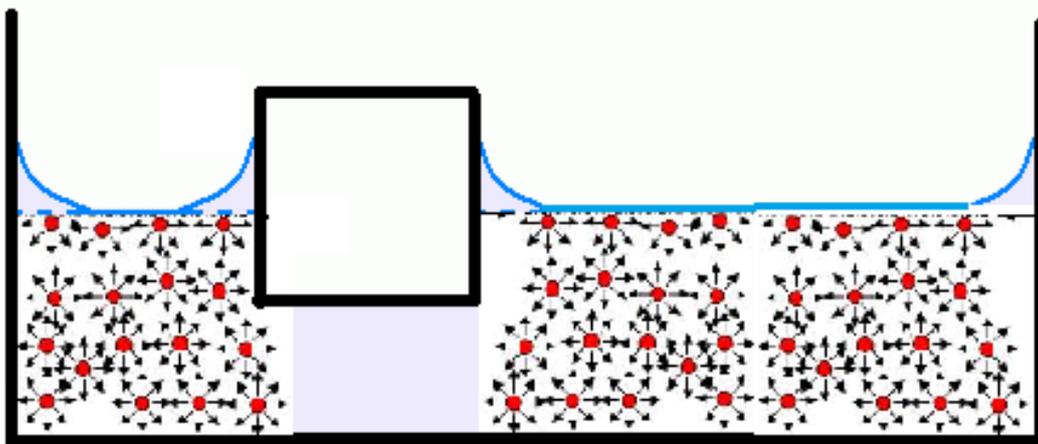


FIGURE 1 – Forces de tension superficielle

##### **1 Force volumique ou massique de pesanteur** *théorème*

un petit élément de volume  $d^3\tau$  a un poids  $d^3\vec{P} = \mu \cdot \vec{g} d^3\tau$ ,  $\Rightarrow$

on peut donc associer au poids :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = \mu \cdot \vec{g} \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = \vec{g} \end{array} \right.$$



### 2 Force volumique ou massique de Coriolis : *théorème*

si l'étude se fait dans un référentiel  $R$  non galiléen, il faut considérer aussi la force de Coriolis à laquelle est soumis  $d^3\tau$ . Celle-ci est  $d^3\vec{f}_{iC} = -2 \cdot \mu \cdot d^3\tau \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ , où  $\vec{\Omega}_{R/R_g}$  est le vecteur rotation de  $R$  par rapport aux référentiels galiléens et  $\vec{v}$  la vitesse locale du fluide (dans  $R$ ).  $\Rightarrow$

On peut donner pour la force de Coriolis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = -2 \cdot \mu \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v} \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = -2 \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v} \end{array} \right.$$



### 3 Force volumique ou massique de pression *théorème*

la résultante des forces de surface exercées sur un volume  $V$  de fluide délimité par une surface fermée  $\Sigma$  est

$$\oiint -P \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}(-P) \cdot d^3\tau$$

$\Rightarrow$

on associe aux forces de surfaces pour un fluide parfait (sans viscosité) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une force volumique : } \vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \\ \text{une force massique : } \vec{f}_m = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} \end{array} \right.$$



### Écoulements barotropes *s'y retrouver*

Si l'on réussit à trouver une relation  $\mu = f(P)$ , on parlera d'écoulement barotrope. Dans ce cas, on pourra écrire :

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi(P))$$

## 2. Équation d'Euler



### 4 Equation d'Euler dans un référentiel galiléen *théorème*

en écrivant le théorème de la résultante cinétique appliqué à un petit élément de volume  $d^3\tau$ , on trouve :

$$\mu \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \Sigma \vec{f}_v$$

Dans le cas de l'étude dans un référentiel galiléen, seuls le poids et les forces de pression interviennent *a priori*. On peut donc transformer la précédente expression en :  $\Rightarrow$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu}$$

### ✳ Equation d'Euler dans le cas d'un référentiel non galiléen *s'y retrouver*

si l'étude se fait dans un référentiel  $R$  non galiléen, avec  $\vec{\Omega}_{R/R_g}$  le vecteur rotation de  $R$  par rapport aux référentiels galiléens, il faut ajouter dans le second membre de l'équation d'Euler la force de Coriolis. Soit :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} - 2 \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v}$$

### ✳ Equation d'Euler dans le cas statique *s'y retrouver*

si  $\vec{v} = \vec{0}$ , l'équation d'Euler redonne la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\vec{0} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu}$$

## 3. Applications de l'équation d'Euler

### ✍ 5 Equation d'Euler dans le cas d'un "petit" écoulement *théorème*

On peut négliger la force de Coriolis devant le terme convectif  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} \Rightarrow$  on se place maintenant dans le cas où la taille de l'écoulement est faible (moins d'un kilomètre). Cette fois-ci, même si le référentiel terrestre est non galiléen, l'équation d'Euler s'écrira :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu}$$

### ✍ 6 Equilibre géostrophique *théorème*

Dans le cas où on néglige la pesanteur (en se plaçant dans un plan horizontal), et où l'écoulement est permanent et de grande envergure (un océan), l'équation d'Euler donne une relation d'équilibre géostrophique :

$$\vec{0} = - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} - 2 \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g} \wedge \vec{v}$$

où le gradient de pression est suivant la force d'inertie de Coriolis horizontale, donc orthogonal à la vitesse.  $\Rightarrow$

Dans le cas où on néglige la pesanteur (en se plaçant dans un plan horizontal), et où l'écoulement est permanent et de grande envergure (un océan), les lignes de courant et les courbes isobares sont confondues.

Le fluide tourne dans le sens trigonométrique autour des dépressions dans l'hémisphère nord, dans le sens horaire autour des anticyclones.

### 👁 Lignes de courant et courbes isobares de l'atmosphère dans l'hémisphère nord. *schéma*

La figure 2 représente les lignes de courant et courbes isobares de l'atmosphère dans l'hémisphère nord : les deux sont confondues dans le cas de l'équilibre géostrophique et le fluide tourne dans le sens trigonométrique autour des dépressions dans l'hémisphère nord, dans le sens horaire autour des anticyclones.

## II- Relation de Bernoulli

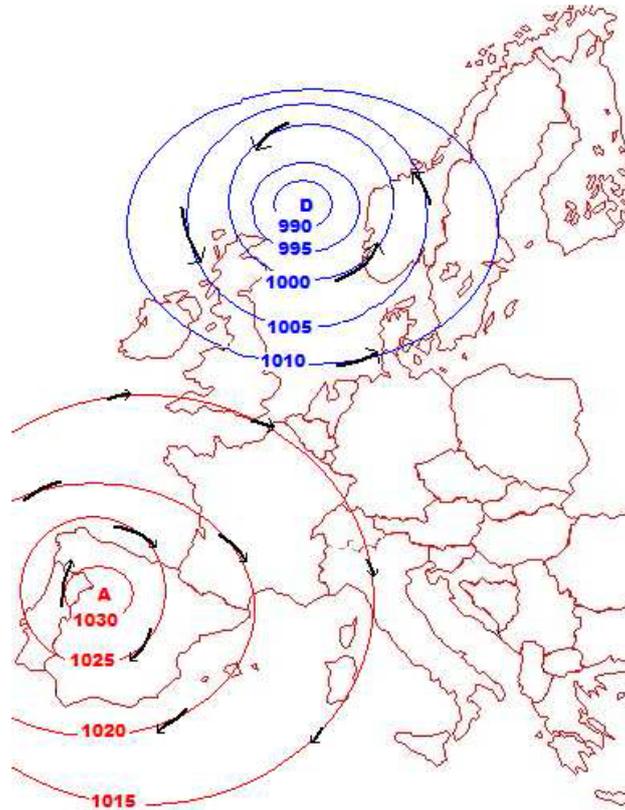


FIGURE 2 – Lignes de courant et courbes isobares de l'atmosphère dans l'hémisphère nord.

### 7 Relation de Bernoulli *théorème*

⇒

On se souviendra que dans le cas de l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible homogène,

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g.z = cste \quad \text{le long d'une ligne de courant}$$

Si, en plus, l'écoulement est irrotationnel,

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g.z = cste \quad \text{dans tout le fluide}$$



### Interprétation des termes présents dans la formule de Bernoulli *s'y retrouver*

On peut comprendre la relation de Bernoulli comme une loi de conservation énergétique. Les termes présents dans la formule sont autant de types d'énergie :

- Energie cinétique massique :  $\frac{v^2}{2}$ .
- Energie potentielle massique de pesanteur :  $g.z$ .
- Travail massique des forces de pression :  $\Delta \left( \frac{P}{\mu} \right)$ .

## III- Applications de la relation de Bernoulli

### 1. Vidanges de récipients

### Vidange d'un récipient *schéma*

La figure 3 représente l'écoulement d'un fluide incompressible depuis un récipient.

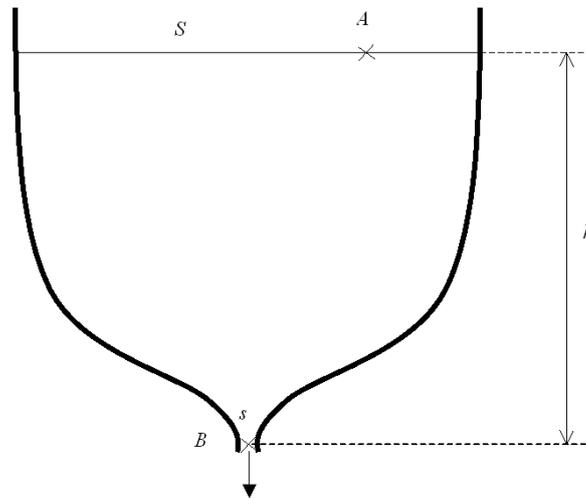


FIGURE 3 – Vidange d'un récipient

### 8 Loi de Torricelli *théorème*

L'écoulement entre  $A$  à la surface libre du fluide et  $B$  à l'orifice peut être considéré comme stationnaire.

On peut appliquer la formule de Bernoulli le long de la ligne de courant entre  $A$  et  $B$  :  $\frac{v_A^2}{2} + g \cdot z_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + g \cdot z_B + \frac{P_B}{\rho}$ .

Or  $P_A = P_B = P_{atm}$  et  $z_A - z_B = h$ .

On a  $v_A \approx 0$ , et  $v_B = v$ .

Aussi,  $g \cdot h = \frac{v^2}{2}$ , d'où :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

⇒

Un récipient de hauteur  $h$  rempli d'un fluide parfait qui s'écoule par un orifice très petit devant la section du récipient situé dans le fond de celui-ci a pour vitesse d'écoulement  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ .

### Vérification de la loi de Torricelli *vidéo*

On peut vérifier expérimentalement la formule de Torricelli qui donne la vitesse de chute libre depuis une hauteur  $h$  :  $v_B \approx \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## 2. L'effet Venturi et ses applications pour la mesure des débits

### 9 Principe de l'effet Venturi *théorème*

la vitesse du fluide augmente à cause de la conservation du débit. Cette augmentation de la vitesse se double, d'après la relation de Bernoulli appliquée le long d'une ligne de courant  $A - B$  par une dépression dans la zone d'étranglement : ⇒

l'écoulement d'un fluide dans une conduite (mais ce peut être tout tube de courant) qui se resserre voit la vitesse du fluide augmenter. Cette augmentation de la vitesse se double par une dépression dans la

zone d'étranglement :

$$S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A \Rightarrow P_B < P_A$$

### 👁 Principe de l'effet Venturi. *schéma*

La figure 4 représente le principe de l'effet Venturi.

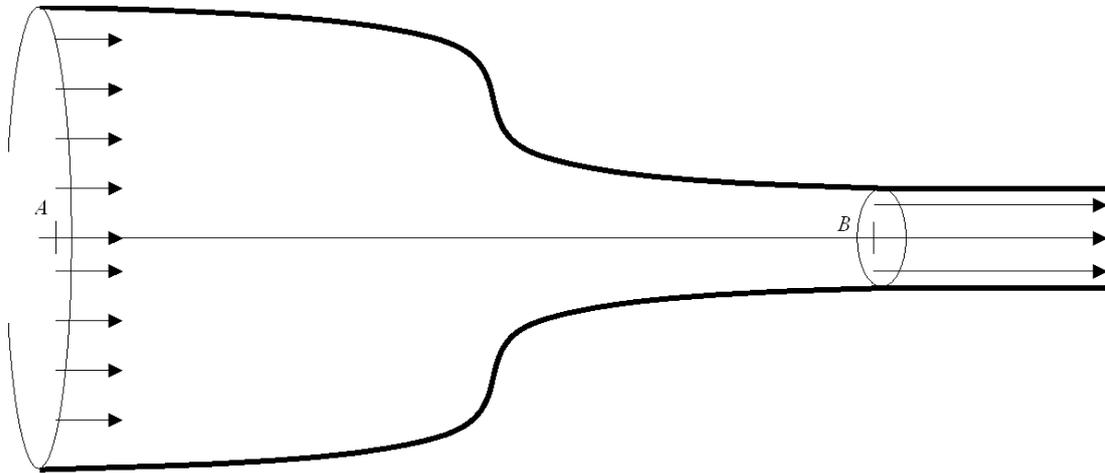


FIGURE 4 – Principe de l'effet Venturi.

### 👁 L'effet venturi *vidéo*

on peut mettre en évidence l'effet Venturi de façon très visuelle en utilisant un sèche-cheveux qui permet l'aspiration d'une feuille. La forte vitesse de l'air au voisinage des objets se caractérise par une faible pression qui tend à "aspirer" ceux-ci.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

### 👁 Mesure des débits avec un tube de Venturi *schéma*

La figure 5 représente le principe d'un tube Venturi. Le tube de venturi (horizontal) permet de mesurer un débit connaissant la différence de pression entre A et B.

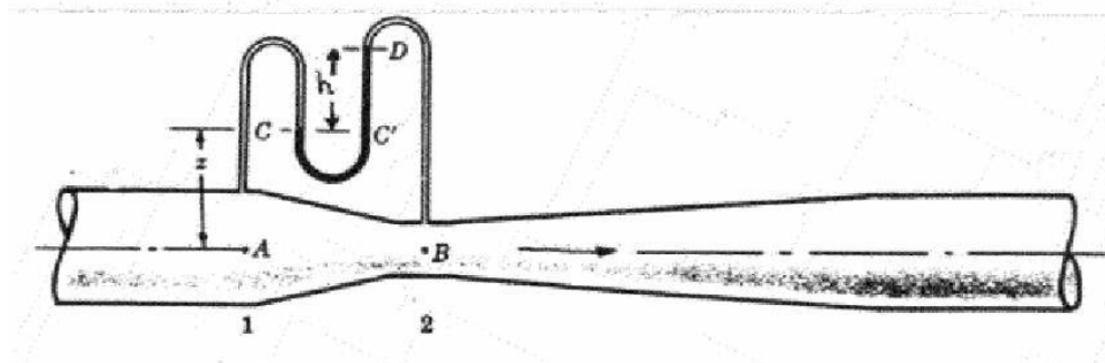


FIGURE 5 – Mesure des débits avec un tube de Venturi

### Le tube de Pitot *schéma*

La figure 6 représente un tube de Pitot. Le tube de Pitot (Henri Pitot, ingénieur français, 1695 – 1771) est utilisé en aérodynamique pour mesurer la vitesse  $v$  d'un écoulement d'air uniforme et stationnaire. C'est un double tube très fin que l'on place parallèlement aux lignes de courant du fluide en écoulement.

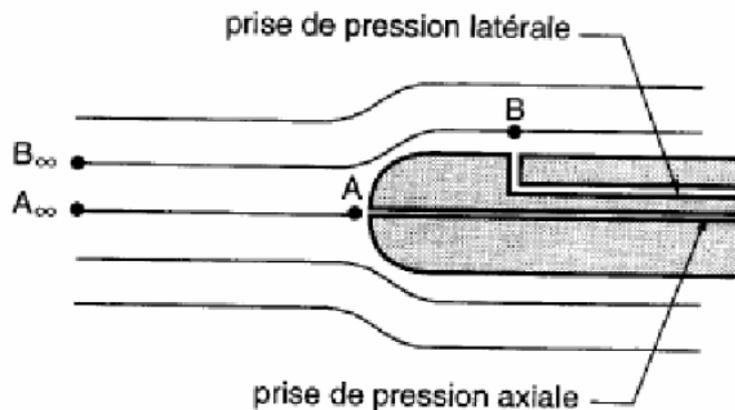


FIGURE 6 – Le tube de Pitot

### Le tube de Pitot *vidéo*

l'écoulement du fluide crée une différence de pression entre les deux entrées du tube.  
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

## 3. Effet Magnus et forces dues à l'écoulement d'un fluide parfait

### Principe de la trompe à eau *schéma*

La figure 7 représente une trompe à eau, très utilisée en chimie pour créer une aspiration car efficace et bon marché (photographie et principe). Le filet d'eau qui coule du robinet passe dans une zone d'étranglement qui augmente sa vitesse, et donc diminue la pression. Le tuyau d'air relié à cette zone d'étranglement transmet donc l'aspiration due à la faible pression.

### Principe des vaporisateurs *schéma*

La figure 8 représente le principe et une photographie d'un vaporisateur. Les vaporisateurs et certains pistolets à peinture sont fondés sur le même principe. Un écoulement d'air rendu rapide crée une dépression qui aspire un liquide vers le haut. Le liquide au contact de l'air est "vaporisé", c'est à dire qu'il est entraîné en fines gouttelettes.

### L'effet Coanda *vidéo*

De la même façon, le sèche-cheveux permet la lévitation d'une balle de ping-pong.  
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

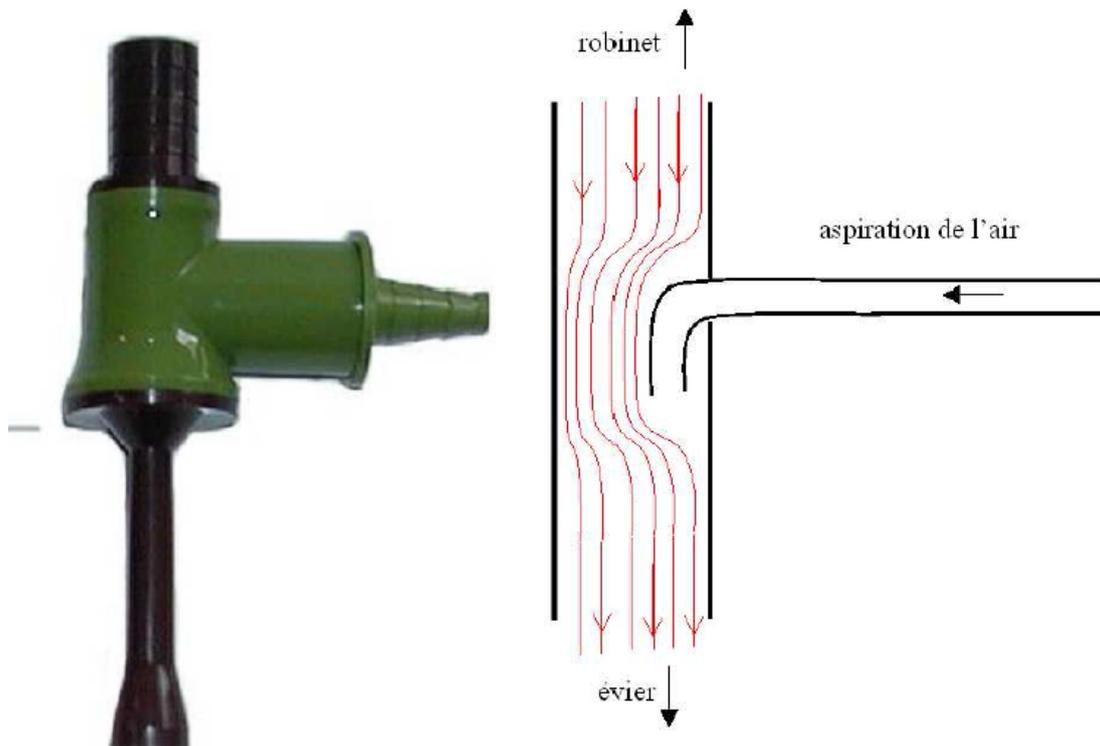


FIGURE 7 – Principe de la trompe à eau

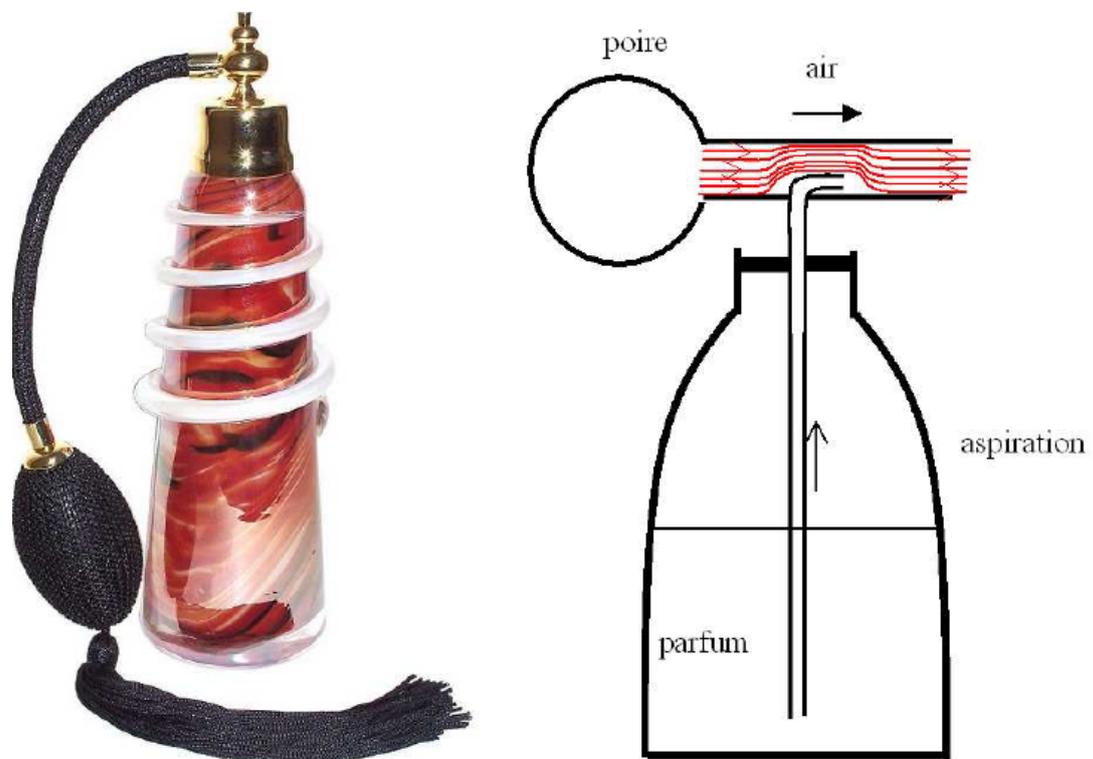


FIGURE 8 – Principe des vaporisateurs

 **Effet de sol** *s'y retrouver*

une voiture voit les lignes de courant de l'air se resserrer sous son bas de caisse. La vitesse de l'air est plus importante sous la voiture qu'au dessus. Aussi, il règne une basse pression sous la voiture, ce qui a pour effet de faire subir au véhicule une force de haut en bas qui le "colle" au sol. Cet "effet de sol", loin d'être nuisible, permet une bonne adhérence des pneus sur la chaussée.

 **10 Effet Magnus** *théorème*

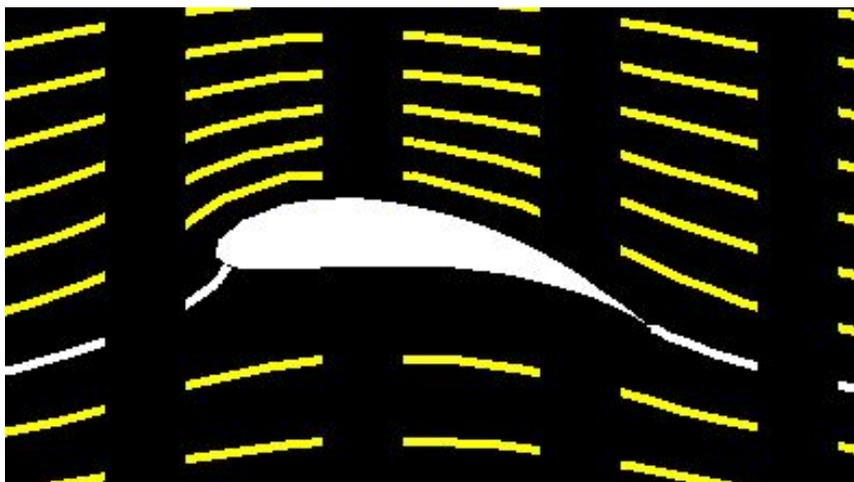
on s'intéresse à un écoulement parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire, que l'on suppose uniforme à l'infini. L'écoulement du fluide est perturbé par un obstacle solide. Bien entendu, on peut comprendre l'écoulement du fluide par le fait que le solide lui-même se déplace : il suffit alors de se placer dans le référentiel où le centre du solide est fixe.

La déformation des lignes de courant au voisinage du solide se caractérise par une zone où la vitesse est plus forte (et donc où la pression est plus faible), alors qu'à d'autres endroits, la vitesse est plus faible (et c'est alors la pression qui est plus forte).

La différence de pression de part et d'autre du solide donne alors une force qui tend à déplacer le solide vers les zones de dépression, donc de fortes vitesses. ⇒

l'écoulement d'un fluide au voisinage d'un solide exerce une force qui tend à déplacer le solide vers les zones de dépression, donc de fortes vitesses.

 **Portance d'un avion** *photo*



La circulation de l'air autour d'une aile d'avion n'est pas symétrique. Au dessus de l'aile ("extrados"), la vitesse est importante, alors qu'en dessous ("intrados"), la vitesse est plus faible. Aussi, l'aile ressent une force dirigée vers le haut qui assure la sustentation de l'avion.

### Déviation d'un cylindre en rotation : *photo*



si le solide est un cylindre sans rotation, il y a symétrie du problème.

Par contre, si le cylindre tourne autour de son axe, le caractère réel (c'est à dire visqueux) du fluide entraîne sa rotation au contact du cylindre. Le cylindre ressent alors une force qui tend à le déplacer vers les zones de fortes vitesses.

Un tel dispositif a été utilisé pour mouvoir un bateau grâce au vent... sans voile! C'est le cas du bateau "Alcyone" du Commandant Cousteau.

### Déviation d'une balle : lift, coupé, smash *schéma*

La figure 9 représente une illustration de l'effet Magnus : une sphère ou un cylindre qui tourne en se déplaçant dans un fluide. Ainsi, on peut expliquer les effets (brossés, coupés, liftés, etc.) donnés aux balles de ping-pong, de tennis ou encore aux ballons de football. La situation de la figure est caractéristique d'un smash : la balle en rotation est entraînée vers le bas.

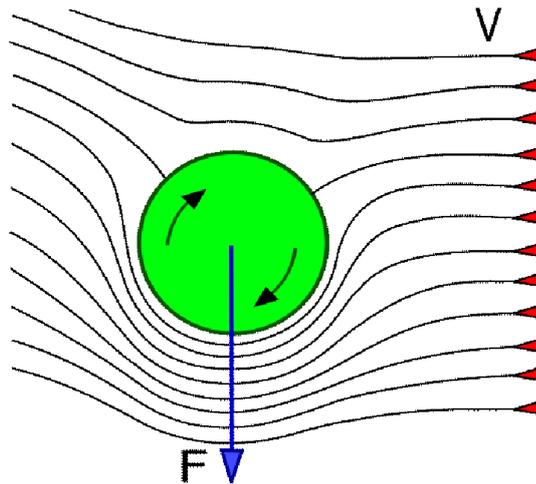
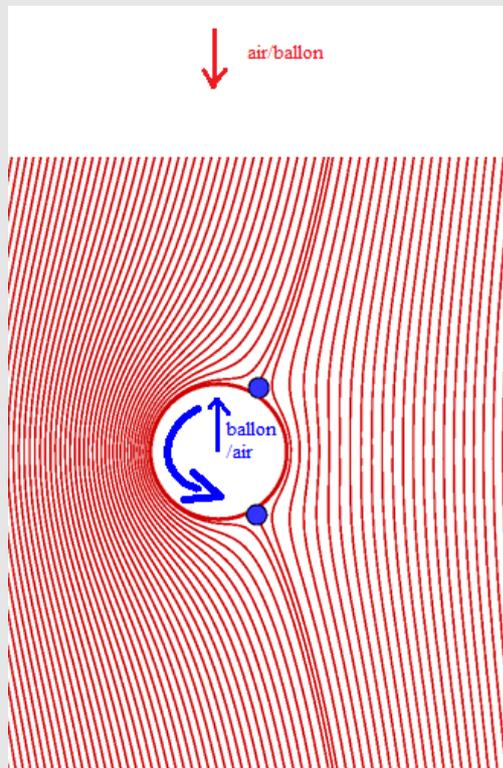


FIGURE 9 – Déviation d'une balle : lift, coupé, smash

### 1) Modélisation de l'effet de la rotation d'une balle *exercice*



On s'intéresse à une balle en rotation dont le centre se déplace dans l'air. Dans le référentiel où ce centre est fixe, l'air est en mouvement. Ci-contre sont représentées des lignes de courant de l'air dans ce référentiel. On suppose que l'écoulement est incompressible et parfait.

- 1) Déterminer les zones où la vitesse de l'air est la plus grande.
- 2) En déduire les zones où la pression est la plus petite.
- 3) Quelle est donc la force résultante, exercée par l'air sur la balle ?

#### Correction :

- 1) Les zones où la vitesse de l'air est la plus grande sont celles où les lignes de courant sont les plus resserrées (à gauche).
- 2) Les zones où la pression est la plus petite sont celles où la vitesse de l'air est la plus grande (à gauche).
- 3) La force résultante, exercée par l'air sur la balle, est de droite à gauche. **Éléments de correction :**

La force résultante, exercée par l'air sur la balle, est de droite à gauche.

# Technique à maîtriser

jeudi 9 novembre 2017

## I- Les capacités exigibles

### 1. Conditions aux limites sur la vitesse



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

- | Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.

### 2. Relation de Bernoulli



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

- | Justifier la relation de Bernoulli et utiliser cette relation.
- | Interpréter d'éventuels écarts observés en vérifiant les conditions de validité.

### 3. Equation d'Euler



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

- | Utiliser les relations  $\vec{dF} = -p\vec{dS}$  et  $\vec{dF} = -\overrightarrow{grad}p d\tau$ .
- | Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide.
- | Utiliser l'équation d'Euler

## II- Méthodes

### 1. Conditions aux limites sur la vitesse



**A) Utilisation des conditions aux limites** *méthode*

- | A l'infini, la vitesse est homogène :  $\vec{v}_\infty = v_0 \cdot \vec{u}_x$  et sur un obstacle ou sur une paroi, il ne peut y avoir de composante normale du fluide sur la paroi (et la vitesse tangentielle est nulle si le fluide est visqueux mais ce n'est pas le cas pour un écoulement parfait).

### 2. Relation de Bernoulli



**B) Vidanges et applications de la relation de Bernoulli** *méthode*

- | Il faut appliquer le théorème de Bernoulli (bien vérifier auparavant les conditions d'application !) entre deux points le long d'une ligne de courant (vérifier qu'une ligne de courant existe bien entre ces deux points!).

### 3. Equation d'Euler

#### C) Démontrer diverses formules de Bernoulli à partir de l'équation d'Euler

*méthode*

On part de l'équation d'Euler. Rappelons que, pour pouvoir écrire l'équation d'Euler, il faut que l'écoulement soit parfait (c'est à dire que le fluide doit être non visqueux). On néglige la force de Coriolis, si les dimensions de l'écoulement ne sont pas trop grandes. Le poids dérive d'une énergie potentielle. Aussi, on peut écrire

$$\vec{f}_m = \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(e_{pp}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(g.z)$$

où l'énergie potentielle de pesanteur massique est donc  $e_{pp} = g.z$ , l'axe  $Oz$  étant vertical, orienté vers le haut. Dans le cas de l'écoulement barotrope, si l'on réussit à trouver une relation  $\mu = f(P)$ . On pourra écrire :

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi(P))$$

Un cas particulier d'écoulement barotrope (avec  $\varphi(P) = \frac{P}{\mu}$ ) est celui de l'écoulement incompressible homogène :  $\mu$  est alors constant dans tout le fluide. On peut donc écrire :

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}(P)}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\mu}\right)$$

Un écoulement est irrotationnel (ou non tourbillonnaire) si, partout dans le fluide  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ . Le rotationnel de la vitesse étant nulle, on peut faire dériver celle-ci, *via* un gradient, d'un potentiel  $\phi$  :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

L'écoulement est stationnaire si les grandeurs ne dépendent pas explicitement du temps. En particulier :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

et, si on a un écoulement irrotationnel :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Dans le cas des écoulement non potentiels, comme le rotationnel de la vitesse n'est pas nul partout dans le fluide, on ne peut plus écrire les termes de l'équation d'Euler sous forme d'un gradient. Cependant, si on se déplace le long d'une ligne de courant, on peut intégrer l'équation d'Euler (en formant un produit scalaire avec  $\overrightarrow{d\ell} = \vec{v}.dt$ , qui fait disparaître le terme en  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ ).

## III- Exercices

### 1. Conditions aux limites sur la vitesse

#### 1.1) Ecoulement plan au voisinage d'un cylindre fixe

On s'intéresse à un écoulement plan autour d'un cylindre fixe centré en  $O$ , de rayon  $a$ . On superpose au champ de vitesse à l'infini exprimé en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_\infty = v_0.\vec{u}_x$$

un champ créé par un dipôle source-puits :

$$\vec{v}_{dipole} = \frac{p}{2.\pi.r^2} . (\cos\theta.\vec{u}_r + \sin\theta.\vec{u}_\theta)$$

En choisissant la bonne valeur de  $p$  qui satisfait les conditions aux limites, déterminer le champ de vitesse dans les coordonnées cylindriques.

Ce cylindre fixe impose les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_r = 0 \text{ si } r = a \text{ et } \forall \theta \in [0, 2\pi[$$

D'autre part, suffisamment loin du cylindre, le champ de vitesse est uniforme :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x = v_\infty \text{ si } r \rightarrow \infty$$

Ce sont donc les deux conditions aux limites à satisfaire.

On superpose au champ de vitesse à l'infini exprimé en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_\infty = v_0 \cdot (\cos \theta \cdot \vec{u}_r - \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$$

un champ créé par un dipôle source-puits :

$$\vec{v}_{dipole} = \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot (\cos \theta \cdot \vec{u}_r + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$$

On trouve donc :

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_{dipole} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_r - v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_\theta$$

## 1.2) Écoulement plan au voisinage d'un cylindre tournant

On s'intéresse à un cylindre de rayon  $a$  en rotation autour de son axe  $Oz$ , on va superposer au champ de vitesse pour un cylindre fixe :

$$\vec{v}_{fixe} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_r - v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_\theta$$

un écoulement de type vortex :

$$\vec{v}_{vortex} = \frac{C}{2 \cdot \pi \cdot r} \vec{u}_\theta$$

de façon à prendre en compte la rotation du cylindre qui va avoir tendance à entraîner le fluide à son contact.

Aussi, l'écoulement autour d'un cylindre en rotation suit la loi de vitesse :

$$\vec{v} = \vec{v}_{fixe} + \vec{v}_{vortex} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_r + \left[-v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{C}{2 \cdot \pi \cdot r}\right] \cdot \vec{u}_\theta$$

- 1) Exprimer  $C$  en fonction de la vitesse angulaire du cylindre  $\Omega$  et  $a$ .
- 2) Déterminer une condition sur  $\Omega$  pour qu'il existe des points d'arrêt sur le cylindre.

1) De façon à prendre en compte la rotation du cylindre (dont la vitesse extérieure est  $\vec{v} = \Omega \cdot a \cdot \vec{u}_\theta$ ), il faut que  $\vec{v}_{vortex} = \frac{C}{2 \cdot \pi \cdot a} \vec{u}_\theta = \Omega \cdot a \cdot \vec{u}_\theta$  donc  $C = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \Omega$ .

2) On cherche  $\vec{v}(r = a) = \vec{0}$ , soit  $v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{C}{2 \cdot \pi \cdot r} = a \cdot \Omega$ . Soit  $\Omega \geq \frac{v_0}{a}$ .

## 2. Relation de Bernoulli

### 2.3) Temps de vidange d'un récipient

On s'intéresse à un récipient ayant la forme d'un cylindre d'axe vertical, de hauteur  $H = 50\text{cm}$  et de rayon  $R = 10\text{cm}$ , initialement complètement rempli d'un fluide parfait qui s'écoule par un orifice circulaire de rayon  $r = 0,5\text{cm}$  situé dans le fond du cylindre.

1) Calculer la vitesse d'écoulement  $v$  à l'orifice de ce récipient lorsque la hauteur de fluide est  $h$ . Vérifier que l'on retrouve bien la loi de Torricelli dans le cas où  $R \gg r$ .

2) Calculer le temps de vidange  $T$  de ce récipient.

1) L'écoulement entre  $A$  à la surface libre du fluide et  $B$  à l'orifice peut être considéré comme stationnaire. On peut appliquer la formule de Bernoulli le long de la ligne de courant entre  $A$  et  $B$  :  $\frac{v_A^2}{2} + g \cdot z_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + g \cdot z_B + \frac{P_B}{\mu}$ .

Or  $P_A = P_B = P_{atm}$  et  $z_A - z_B = h$ .

La conservation du débit entre  $A$  et  $B$  donne :  $v_A \cdot R^2 = v_B \cdot r^2$ , avec  $v_B = v$ .

Aussi,  $\frac{v^2 \cdot r^4}{2 \cdot R^4} + g \cdot h = \frac{v^2}{2}$ , d'où :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}}$$

Bien sûr si  $R \gg r$ , on retrouve bien la loi de Torricelli  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ .

2) Donc la vitesse en  $A$  est :  $v_A = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}} \approx \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = -\frac{dh}{dt}$ .

En intégrant,  $-\int_{h=H}^{h=0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2 \cdot g} \int_{t=0}^{t=T} dt$  soit :  $2\sqrt{H} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2 \cdot g} T$ , d'où :

$$T = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = 128s$$

## 2.4) Clepsydre

Un récipient à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oz$  a sa section horizontale  $S$  qui varie, en fonction de la cote  $z$ , comptée à partir d'un orifice  $O$  de très faible section  $s$  percé au fond.

1) Exprimer l'équation différentielle donnant  $\frac{dz}{dt}$ , la variation de l'altitude de l'eau.

On suppose que la section varie suivant la loi :

$$S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

2) En déduire le temps de vidange entre deux valeurs de la cote.

3) Pour quelle valeur de  $n$  ce temps est-il proportionnel à la variation de niveau ?

1) Bernoulli sur une ligne de courant entre la surface libre et l'orifice donne

$$\frac{p_{atm}}{\mu} + g \cdot z + \frac{v_s^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\mu} + \frac{v_t^2}{2}$$

avec la vitesse de la surface :  $v_s = -\frac{dz}{dt}$ , l'opposé de la variation de l'altitude de l'eau. Le débit est :  $D_v = v_t \cdot s = v_s \cdot S(z) = -\frac{dz}{dt} \cdot S(z)$ . Ainsi,  $v_t \gg v_s$  et Bernoulli devient  $v_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot z}$  aussi,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{s}{S(z)} \sqrt{2 \cdot g \cdot z}$$

2) On intègre

$$z^{(n-\frac{1}{2})} \cdot dz = -\frac{s}{S_0} \sqrt{2 \cdot g} \cdot z_0^n \cdot dt$$

entre deux valeurs de la cote :

$$z_2^{(n+\frac{1}{2})} - z_1^{(n+\frac{1}{2})} = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{s}{S_0} \sqrt{2 \cdot g} \cdot z_0^n \cdot \Delta t$$

Soit :

$$\Delta t = \frac{S_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot z_0^n}{s} \left[ z_1^{(n+\frac{1}{2})} - z_2^{(n+\frac{1}{2})} \right]$$

3) On veut  $\Delta t \propto (z_1 - z_2)$  soit

$$n = \frac{1}{2}$$

c'est à dire un profil parabolique pour réaliser une clepsydre.

### 2.5) Jet d'eau sur le lac de Genève

Le jet d'eau du lac de Genève a un diamètre initial  $d_0 = 107\text{mm}$  et s'élève à une altitude  $H = 156\text{m}$  au-dessus de la canalisation horizontale qui l'alimente. On néglige les pertes par frottement dans l'air.

1) Déterminer :

- 1.a) la surpression  $p$  nécessaire pour le jet,
- 1.b) le débit volumique  $D_v$  du jet.

1)

1.a) Bernouilli le long d'une ligne de champ dans le tuyau, à la sortie du jet et au sommet du jet :

$$\frac{p_t}{\mu} + \frac{v_t^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\mu} + g.H$$

On peut négliger la vitesse  $v_t$  dans le tuyau. La surpression est  $p = p_t - p_{atm}$ , donc

$$p = \mu.g.H = 15\text{bar}$$

1.b) Le débit volumique est  $D_v = v.s = v.\pi.\frac{d_0^2}{4}$ . D'après Bernouilli,  $v = \sqrt{2.g.H}$ , donc

$$D_v = \pi.\frac{d_0^2}{4}\sqrt{2.g.H} = 0,5\text{m}^3/\text{s}$$

### 2.6) Force exercée sur une seringue

Une seringue est formée d'un corps de section constante  $S_1$  et d'une aiguille dont l'extrémité a une section  $S_2 \ll S_1$ . Cette seringue contient un liquide de masse volumique  $\mu$  qui est éjecté en appuyant sur un piston mobile sans frottements.

1) Quelle force un opérateur doit-il exercer sur le piston pour assurer un débit volumique  $D$  d'éjection ?

1) Le débit volumique est  $D = S_1.v_1 = S_2.v_2$ , où  $v_1$  est la vitesse du fluide au contact du piston et  $v_2$  à l'orifice de l'aiguille.

L'écoulement entre  $A$  et  $B$  peut être considéré comme stationnaire. On peut appliquer la formule de Bernouilli le long de la ligne de courant entre  $A$  et  $B$  :  $\frac{v_1^2}{2} + g.z_1 + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + g.z_2 + \frac{P_2}{\mu}$ .

Or  $z_1 = z_2$ ,  $P_2 = P_{atm}$  et  $P_1 = P_{atm} + \Delta P$ .

Aussi,  $\frac{D^2}{2.S_1^2} + \frac{\Delta P}{\mu} = \frac{D^2}{2.S_2^2}$ . soit  $\Delta P = \mu.D^2.\left(\frac{1}{2.S_2^2} - \frac{1}{2.S_1^2}\right)$ .

La force exercée est  $F = \Delta P.S_1$ , d'où :

$$F = \frac{\mu.D^2}{2.S_1}.\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)$$

### 2.7) Tube Venturi

On note  $S_A$  et  $S_B$  les sections d'un tube de Venturi au niveau des points  $A$  (zone 1) et  $B$  (zone 2 d'étranglement :  $S_B < S_A$ ).

Montrer qu'on peut déduire le débit volumique  $D_v$  du fluide de masse volumique  $\mu$  de la dénivellation  $h$  entre du liquide manométrique, de masse volumique  $\mu_0$  en fonction de  $h$ ,  $S_A$  et  $S_B$ .

On note  $S_A$  et  $S_B$  les sections du tube au niveau des points  $A$  (zone 1) et  $B$  (zone 2 d'étranglement :  $S_B < S_A$ ),  $v_A$  et  $v_B$  les vitesses du fluide au niveau de ces sections. La conservation du débit impose :  $S_A.v_A = S_B.v_B$ . De plus, la relation de Bernouilli sur une ligne de fluide entre  $A$  et  $B$  donne :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu}$$

De même, la relation de Bernoulli sur une ligne de fluide entre  $C$  et  $D$  fait intervenir  $h$ , la dénivellation entre  $D$  et  $C$  (ou  $C'$ ) du liquide manométrique, de masse volumique  $\mu_0$  :

$$\frac{P_D}{\mu_0} + g.h = \frac{P_C}{\mu_0}$$

Enfin, on trouve

$$D_v = S_A \cdot S_B \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\mu - \mu_0) \cdot g \cdot h}{\mu \cdot (S_A^2 - S_B^2)}}$$

### 2.8) Tube de Pitot

On s'intéresse à un tube de Pitot. Montrer que l'on peut déduire la vitesse de l'écoulement grâce à la mesure (faite généralement à l'aide d'un manomètre différentiel, comme pour la sonde de Venturi) de la différence de pression entre deux orifices très petits formant :

- une prise de pression axiale en  $A$  placé à l'extrémité du tube où la vitesse est nulle ( $A$  est dit point d'arrêt),
- une prise de pression latérale en  $B$  placé latéralement où la vitesse du fluide n'est pas modifiée.

La viscosité importante dans les prises de pression assure que l'air situé à l'intérieur du tube de Pitot est au repos. On néglige la dénivellation entre  $A$  et  $B$ . Loin du tube, l'écoulement est unidimensionnel avec une vitesse  $v$  et une pression  $P_0$  uniforme.

On peut écrire la relation de Bernoulli appliquée sur une même ligne de courant entre les points  $A_\infty$  et  $A$  en négligeant la dénivellation entre ces points. Faire de même entre  $B_\infty$  et  $B$ .

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P(A_\infty)}{\mu} = \frac{P_0}{\mu}$$

En remarquant que la section du tube de Pitot est très faible devant celle du tuyau, on en déduit que  $v_B \approx v$ .

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P(B_\infty)}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_0}{\mu}$$

Finalement, on peut exprimer la vitesse d'écoulement  $v$  en fonction de  $\mu$ ,  $P_A$  et  $P_B$ .

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu} (P_A - P_B)}$$

### 2.9) Déversoir d'un lac

Un lac de profondeur  $h$ , se vide dans un déversoir, de largeur  $L$ , qui a un seuil suffisamment large pour que, dans la section  $S$  de hauteur  $h' < h$ , la lame d'eau y coule en filets parallèles horizontaux et que la vitesse  $v$  y soit considérée comme uniforme. L'eau est assimilée à un fluide parfait et incompressible.

- 1) Déterminer, en fonction de  $h$  et  $h'$ , le débit volumique  $D_v$ , à travers la section  $S$ .
- 2) Pour quelle valeur de  $h'$  ce débit est-il maximal ?
- 3) Calculer sa valeur.

1)

$$\frac{p_{atm}}{\mu} + g.h = \frac{v^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\mu} + g.h'$$

On en déduit

$$v = \sqrt{2.g.(h - h')}$$

puis le débit volumique  $D_v = S.v$  :

$$D_v = L.h' \sqrt{2.g.(h - h')}$$

2) Ce débit est-il maximal lorsque  $\frac{dD_v}{dh'} = 0$ , soit :

$$\sqrt{2.g.(h - h')} + h' \frac{-2.g}{2\sqrt{2.g.(h - h')}} = 0 \Leftrightarrow 2.g.(h - h') = g.h' \Leftrightarrow h' = \frac{2}{3}h$$

Donc

$$D_{v_{max}} = L \cdot \sqrt{g} \left( \frac{2}{3} h \right)^{\frac{3}{2}}$$

### 2.10) Oscillations dans un tube en U

On s'intéresse à un tube en U, de section constante  $S$ , placé dans un plan vertical, au repos par rapport au référentiel d'étude terrestre supposé galiléen.

Il contient un volume  $V = S.L$  d'un liquide incompressible de masse volumique  $\mu$ . On note  $g$  l'accélération de la pesanteur en ce lieu.

À l'équilibre, les deux surfaces libres du liquide dans les deux branches sont à une même altitude choisie comme origine d'un axe  $Oz$  vertical ascendant.

L'écoulement est supposé parfait (ce qui revient à négliger les forces de frottement intérieur dues à la viscosité du liquide et les forces de tension superficielle).

Le liquide se comporte de la même façon que dans un tube de courant où la vitesse  $v$  est uniforme dans toute la section, et même, dans toute la colonne de longueur  $L$  (car  $\mu = cste$ ).

En tout point  $M$  du fluide, la vitesse est  $\vec{v}(M, t) = \frac{dz}{dt} \vec{e}_t$ , où  $\vec{e}_t$  est le vecteur unitaire suivant la tangente orientée à la ligne de courant passant par  $M$ .

Le long de la ligne de courant  $AB$ , on note  $s$  l'abscisse curviligne, avec  $\int_A^B ds = L$ .

1) Etablir l'équation différentielle :

$$L \cdot \ddot{z} + \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g \cdot z \right]_A^B = 0$$

2) En déduire l'équation différentielle suivie par  $z$  qui permet de donner les caractéristiques du mouvement et en particulier la période  $T$  des oscillations.

1)

2) L'équation différentielle suivie par  $z$  est :

$$L \cdot \ddot{z} + 2 \cdot g \cdot z = 0$$

## 3. Equation d'Euler

### 3.11) Statique des fluides

Retrouver la relation fondamentale de la statique des fluides à partir de l'équation d'Euler.

On écrit  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{\overrightarrow{grad}(P)}{\mu}$  avec  $\vec{v} = \vec{0}$ , soit :  $\vec{g} = \frac{\overrightarrow{grad}(P)}{\mu}$ .

### 3.12) Equilibre géostrophique

On veut étudier le mouvement de l'atmosphère terrestre. Aussi, on se place dans le référentiel terrestre  $R$  non galiléen, en rotation par rapport au référentiel géocentrique  $R_g$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{R/R_g}$ , au voisinage d'un point de la Terre à la latitude  $\lambda$ . On s'intéresse à un écoulement plan, horizontal.

1) Exprimer la projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis massique. Quel est son effet ?

2) Réécrire l'équation d'Euler pour les grands écoulements en régime permanent.

3) Comparer les lignes de courant et les isobares. Dans quel sens tourne l'air atmosphérique ?

1) La projection horizontale de la force d'inertie de Coriolis massique est :

$$\vec{f}_m = 2 \cdot \Omega_{R/R_g} \cdot \sin \lambda \cdot v \cdot \vec{u}$$

avec  $\vec{u}$ , un vecteur unitaire orthogonal à la vitesse  $\vec{v}$ , à droite dans le sens du mouvement.

Aussi, la force de Coriolis tend à faire tourner le fluide vers la droite dans l'hémisphère nord ( $\lambda > 0$ ), et vers la gauche dans l'hémisphère sud ( $\lambda < 0$ ).

2) On peut négliger le terme convectif  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$  devant le terme de Coriolis (pour des grandes distances comme dans le cas des masses d'air atmosphériques).

L'équation d'Euler projetée dans le plan horizontal est

$$\overrightarrow{grad}(P) = 2 \cdot \mu \cdot \Omega_{R/R_g} \cdot \sin \lambda \cdot v \cdot \vec{u}$$

en régime permanent.

3) Un équilibre (dit *géostrophique*) s'établit entre les forces de pression et la force de Coriolis, de sorte que les lignes de courant sont des isobares. Le fluide tourne dans le sens trigonométrique autour des dépressions dans l'hémisphère nord, autour des anticyclones dans l'hémisphère sud.

### 3.13) Nombre de Rossby dans l'atmosphère

1) Ecrire l'équation d'Euler dans le référentiel terrestre non galiléen.

On note  $U$  un ordre de grandeur caractéristique des vitesses de l'écoulement,  $L$  une dimension horizontale caractéristique de celui-ci. On appelle nombre de Rossby (noté  $R_o$ ) d'un écoulement le rapport sans dimension entre le terme d'accélération et le terme lié à la force de Coriolis dans la précédente équation.

2) Évaluer  $R_o$  pour un écoulement atmosphérique typique pour lequel  $U = 10m \cdot s^{-1}$  et  $L = 1000km$ . Commenter le résultat obtenu.

3) Même chose pour un écoulement d'air dans une pièce :  $U = 1m \cdot s^{-1}$  et  $L = 10m$ .

1) L'équation d'Euler dans le référentiel terrestre non galiléen est  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$  et puisque l'écoulement est stationnaire,  $\rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{grad}(p) - 2 \cdot \rho \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ , ce qui donne en ordre de grandeur le nombre de Rossby :

$$R_o = \frac{\rho \frac{U^2}{L}}{2 \cdot \rho \cdot \Omega \cdot U} = \frac{U}{2 \cdot L \cdot \Omega}$$

2)  $R_o \approx \frac{U}{L \cdot \Omega} = 0,14$  de sorte que dans les trois termes de l'équation dynamique, le terme d'accélération est nettement plus petit que les deux autres, qui s'équilibrent donc à peu près :

$$\overrightarrow{grad}(p) \approx -2 \cdot \rho \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

3)  $R_o \approx \frac{U}{L \cdot \Omega} = 1375$  : les forces de Coriolis sont négligeables.

### 3.14) Démonstration de la relation de Bernoulli dans le cas de l'écoulement parfait, irrotationnel, stationnaire, incompressible homogène

On s'intéresse à un écoulement parfait, irrotationnel, stationnaire, incompressible, homogène. Déterminer la formule de Bernoulli, et son domaine d'application.

$$\text{dans tout le fluide} \quad \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g \cdot z = cste$$

### 3.15) Démonstration de la relation de Bernoulli dans le cas de l'écoulement parfait, irrotationnel, stationnaire, barotrope

On s'intéresse à un écoulement parfait, irrotationnel, stationnaire, barotrope. Déterminer la formule de Bernoulli, et son domaine d'application.

$$\text{Dans tout le fluide} : \frac{v^2}{2} + \varphi(P) + g \cdot z = cste.$$

### 3.16) Démonstration de la relation de Bernoulli dans le cas de l'écoulement parfait, irrotationnel, barotrope

On s'intéresse à un écoulement parfait, irrotationnel, barotrope. Déterminer la formule de Bernoulli, et son domaine d'application.

Dans tout le fluide :  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \varphi(P) + g.z = cste.$

### 3.17) Démonstration de la relation de Bernoulli dans le cas de l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible homogène

On s'intéresse à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible homogène.  
Déterminer la formule de Bernoulli, et son domaine d'application.

Le long d'une ligne de champ  $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g.z = cste.$

### 3.18) Ecoulement barotrope pour un gaz parfait

Un fluide considéré comme un gaz parfait est en écoulement isentropique.

1) Montrer que l'écoulement est barotrope.

1) L'équation d'évolution du gaz donnée par la loi de Laplace  $P.V^\gamma = cte$  (transformation isentropique). Cette relation devient :  $P.\mu^{-\gamma} = cte$ . On retrouve les propriétés d'un écoulement barotrope :  $\mu = f(P)$  ne dépend que de  $P$  et  $\varphi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\mu}$ .

### 3.19) Relation de Bernoulli et premier principe de la thermodynamique

1) Montrer que pour un fluide quelconque en écoulement isentropique et stationnaire, l'équation de Bernoulli prend la forme :

$$\frac{v^2}{2} + e_p + h = cte$$

où  $h$  est l'enthalpie massique du fluide.

1) On sait que pour un fluide quelconque en écoulement irrotationnel et stationnaire, l'équation de Bernoulli prend la forme :  $\frac{v^2}{2} + e_p + \varphi(P) = cte$  si l'écoulement est barotrope :  $\frac{\vec{grad}(P)}{\mu} = \vec{grad}(\varphi(P))$ .

Or, en thermodynamique,  $h$  l'enthalpie massique du fluide suit :  $dh = \frac{1}{\mu}dP + T.ds = \frac{1}{\mu}dP$  si l'écoulement est isentropique.

Or, pour un écoulement stationnaire,  $dh = \vec{grad}(h).d\vec{l}$  et  $dP = \vec{grad}(P).d\vec{l}$ .

Aussi,  $\frac{\vec{grad}(P)}{\mu} = \vec{grad}(\varphi(P))$ , avec  $\varphi(P) = h$ .

En remplaçant dans l'équation de Bernoulli on trouve :

$$\frac{v^2}{2} + e_p + \varphi(P) = \frac{v^2}{2} + e_p + h = cte$$

# Travaux dirigés

vendredi 10 novembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## La trompe à vide

Extraits de la notice d'un matériel pour la chimie  
*site du vendeur*

De l'eau pour faire le vide

Accueil > Résultats de votre Recherche > Page Produit

Trompe à eau

Pour la création de vide et l'aspiration de liquides et de vapeurs (connecter un piège à froid au besoin).

Particulièrement efficace avec une pression d'eau faible.

- *Consommation d'eau de 300 L/h ;*
- *Pression finale de 20 mbar avec une pression de l'eau de 1 bar ;*
- *Volume d'aspiration,  $\pm 270$  L d'air par heure ;*
- *Bonne résistance chimique ;*
- *Température d'utilisation prolongée max. de 80°C.*

Les trompes à eau sont livrées avec une olive (diamètre extérieur 12 – 13 mm) pour le raccord pour l'eau et une autre olive (diamètre extérieur 9 – 11 mm) pour le raccord au vide.

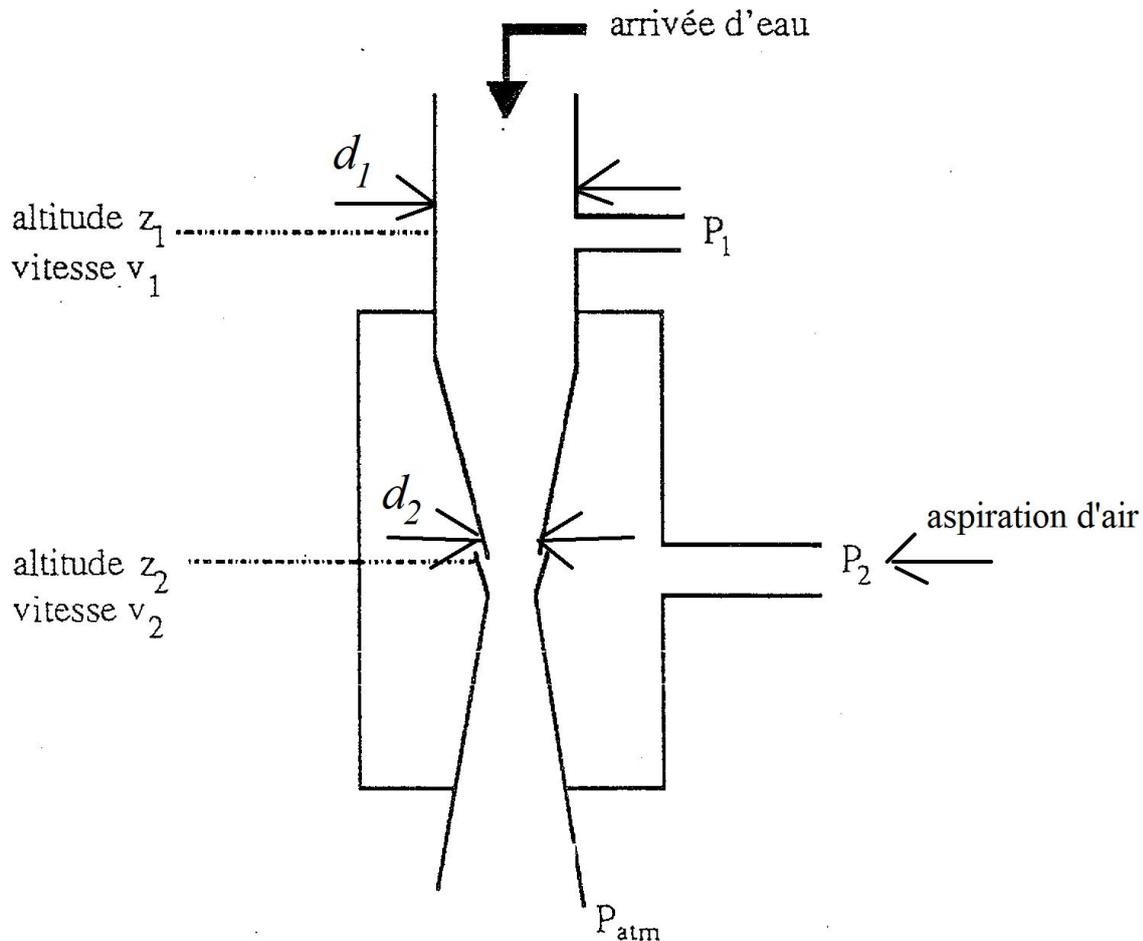


## Énoncé

1) Faire le schéma d'une trompe à eau et en donner les dimensions caractéristiques, en particulier le diamètre du goulot d'étranglement.

## Correction

Le schéma de la trompe à eau est donné ci-dessous :



Les données du constructeur permettent de connaître :

- le diamètre d'arrivée de l'eau  $d_1 \approx 10$  mm ;
- la pression d'arrivée de l'eau  $P_1 = 1$  bar ;
- la pression d'aspiration de l'air  $P_2 = 20$  mbar ;
- la hauteur de chute pour l'étranglement  $z_1 - z_2 \approx 5$  cm ;
- le débit volumique de l'eau  $D_V = 300 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} = 83 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

La conservation du débit donne entre l'entrée et l'étranglement :

$$D_m = \mu v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = \mu v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = \mu D_v$$

L'application de la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre l'entrée et l'étranglement donne :

$$\frac{P_1}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\mu} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

soit

$$\frac{P_1 - P_2}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{4D_V}{\pi d_1^2} \right)^2 + g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{4D_V}{\pi d_2^2} \right)^2$$

ou encore

$$d_2 = \left[ \frac{8D_V}{\frac{8D_V}{d_1^4} + \pi^2 \frac{P_1 - P_2}{\mu} + \pi^2 g(z_1 - z_2)} \right]^{1/4} = 5,1 \text{ mm}$$

# Devoir non surveillé

vendredi 10 novembre 2017

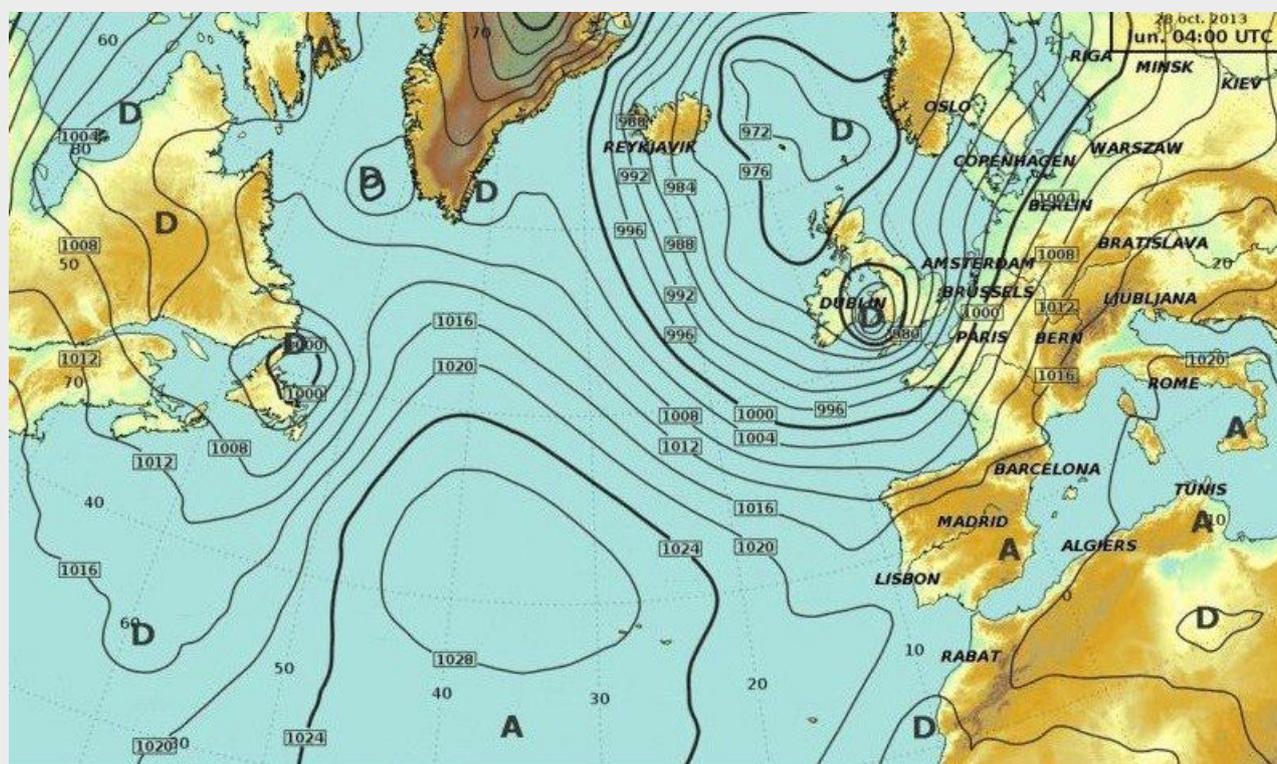
Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

## La tempête Christian

Météo France

extraits issus du site «[comprendre.meteofrance.com/pedagogique/pour\\_tous/glossaire/](http://comprendre.meteofrance.com/pedagogique/pour_tous/glossaire/)»

En Europe, la tempête Christian a fait onze victimes le 28 octobre 2013. Des vents soufflant à plus de 160 km/h ont causé le chaos dans le sud de l'Angleterre et le pays de Galles.



Doc 1 - – carte météorologique du 28 octobre 2013 à 4h (temps universel - UTC).

### Surface isobare

Dans l'atmosphère, une surface isobare est une surface réunissant à un instant déterminé les points en lesquels la pression atmosphérique est égale à une même valeur donnée.

Sur ces surfaces plus ou moins ondulées et incurvées que constituent les surfaces isobares, les météorologistes réunissent par des courbes les points possédant la même altitude géopotentielle; de telles courbes, appelées lignes isohypses, sont analogues à des courbes de niveau d'une carte géographique et mettent ainsi en évidence la topographie des surfaces isobares : cette topographie, essentielle pour l'observation et la prévision du temps, se décrit principalement en termes d'anticyclones, de dépressions, de dorsales et de thalwegs, et aussi de cols barométriques et de marais barométriques (sur une surface isobare, un col barométrique est une région en forme de selle séparant deux anticyclones et deux dépressions disposés en croix, et un marais barométrique est une région faiblement dépressionnaire analogue à une plaine).

### Vent géostrophique

On constate qu'en chaque point, le vecteur vent réellement observé s'écarte peu en vitesse et direction d'un vecteur vent "théorique" appelé vent géostrophique, qui possède deux propriétés :

- il est tangent à la ligne isohypse passant par ce point et son sens est tel qu'il laisse les altitudes géopotentielles plus basses sur sa gauche dans l'hémisphère Nord, sur sa droite dans l'hémisphère Sud ;  
 - sa vitesse est d'autant plus élevée que les distances entre lignes isohypses successives au voisinage du point d'observation sont plus petites. Plus précisément, à l'échelle synoptique, cette vitesse peut être considérée comme proportionnelle à l'intensité du gradient isobare de géopotentiel (donc à la pente de la surface isobare) en ce point.

Le fait que le vent souffle pratiquement dans la direction des lignes isohypses pose question, puisque l'on s'attendrait à un mouvement de l'air dirigé des pressions plus hautes vers les pressions plus basses, et donc perpendiculaire à ces courbes : c'est en réalité la force de Coriolis qui, en déviant ce mouvement vers la droite dans l'hémisphère Nord, vers la gauche dans l'hémisphère Sud, compense l'action des forces de pression horizontales et rend le déplacement de l'air à peu près parallèle aux lignes isohypses. Cette répartition générale des vents (hors de la zone équatoriale) exprime l'existence d'un état d'équilibre dynamique dont les mouvements de l'atmosphère tendent sans cesse à se rapprocher sans jamais l'atteindre.

### Force de Coriolis

Sur Terre, la force de Coriolis s'applique en particulier aux parcelles d'air et d'eau constituant respectivement l'atmosphère et l'océan. Lorsque la composante horizontale  $\vec{C}_h$  de cette force s'exerce sur le centre de masse B de l'une de ces parcelles, elle est de direction orthogonale à la composante horizontale  $\vec{V}_h$  de la vitesse de B et a une valeur numérique proportionnelle au produit  $fmv_h$ , où  $m$  représente la masse de la parcelle et  $v_h$  la valeur numérique de  $\vec{V}_h$  ; le coefficient de proportionnalité est la valeur absolue d'un nombre symbolisé par la lettre  $f$  et appelé le paramètre de Coriolis, qui prend la forme  $f = 2\Omega \sin \lambda$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation (constante) de la Terre sur elle-même et  $\lambda$  la latitude où se trouve B : ce nombre  $f$ , positif dans l'hémisphère Nord, négatif dans l'hémisphère Sud, a la dimension du produit d'une mesure angulaire par l'inverse d'un temps (il vaut environ  $10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  pour  $\lambda = +45^\circ$ ) et n'est autre que la valeur numérique prise par la composante verticale en B du tourbillon de la Terre dans un référentiel galiléen.

### Synoptique

L'adjectif "synoptique" en météorologie qualifie les phénomènes atmosphériques dont l'ordre de grandeur est de quelques milliers de kilomètres pour les dimensions horizontales, de quelques kilomètres pour la dimension verticale et de quelques jours pour la durée ; l'échelle spatio-temporelle ainsi décrite s'appelle précisément l'échelle synoptique et constitue par excellence le cadre de la prévision opérationnelle sur une échéance de un à trois jours dans les zones tempérées : pareille prévision repose en effet sur l'évolution de systèmes anticycloniques et dépressionnaires de la basse atmosphère qui constituent autant d'objets météorologiques généralement bien ajustés à cette échelle dans l'espace et le temps, de même que les perturbations atmosphériques et les zones frontales susceptibles de s'y développer.

### Buys-Ballot (Christophorus Henricus)

La règle de Buys-Ballot indique, premièrement, que dans l'hémisphère Nord la direction du vent - compte tenu de son sens - laisse les basses pressions sur sa gauche et les hautes pressions sur sa droite (la disposition inverse valant pour l'hémisphère Sud), et deuxièmement, que la vitesse du vent est d'autant plus élevée que les lignes isobares sont plus resserrées.

## Enoncé

1)

1.a) Représenter une vue de la Terre en coupe, avec O, le centre de la Terre, les pôles nord (PN) et sud (PS), un point B à la surface de la Terre,  $\lambda$  la latitude de B et le vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  de la Terre.

1.b) Calculer la valeur numérique de  $\Omega$ .

2) Vérifier que la composante horizontale de la force de Coriolis  $\vec{C}_h$  exercée sur une "parcelle d'atmosphère" de masse  $m$ , de centre de masse en B et de vitesse  $\vec{v}$  est bien cohérente avec l'expression donnée par le document.

3)

3.a) En faisant un bilan sur un écoulement unidimensionnel entre une zone de haute pression  $P_e$  à l'entrée et une zone de basse pression  $P_s$  à la sortie, exprimer la résultante  $\vec{\Pi}$  des forces de pression appliquées sur le fluide.

3.b) En passant à un système infinitésimal, exprimer la résultante des forces de pression exercée sur la "parcelle d'atmosphère" de centre de masse en B et de volume  $V$  en fonction de  $\overrightarrow{\text{grad}} P$ .

4) En supposant «l'existence d'un état d'équilibre dynamique», démontrer la règle de Buys-Ballot.

5) Sur la carte météo,

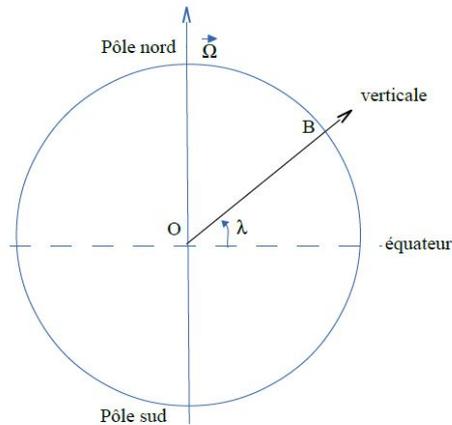
5.a) Déterminer où sont les zones de hautes et basses pressions.

- 5.b)** Représenter à plusieurs endroits des vecteurs vitesse horizontaux de l'atmosphère.
- 5.c)** Où les vents sont-ils les plus violents ?
- 6)**
- 6.a)** En utilisant le fait que la valeur numérique du rayon de la Terre est  $R \approx 6700$  km, évaluer sur la carte météo la valeur maximale atteinte par la vitesse du vent.
- 6.b)** Est-ce cohérent avec les données du chapeau ?

## Correction

1)

1.a) Le schéma est donné sur la figure suivante :

1.b)  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  où  $T = 24h = 86400s$  est la période de rotation de la Terre. Donc  $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .2)  $\vec{C} = -2m\Omega (\sin \lambda \vec{e}_z + \cos \lambda \vec{e}_x) \wedge (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y)$ , où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire vers le haut. Aussi,

$$\vec{C}_h = -2m \sin \lambda \Omega (v_x \vec{e}_y - v_y \vec{e}_x) \Rightarrow C_h = 2m \sin \lambda \Omega v_h$$

On retrouve bien l'expression donnée dans le document.

3) Forces de pression

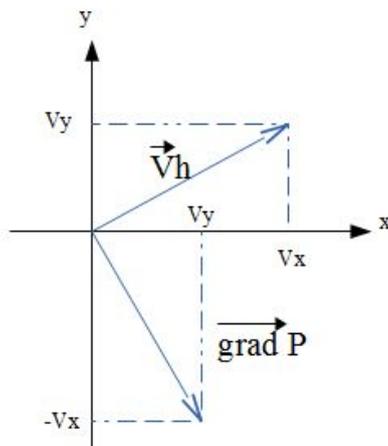
3.a)  $\vec{\Pi} = S_e P_e \vec{u}_x - S_s P_s \vec{u}_x = (S_e P_e - S_s P_s) \vec{u}_x = (P_e - P_s) S \vec{u}_x$  si les sections sont identiques.3.b) La dernière relation peut se réécrire  $\vec{\Pi} = \frac{P_e - P_s}{\ell} S \ell \vec{u}_x = \frac{P_e - P_s}{\ell} V \vec{u}_x$ . Aussi, la résultante des forces de pression appliquée sur la particule de fluide de volume  $V$  est

$$\vec{\Pi} = -V \overrightarrow{\text{grad}P}$$

4) Dans le cas de l'équilibre :  $\vec{C}_h + \vec{\Pi} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}P} = -2\mu \sin \lambda \Omega (v_x \vec{e}_y - v_y \vec{e}_x)$ 

$$\|\overrightarrow{\text{grad}P}\| = 2\mu |\sin \lambda| \Omega v_h$$

Ainsi, "la vitesse du vent est d'autant plus élevée que les lignes isobares sont plus resserrées".

Quant à la direction, dans l'hémisphère Nord,  $\sin \lambda > 0$ . Un schéma permet de se convaincre que "la direction du vent - compte tenu de son sens - laisse les basses pressions sur sa gauche et les hautes pressions sur sa droite". Cf. figure suivante :

5)

5.a) Les zones de basses pressions sont notées "D" (comme dépression) sur la carte, et les zones de hautes pressions sont notées "A" (comme anticyclone).

5.b) Sur la carte de la figure suivante, on a représenté  $\overrightarrow{\text{grad}P}$  ainsi que  $\vec{V}_h$ .



5.c) Cela, là où le vent est le plus fort, c'est-à-dire là où les lignes isobares sont les plus resserrées.

6)

6.a) En utilisant le fait que la valeur numérique du rayon de la Terre est  $R \approx 6700$  km, on peut évaluer sur la carte météo l'échelle grâce aux valeurs écrites de  $\lambda$ . Soit

$$\|\vec{\text{grad}P}\| \approx \frac{(1000 - 968) \times 10^2}{1000 \times 10^3} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$$

donc

$$v_h = \frac{3,2 \times 10^{-3}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1,2 \times 7,3 \times 10^{-5}} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6.b) C'est cohérent avec les données du chapeau car on trouve donc  $v_h = \frac{3,2 \times 10^{-3}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1,2 \times 7,3 \times 10^{-5}} = 93 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , soit une centaine de kilomètres par heure.