

Électrostatique

Notes de cours

mardi 16 janvier 2018

I- Propriétés du champ électrostatique

1. Sources du champ électrostatique

Charge électrique *s'y retrouver*

les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire e ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C).
La charge électrique q en coulomb (C) est quantifiée.

Densité volumique de charge *définition*

La charge totale Q portée par un volume V est

$$Q = \iiint_{M \in V} \rho(M) \cdot d^3\tau$$

où ρ en $C \cdot m^{-3}$ est la densité volumique de charge.

Si on dispose d'une assemblée de particules numérotées i , de charge q_i et de densité volumique n_i ,

$$\rho = \sum_i n_i \cdot q_i$$

La densité volumique de charge ne dépend pas du référentiel.

Densité surfacique de charge *s'y retrouver*

La charge totale Q portée par une surface S est

$$Q = \iint_{M \in S} \sigma(M) \cdot d^2S$$

où σ en $C \cdot m^{-2}$ est la densité surfacique de charge

Densité linéique de charge *s'y retrouver*

La charge totale Q portée par une courbe C est

$$Q = \int_{M \in C} \lambda(M) \cdot dl$$

où λ en $C \cdot m^{-1}$ est la densité linéique de charge.

Invariances *s'y retrouver*

On discerne en particulier les symétries

- plane : $\rho(x, y, z) = \rho(x, y)$ ou $\vec{j}(x, y, z) = \vec{j}(x, y)$;
- cylindrique : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$ ou $\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, z)$;

- circulaire : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$;
- sphérique : $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$ ou $\vec{j}(r, \theta, \varphi) = \vec{j}(r)$.



Plan de symétrie et d'antisymétrie pour les charges *s'y retrouver*

Pour la distribution de charge,

$$(xOy) \text{ est plan de symétrie } \Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

$$(xOy) \text{ est plan d'antisymétrie } \Leftrightarrow \rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$$



Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de charges *schéma*

La figure 1 représente un exemple de plans de symétrie (à gauche) et d'un plan d'antisymétrie (à droite).

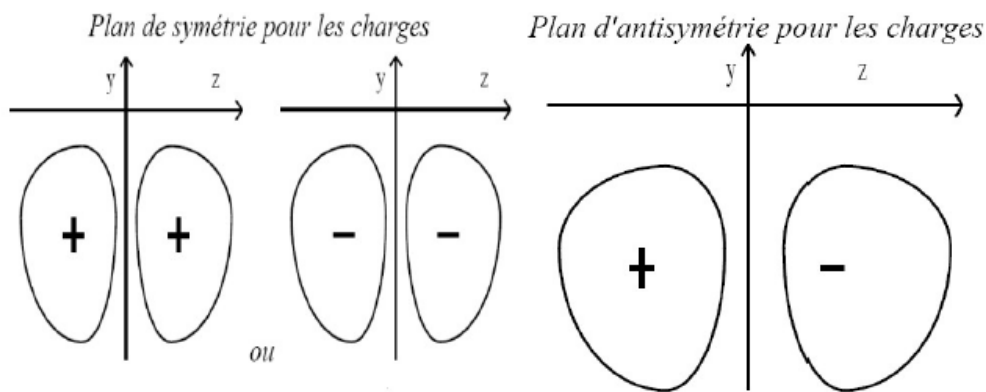


FIGURE 1 – Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie pour une distribution de charges



1 Symétries d'une distribution cylindrique *exercice*

▷ Rechercher les symétries (invariances, plans de symétrie et d'antisymétrie) d'une distribution cylindrique infinie d'axe (Oz) , de rayon R de charge (le cylindre est uniformément chargé) ;

▷ On se place dans un repère cylindrique d'axe (Oz) .
 $\rho(r)$, de plans de symétrie $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, de plans de symétrie (\vec{u}_r, \vec{u}_z) .

2. Flux du champ électrostatique



Équation de Maxwell Gauss *définition*

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

avec la permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

👁 Interprétation de l'équation de "Maxwell Gauss" en électrostatique *schéma*

La figure 2 représente le champ \vec{E} diverge des charges positives et converge vers les charges négatives.

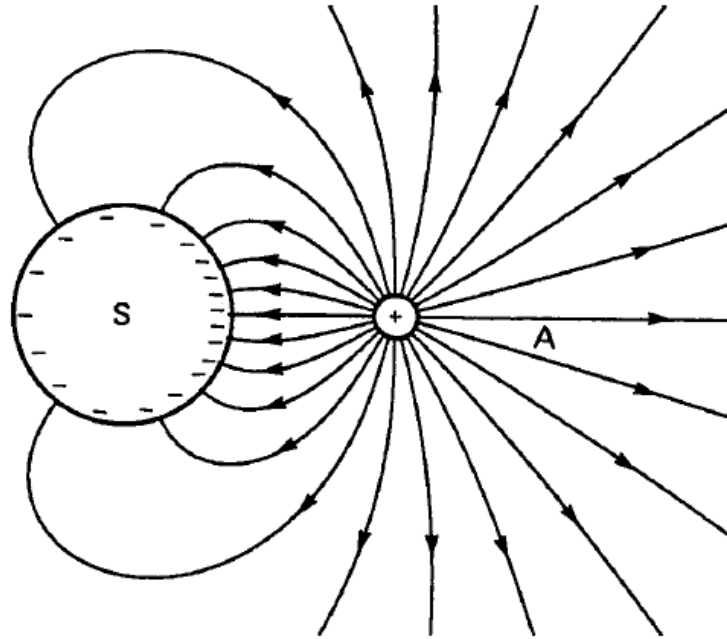


FIGURE 2 – Interprétation de l'équation de "Maxwell Gauss" en électrostatique

🔪 2 Théorème de Gauss *théorème*

En intégrant "Maxwell Gauss" et en utilisant Green Ostrogradsky, on trouve que \Rightarrow

Si $Q_{int} = \iiint_{M \in V} \rho(M) d^3\tau$ est la charge électrique intérieure au volume V délimité par la surface fermée Σ ,

$$\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

🔪 3 Zones de fort champ électrostatique dans une région vide de charge *théorème*

On décompose le flux en trois surfaces, l'une donnant un flux nul car le champ électrique est lui orthogonal, les deux autres se conservant.

Ainsi, le flux du champ électrique se conserve le long d'un tube de champ dans une région vide de charge.

Donc les zones de fort champ électrostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ électrostatique sont les plus resserrées. \Rightarrow

Les zones de fort champ électrostatique (en norme) sont les zones où les lignes de champ électrostatique sont les plus resserrées.

3. Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

📎 Équation de Maxwell Faraday *définition*

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4 Potentiel et champ électrostatiques *théorème*

En électrostatique, l'équation de "Maxwell Faraday" se simplifie en

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Comme le rotationnel est nul, on peut écrire : \Rightarrow

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

où V est le potentiel scalaire (que l'on appelle potentiel électrostatique).

5 Ligne de champ électrostatique et surfaces isopotentielles *théorème*

trivial. \Rightarrow

\vec{E} est orthogonal aux surfaces isopotentielles et va vers les potentiels décroissants.

Interprétation de l'expression de Maxwell-Faraday en statique *schéma*

La figure 3 représente les lignes de champ de \vec{E} sont orthogonales aux surfaces isopotentielles et orientées vers les potentiels décroissants.

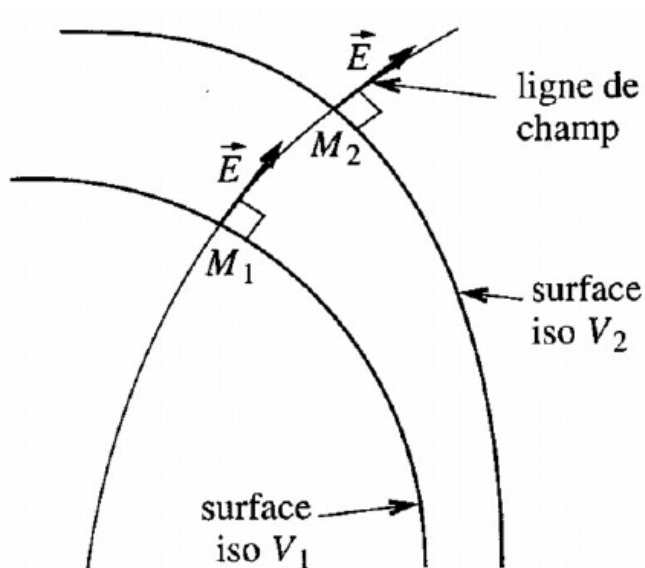


FIGURE 3 – Interprétation de l'expression de Maxwell-Faraday en statique

6 Equation de Poisson suivie par le potentiel électrostatique *théorème*

Maxwell-Gauss :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \text{div}(\vec{E}) = \text{div}(-\text{grad}(V)) = -\Delta V$$

\Rightarrow

Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

II- Exemples de champs électrostatiques



Visualisation des champs électrostatiques *vidéo*

On peut visualiser les lignes de champ électrostatique grâce à des grains de semoule dans de l'huile de vaseline.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



Utilisation des symétries *s'y retrouver*

le principe de Curie énonce que les symétries des causes se retrouvent parmi les symétries des conséquences.

On déduit du principe de Curie que le champ conséquence a (au moins) les symétries de la distribution cause.

Le potentiel scalaire V sera symétrique par rapport aux plans de symétrie Π , et antisymétrique par rapport aux plans d'antisymétrie Π^* de sa cause.

Les vrais vecteurs (comme \vec{E}) appartiennent aux plans de symétrie Π , et sont orthogonaux aux plans d'antisymétrie Π^* des causes.



7 Détermination d'un champ électrostatique en symétrie cylindrique *exercice*

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe (Oz) , de charge (le cylindre de rayon R est uniformément chargé). En déduire les symétries (en statique) de V et \vec{E} .

$\rho(r)$, de plans de symétrie $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, et (\vec{u}_r, \vec{u}_z) . Donc $V(r)$ et $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$.



8 Loi de Coulomb : champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle *théorème*

On se place dans un repère sphérique de centre O . La distribution de charge ne dépend que de r , donc \vec{E} et $V(r)$ aussi. Tous les plans qui contiennent O sont plans de symétrie donc $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$. On applique le théorème de Gauss sur une sphère centrée sur O de rayon r :

$$\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$,

$$\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 OM}$$

\Rightarrow

Les champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle q en O sont

$$V(M) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 OM} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$



Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle *schéma*

La figure 4 représente les champ (en rouge) et potentiel (en bleu) électrostatiques créés par une charge ponctuelle (positive à gauche et négative à droite).

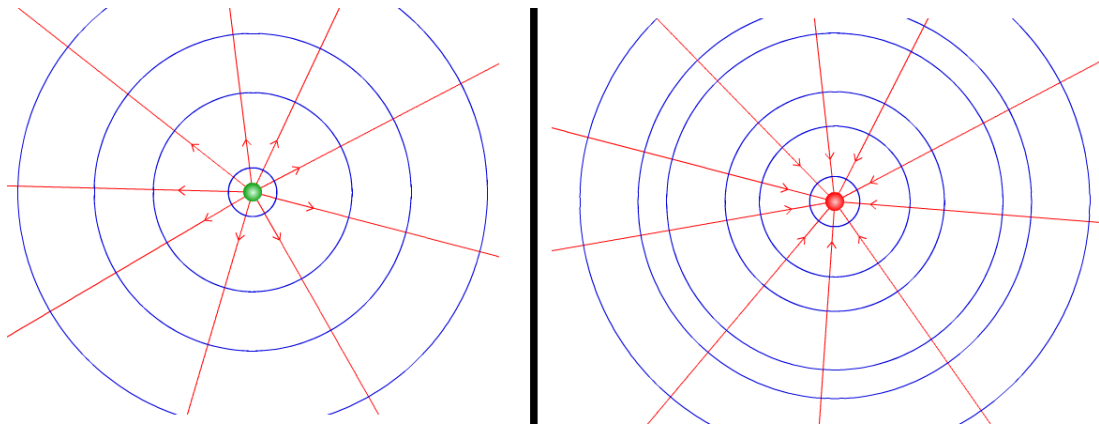


FIGURE 4 – Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle

9 Interaction entre deux charges ponctuelles *exercice*

On s'intéresse à une charge ponctuelle q en O . Une autre charge ponctuelle q' se trouve en M .

- ▷ Déterminer la force qu'exerce O sur M .
- ▷ Déterminer l'énergie potentielle d'interaction entre les deux charges.

▷ La force est

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = \frac{q q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = q' \vec{E}(M)$$

▷ La force dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -\vec{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow q' \vec{E}(M) = -q' \vec{\text{grad}}(V) = -\vec{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow E_p = q' V(M)$$

Principe de superposition *s'y retrouver*

Comme les équations de Maxwell sont linéaires, pour déterminer le champ ou le potentiel électrostatiques en M créés par plusieurs charges ponctuelles q_i positionnées en P_i , il suffit de superposer les sources :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 P_i M} \text{ et } \vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

Illustration du principe de superposition dans le cas de deux charges ponctuelles *schéma*

La figure 5 représente les lignes de champ (en rouge) créées par deux charges ponctuelles de même signe. Le champ total \vec{E}_{tot} est la superposition des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés par chacune des deux charges :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

10 Modélisation de l'atome d'hydrogène *exercice*

- ▷ Déterminer l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène.

▷ On peut modéliser le noyau de l'atome d'hydrogène par un proton ponctuel de charge e en O . Le champ de Coulomb donne un ordre de grandeur pour une distance $r \approx a_0 = 0,5 \text{ \AA}$:

$$\|\vec{E}(M)\| \approx \frac{e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a_0^2} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (0,5 \times 10^{-10})^2} = 6 \times 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

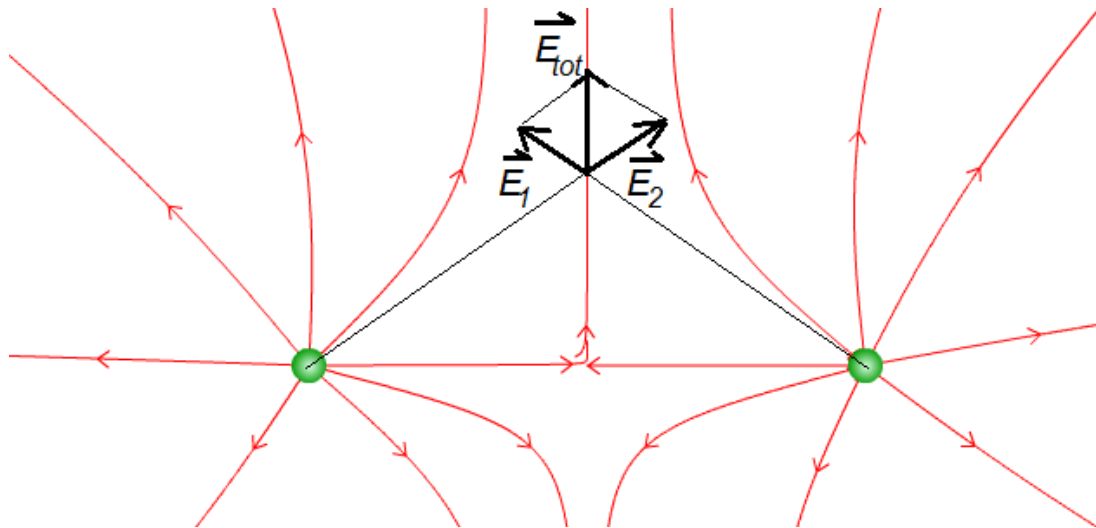


FIGURE 5 – Illustration du principe de superposition dans le cas de deux charges ponctuelles

✳ Modèle de Thomson de l'atome *s'y retrouver*

En 1904, JJ Thomson propose le modèle suivant de l'atome :

- la charge positive $Q = Ze$ de l'atome est répartie de façon uniforme dans une sphère de rayon R ;
- les électrons, ponctuels, de charge $-e$ se déplacent à l'intérieur de cette sphère.

🔪 11 Champ électrostatique dans le cadre du modèle de l'atome de Thomson *exercice*

On se place dans le cadre du modèle de l'atome de Thomson.

- ▷ Déterminer la densité volumique de la charge positive à l'intérieur de l'atome.
- ▷ En déduire le champ créé par la charge positive à l'intérieur de l'atome.

▷ La densité volumique de charge est :

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

▷ On se place dans un repère sphérique de centre O . La distribution de charge ne dépend que de r , donc \vec{E} et $V(r)$ aussi. Tous les plans qui contiennent O sont plans de symétrie donc $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$. On applique le théorème de Gauss sur une sphère centrée sur O de rayon r :

$$\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho r}{3 \cdot \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

donc

$$\vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi \cdot \varepsilon_0 R^3} \vec{u}_r$$

🔪 12 Energie de constitution d'un noyau atomique *exercice*

On modélise un noyau atomique par une boule uniformément chargée de charge Q et de rayon R .

- ▷ Déterminer la densité volumique de charge ρ du noyau.
- ▷ On cherche à exprimer l'énergie de constitution du noyau à un préfacteur numérique près (K sans unité) par analyse dimensionnelle, sous la forme :

$$E_{noyau} = K \left(\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \right)^\gamma Q^\alpha R^\beta$$

Déterminer γ , α et β .

- ▷ Obtenir le préfacteur numérique K en construisant le noyau par adjonction progressive de charges

apportées de l'infini.

▷ Justifier la nécessité de l'interaction forte.

▷ La densité volumique de charge est

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

▷ Les unités des différentes grandeurs sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = qV \Rightarrow [E_{noyau}] = C \cdot V \\ \left[\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \right] = F^{-1} \cdot m = V \cdot C^{-1} \cdot m \\ [Q] = C \\ [R] = m \end{array} \right.$$

d'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \gamma + \beta \\ 1 = -\gamma + \alpha \\ 1 = \gamma \end{array} \right.$$

Ainsi, $\gamma = 1$, $\beta = -1$ et $\alpha = 2$, soit

$$E_{noyau} = \frac{K Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 R}$$

▷ Supposons que la sphère de rayon $r < R$ et de densité volumique $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ donc de charge $q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ ait déjà été construite.

Pour faire croître r de dr , il s'agit de faire venir de l'infini la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$.

Ce faisant, le travail est

$$\delta W = dq(V(r) - V(\infty)) = dq \frac{q(r)}{4\pi \cdot \epsilon_0 r} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi \cdot \epsilon_0 r} \rho 4\pi r^2 dr$$

Reste à intégrer pour trouver l'énergie de constitution du noyau :

$$E_{noyau} = \int_{r=0}^{r=R} \frac{4}{3} \frac{\rho^2 \pi}{\epsilon_0} r^4 dr = \frac{4}{3} \frac{\rho^2 \pi}{\epsilon_0} \frac{R^5}{5} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\epsilon_0} \frac{3^2 Q^2}{(4\pi)^2 R^6} \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 R}$$

aussi $K = \frac{3}{5}$.

▷ Comme cette énergie est positive, l'état où les nucléons sont dans le noyau est moins stable que lorsqu'ils sont éloignés. Il y a donc une interaction qui stabilise le noyau : c'est l'interaction forte.



Analogie entre champ gravitationnel et champ électrostatique *s'y retrouver*

On peut faire l'analogie suivante :

$$\begin{array}{l} \vec{F}_e = -\frac{q \cdot q'}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}_r \leftrightarrow \vec{F}_g = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r \\ q \leftrightarrow m \\ \vec{E} \leftrightarrow \vec{A} \\ \frac{-1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \leftrightarrow G \end{array}$$

L'analogie de $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ est :

$$\text{div} \vec{A} = -4\pi \cdot G \cdot \mu$$

L'analogie de $\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ est :

$$\oiint \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = -4\pi \cdot G \cdot M_{int}$$

qui serait une sorte de "théorème de Gauss pour la gravitation".

13 Utilisation de l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel *exercice*

▷ Montrer qu'en dehors d'un astre à symétrie sphérique, tout se passe comme si l'astre était ponctuel.

▷ Invariances : $\mu(r) \Rightarrow \vec{A}(r)$. Les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont plans de symétrie. Comme \vec{A} est un vrai vecteur, $\vec{A} = A_r \vec{u}_r$. En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de centre O et de rayon $r \geq R_T$, on obtient :

$$\oiint \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = A_r(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M_T \Rightarrow$$

$$\vec{A} = -\frac{G \cdot M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

Hors de l'astre (si $r \geq R_T$), tout se passe effectivement comme si l'astre était ponctuel. En particulier, en $r = R_T$, $\vec{F} = -G \frac{m \cdot M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -m \cdot g \cdot \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\vec{A}(r = R_T) = -\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \vec{u}_r$$

14 Plan infini uniformément chargé en surface *exercice*

On s'intéresse au plan yOz chargé uniformément en surface, de charge surfacique σ .

▷ Déterminer le champ électrostatique régnant dans l'espace.

▷ L'étude des symétries montre que la distribution de charges ne dépend que de x donc $\vec{E}(x)$ et que les plans contenant \vec{u}_x sont plans de symétrie pour σ . Donc $\vec{E} = E_x(x) \vec{u}_x$. D'autre part $E_x(x)$ est une fonction impaire car $V(x)$ est paire.

On peut choisir comme surface de Gauss un cylindre d'axe Ox de surface S , symétrique par rapport au plan yOz (terminé en $-x$ et $+x$) :

$$\oiint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = S E_x(x) - S E_x(-x) = 2 S E_x(x)$$

et

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{S\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_x(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Condensateur plan *schéma*

La figure 6 représente un condensateur plan constitué de deux plans parallèles (les armatures) portant des densités superficielles de charges opposées et uniformes.

15 Champ électrique régnant dans un condensateur plan et capacité *exercice*

▷ En partant du champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$ (où \vec{n} est un vecteur unitaire qui s'écarte du plan), déduire le champ régnant entre les armatures d'un condensateur plan.

▷ En déduire la capacité C du condensateur plan.

▷ Le théorème de superposition donne :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{n}_1 + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{n}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

▷ La différence de potentiel entre les deux armatures est

$$U = \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} dV = - \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{x=x_0}^{x=x_0+d} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0}$$

Or $U = \frac{q}{C} = \frac{S\sigma}{C}$, donc

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

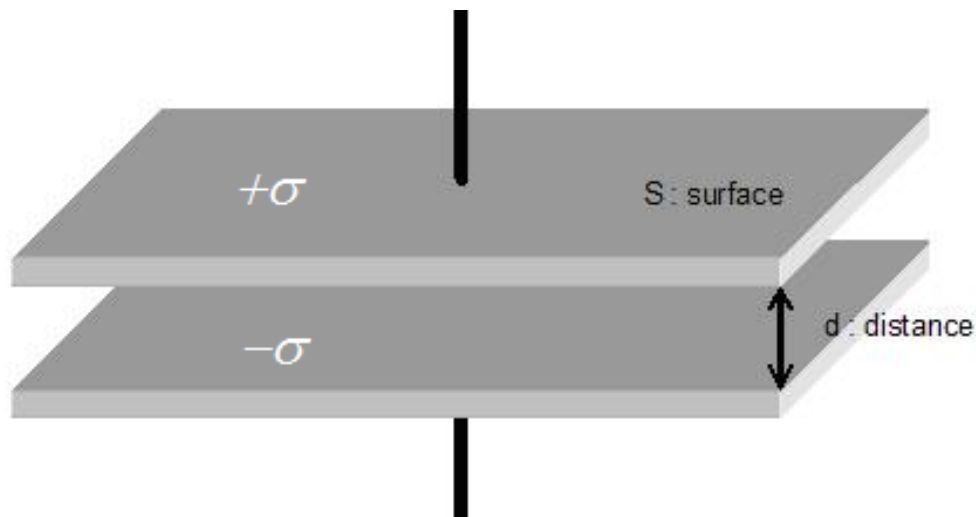


FIGURE 6 – Condensateur plan

16 Capacité du condensateur plan et densité volumique d'énergie électrostatique *exercice*

▷ En partant de la capacité du condensateur plan $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ et du champ électrostatique $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ qui règne entre les armatures, déterminer la densité volumique d'énergie électrostatique dans l'espace entre les armatures en fonction de E .

▷ L'énergie du condensateur plan est

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{d (S \sigma)^2}{2 \epsilon_0 S} = \frac{d S E^2 \epsilon_0^2}{2 \epsilon_0} = d S \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

la densité volumique d'énergie est donc $e_C = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Champ disruptif dans l'air *à retenir*

L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, il s'ionise. C'est le cas quand la foudre traverse l'atmosphère. La valeur du champ disruptif de l'air est : $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

III- Dipôle électrostatique

1. Définitions

Dipôle électrostatique : *définition*


Un dipôle est une distribution de charges D ,

- de charge totale nulle,
- dont le barycentre des charges positives ($+q$ en P)
- est distinct du barycentre des charges négatives ($-q$ en N).


Le moment dipolaire électrostatique (en $\text{C} \cdot \text{m}$) est

$$\vec{p} = +q \overrightarrow{NP} = \iiint_{M \in D} \rho(M) \overrightarrow{OM} d^3\tau$$

où O est un point quelconque.

 **remarque**

en chimie, l'unité est le debye ($1 \text{ D} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$).

 **Un exemple de dipôle : la molécule d'eau schéma**

La figure 7 représente une molécule d'eau (à gauche) et le moment dipolaire associé. A droite, la solvatation d'un cation Na^+ par les molécules d'eau.

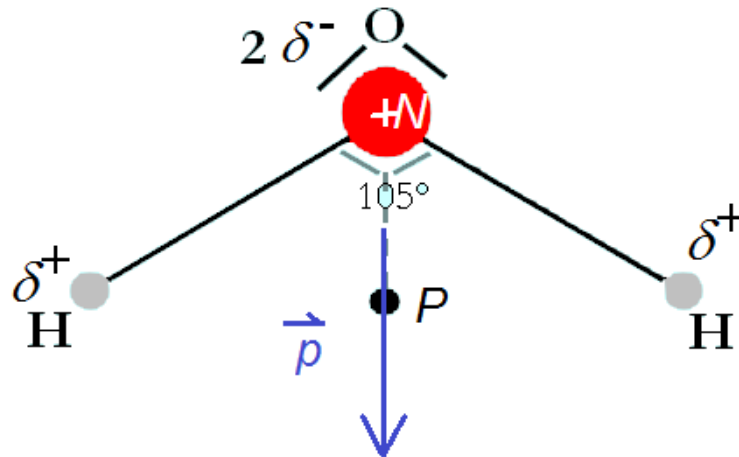


FIGURE 7 – Un exemple de dipôle : la molécule d'eau


 **Polarisabilité s'y retrouver**

en absence de champ électrique extérieur, $\vec{p} = \vec{p}_0$, on parle de dipôle "statique" (qui peut être nul).

Un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} induit un moment dipolaire électrique $\vec{p}_{induit} = \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$ où α est la polarisabilité.

Dans le cas général,

$$\vec{p} \approx \vec{p}_0 + \alpha \cdot \vec{E}_{ext}$$

 **17 Expression de la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson exercice**

On se place dans le cas du modèle de l'atome de Thomson. Le champ créé par la charge positive est alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r$$

▷ Où se trouve la position d'équilibre d'un électron dans ce champ ? En déduire le moment dipolaire \vec{p}_0 de l'atome.

▷ Reprendre les questions précédentes dans le cas où l'atome est plongé dans un champ extérieur \vec{E}_0 . En déduire la polarisabilité α de l'atome. Montrer que celle-ci et le volume de l'atome ont le même ordre de grandeur.

▷ La position d'équilibre d'un électron en absence de champ extérieur est en O . Aussi, N et P sont-ils superposés : le moment dipolaire de l'atome est nul : $\vec{p}_0 = \vec{0}$.

▷ Dans un champ extérieur \vec{E}_0 , l'électron se trouve en $\vec{r} = r \vec{u}_r$ tel que

$$-e \vec{E}_0 - e \frac{Qr}{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3} \vec{u}_r = \vec{0}$$

aussi

$$\overrightarrow{ON} = r \vec{u}_r = -\frac{4\pi \cdot \epsilon_0 R^3}{Q} \vec{E}_0$$

donc le moment dipolaire de l'atome est :

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{NP} = -Q \overrightarrow{ON} = 4\pi \cdot \epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

aussi

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}_0 \Rightarrow \alpha = 4\pi \cdot \epsilon_0 R^3 \approx \frac{4}{3} \pi \cdot \epsilon_0 R^3$$

2. Dipôle électrostatique actif



Approximation dipolaire : définition

on considère un dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = +q \overrightarrow{NP}$, présent autour de O , origine d'un repère sphérique (d'axe (Oz) , suivant \vec{p}).

L'approximation dipolaire revient à observer le champ créé par ce dipôle, en un point M , loin du dipôle, c'est à dire :

$$OM = r \gg NP$$



18 Potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

théorème

On peut utiliser la superposition des potentiels :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi \cdot \epsilon_0 P_i M} = \frac{+q}{4\pi \cdot \epsilon_0 PM} - \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 NM} = \frac{+q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

or

$$PM = (\overrightarrow{PM}^2)^{1/2} = \left((\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 \right)^{1/2} = \left(OP^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} \right)^{1/2}$$

soit

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{OM} \left(1 + 2 \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} + \left(\frac{OP}{OM} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

Un développement limité en $\frac{OP}{OM}$ donne :

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{OM} \left(1 - \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} \right)$$

De même

$$\frac{1}{NM} \approx \frac{1}{OM} \left(1 - \frac{\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} \right)$$

Donc

$$V(M) = \frac{+q}{4\pi \cdot \epsilon_0 OM} \left(-\frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} + \frac{\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} \right) = \frac{+q \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi \cdot \epsilon_0 OM^3}$$

\Rightarrow

Un dipôle électrostatique positionné au centre O du repère sphérique, de moment dipolaire \vec{p} orienté suivant l'axe polaire, crée en M loin de O (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

👁 Surfaces équipotentielles créées par un doublet électrostatique. *schéma*

La figure 8 représente les surfaces équipotentielles créées par un doublet électrostatique.

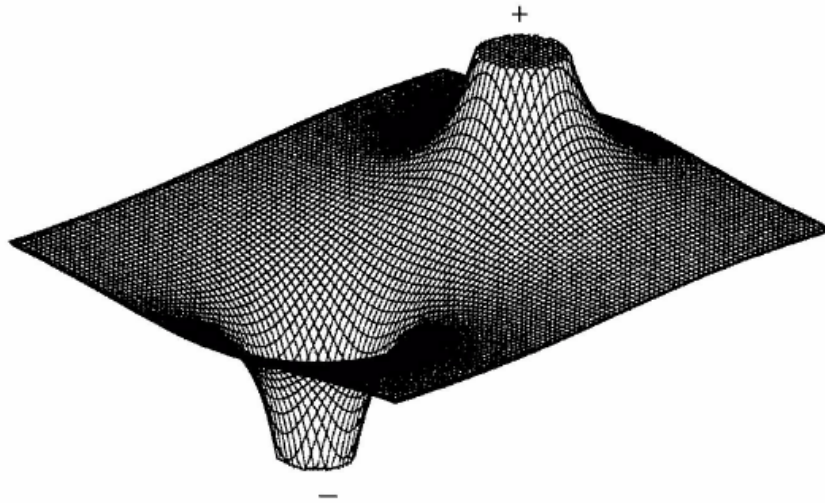


FIGURE 8 – Surfaces équipotentielles créées par un doublet électrostatique.

♥ Champ électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire à retenir

Un dipôle électrostatique positionné au centre O du repère sphérique, de moment dipolaire \vec{p} orienté suivant l'axe polaire, crée en M loin de O (dans le cadre de l'approximation dipolaire) un champ électrostatique de composantes

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

👁 Lignes de champ et isopotentielles créées dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique. *schéma*

La figure 9 représente quelques lignes de champ électrostatique (en continu) et traces (en pointillé) des surfaces isopotentielles créées dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique vues dans un plan $\varphi = cste$.

3. Dipôle électrostatique passif

📌 19 Energie potentielle électrostatique d'un dipôle électrostatique : *théorème*

L'énergie potentielle de chaque charge est $e_p = q \cdot V_{ext}$. Donc pour toute la distribution

$$E_p = \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot V_{ext}(\Omega) \cdot d^3\tau$$

Or, au premier ordre, $V_{ext}(\Omega) \approx V_{ext}(O) + \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{O\Omega}$ donc

$$E_p = V_{ext}(O) \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot d^3\tau - \vec{E}_{ext} \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot \overrightarrow{O\Omega} \cdot d^3\tau$$

⇒

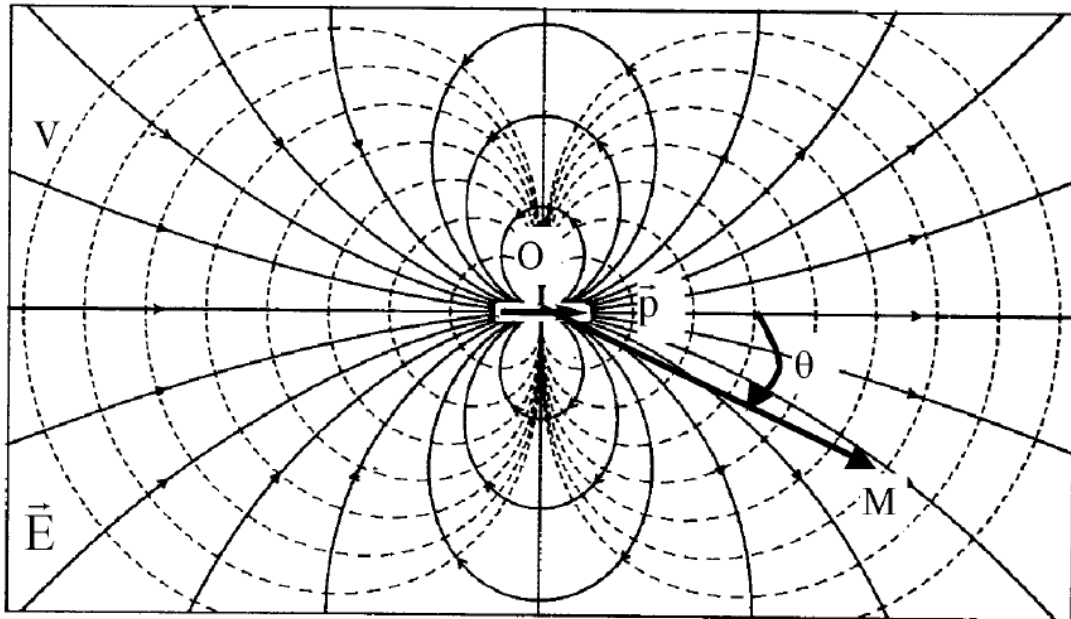


FIGURE 9 – Lignes de champ et isopotentiels créés dans l'approximation dipolaire par un dipôle électrostatique.

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire \vec{p} avec un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} est

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

20 Moment des forces électrostatiques ressenties par un dipôle électrostatique : *théorème*

Le moment en O de la force exercée sur chaque charge est $\vec{M}_O = \vec{O}\vec{\Omega} \wedge q \cdot \vec{E}_{ext}$. Donc pour toute la distribution

$$\vec{M}_O = \iiint_{\Omega \in D} \vec{O}\vec{\Omega} \wedge \rho(\Omega) \cdot \vec{E}_{ext} \cdot d^3\tau$$

Or, en considérant \vec{E}_{ext} constant

$$\vec{M}_O = \left[\iiint_{\Omega \in D} \vec{O}\vec{\Omega} \cdot \rho(\Omega) \cdot d^3\tau \right] \wedge \vec{E}_{ext}$$

\Rightarrow

Le moment de l'action exercée par un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} sur un dipôle de moment dipolaire \vec{p} est

$$\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

Effet d'un champ électrostatique sur un dipôle électrostatique : *s'y retrouver*

la résultante de l'action exercée par un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} sur un dipôle de moment dipolaire \vec{p} est

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext})$$

La résultante tend à déplacer le dipôle électrostatique vers les régions de champ électrostatique intense. Dans le cas d'un champ électrique homogène, le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

Solvatation des ions dans un solvant polaire *schéma*

La figure 10 représente un ion qui crée un champ électrostatique dans lequel les molécules de solvant polaire viennent s'aligner, et les attire. La présence des molécules de solvant tend à écranter (masquer) la charge de l'ion. Ce phénomène s'appelle la solvatation des ions.

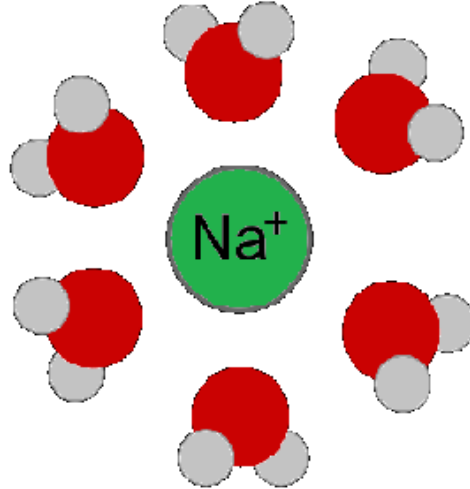


FIGURE 10 – Solvatation des ions dans un solvant polaire

Forces de Van der Waals *s'y retrouver*

Les forces de Van der Waals entre deux molécules polaires varient comme r^{-7} , où r est la distance qui les sépare. Elles sont de différents types :

- les forces de Keesom entre dipôles permanents ;
- les forces de Debye entre dipôle permanent et dipôle induit ;
- les forces de London entre dipôles induits.

Effet d'un champ électrostatique sur un filet d'eau *vidéo*

On peut mettre en évidence l'attraction exercée par un champ électrostatique sur des dipôles par exemple en déviant un filet d'eau ou en attirant des morceaux de papier.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

1) Modélisation des forces entre les pattes d'un gecko et un mur *exercice*

"Le gecko est un petit lézard qui fascine depuis très longtemps la communauté scientifique. En effet, le gecko est capable de grimper sur des murs et des plafonds de natures très différents. Ce défi du gecko aux lois de la pesanteur est une question dont la réponse n'a été trouvée qu'il y a quelques années par les scientifiques. Le gecko adhère aux murs par des forces de Van der Waals. Les spatules permettent aux pattes du gecko d'aller «coller» à une surface par des forces de Van der Waals car elles approchent la surface à une échelle nanométrique, condition nécessaire pour les forces de Van der Waals significatives qu'à courtes distances." (<http://culturesciences.chimie.ens.fr/content/les-forces-de-van-der-waals-et-le-gecko>).

1) On s'intéresse à une entité chimique (atome, ion, molécule) constitutive de la paroi des pattes du gecko, centrée en O , origine du repère, de moment dipolaire \vec{p}_g .

1.a) Estimer un ordre de grandeur de $\|\vec{p}_g\|$.

1.b) Rappeler l'expression, en coordonnées sphériques de centre O et d'axe polaire \vec{p}_g du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par \vec{p}_g , dans l'approximation dipolaire.

2) On s'intéresse à une entité chimique (atome, ion, molécule) constitutive du mur à proximité des pattes du gecko, centrée en M , apolaire en absence du gecko.

2.a) Est-on bien dans l'approximation dipolaire?

2.b) Estimer l'ordre de grandeur de la polarisabilité de M .

2.c) Exprimer le moment dipolaire induit \vec{p}_m en $M(r, \theta, \varphi)$.

3) On s'intéresse aux interactions de Van der Waals entre le dipôle permanent \vec{p}_g et le dipôle induit \vec{p}_m (interaction de Debye).

3.a) Expliquer qualitativement l'effet de ces forces. Montrer qu'elles sont attractives.

3.b) Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction E_p mise en jeu.

3.c) En déduire l'expression de la force \vec{f} .

3.d) Estimer l'ordre de grandeur f de sa norme. Estimer le nombre de ces forces pour permettre au gecko de ne pas tomber. Conclure.

Correction :

1) Moment dipolaire actif \vec{p}_g .

1.a) $\|\vec{p}_g\| \approx 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$.

1.b) Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en M par \vec{p}_g est

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{2p_g \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p_g \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

2) Dipôle passif.

2.a) On est bien dans l'approximation dipolaire car la taille du dipôle est $a \approx 10^{-10} \text{ m}$ et $r \approx 10^{-9} \text{ m} \gg a$ (distance "nanométrique").

2.b) La polarisabilité de M est $\alpha \approx \varepsilon_0 a^3 = 10^{-11} \times (10^{-10})^3 = 10^{-41} \text{ F} \cdot \text{m}^2$.

2.c) Donc le moment dipolaire induit est $\vec{p}_m = \alpha \vec{E}(M)$.

3) Interactions de Van der Waals de type Debye.

3.a) \vec{p}_m s'oriente dans la direction et le sens de \vec{E} , et est attiré vers les zones de fort champ électrostatique, c'est-à-dire où les lignes de champs se resserrent. Or les lignes de champ électrostatiques se resserrent à mesure qu'on se rapproche de O : la force est attractive.

3.b) L'énergie potentielle d'interaction mise en jeu est

$$E_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{E} = -\alpha E^2 = \frac{-\alpha p_g^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^6}$$

3.c) Donc la force est

$$\vec{f} = -\text{grad} E_p = \frac{\alpha p_g^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \text{grad} \left(\frac{(1 + 3 \cos^2 \theta)}{r^6} \right)$$

Or

$$\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad} \left(\frac{(1 + 3 \cos^2 \theta)}{r^6} \right) = \begin{pmatrix} \frac{-6(1 + 3 \cos^2 \theta)}{r^7} \\ \frac{-6 \cos \theta \sin \theta}{r^7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve donc

$$\vec{f} = \frac{-6 \alpha p_g^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^7} [(1 + 3 \cos^2 \theta) \vec{u}_r + \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\theta]$$

3.d)

$$f \approx \frac{6 \times 10^{-41} \times (10^{-29})^2}{16\pi^2 \times (10^{-11})^2 \times (10^{-9})^7} \approx 10^{-16} \text{ N}$$

En estimant la masse du gecko à $m \approx 100 \text{ g}$, la force totale doit être $N f \approx 1 \text{ N}$, donc $N \approx 10^{+16}$ au moins. Ça fait beaucoup de petits points d'accroche... S'il y a une surface de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 10^{-4} \text{ m}^2$, la densité surfacique de dipôles est $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-2}$, c'est-à-dire un dipôle tous les angström. **Éléments de correction :**

$$\vec{f} = \frac{-6 \alpha p_g^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 r^7} [(1 + 3 \cos^2 \theta) \vec{u}_r + \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\theta].$$

Les techniques mathématiques à connaître

Intégrer une divergence

Position du problème :

Il s'agit de déterminer le champ \vec{A} connaissant sa divergence $div(\vec{A})$. Autrement dit, il faut intégrer des équations différentielles portant sur les trois composantes A_1, A_2, A_3 de \vec{A} , elles-même fonction *a priori* de trois variables s_1, s_2, s_3 .

Symétries :

Pour simplifier le problème, il faut avant tout utiliser les symétries :

- invariances : si $div(\vec{A})$ ne dépend pas d'une des trois variables s_1, s_2, s_3 , alors \vec{A} n'en dépendra pas non plus.
- les plans de symétrie pour $div(\vec{A})$ sont des plans de symétrie pour \vec{A} . Le champ \vec{A} appartient aux plans de symétrie de $div(\vec{A})$.
- les plans d'antisymétrie pour $div(\vec{A})$ sont des plans d'antisymétrie pour \vec{A} . Aussi, le champ \vec{A} est orthogonal aux plans d'antisymétrie de $div(\vec{A})$.

■ *Exemple :*

Si $div(\vec{A})$ fonction de r uniquement en coordonnées sphériques, alors :

- \vec{A} ne dépend que de r ;
- les plans de symétrie pour $div(\vec{A})$ sont les plans contenant O : ce sont les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.
Donc $\vec{A} = A_r \vec{u}_r$;
- les plans d'antisymétrie pour $div(\vec{A})$ n'existent pas.

Conclusion : $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$.

Utilisation de la formule d'Ostrogradsky :

On peut utiliser la formule d'Ostrogradsky : $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V div(\vec{A}) d^3\tau$.

Pour ce faire, il faut définir une surface fermée Σ (orienté obligatoirement vers l'extérieur) qui vérifie les symétries. Le volume V est délimité par Σ .

■ *Exemple :*

Si $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques, alors :

- Σ est une sphère de rayon r , centrée sur O ;
- V est la boule de rayon r , centrée sur O .

Utilisation de l'expression de la divergence dans le repère adapté :

dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

Coordonnées	\vec{u}_1	\vec{u}_2	\vec{u}_3	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
cartésiennes	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z	x	y	z	1	1	1
cylindriques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_z	r	θ	z	1	r	1
sphériques	\vec{u}_r	\vec{u}_θ	\vec{u}_φ	r	θ	φ	1	r	$r \sin \theta$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left(\frac{\partial(\mu_2 \mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \mu_1 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \mu_2 A_3)}{\partial s_3} \right)$$

■ *Exemple :*

Si $\vec{A} = A_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques, alors :

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(r^2 \sin \theta A_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 A_r)}{dr}$$

Il reste donc à intégrer $\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 A_r)}{dr} = div(\vec{A})$.

Technique à maîtriser

jeudi 18 janvier 2018

I- Les capacités exigibles

1. Propriétés du champ électrostatique



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Associer la circulation de \vec{E} au travail de la force $q\vec{E}$.

Utiliser le théorème de Stokes. Associer les propriétés locales $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$ dans tout l'espace et $\vec{E} = -\text{grad}V$.

Associer la relation $\vec{E} = -\text{grad}V$ au fait que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme de \vec{E} à l'évasement des tubes de champ loin des sources.

Déduire les lignes équipotentielles d'une carte de champ électrostatique, et réciproquement.

Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.

2. Calculs de champs électrostatiques



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.

Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface et par un condensateur plan. Déterminer la capacité du condensateur plan.

Citer l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air.

Associer l'énergie d'un condensateur apparue en électrocinétique à une densité volumique d'énergie.

Exprimer l'énergie de constitution du noyau à un préfacteur numérique près par analyse dimensionnelle.

Obtenir le préfacteur numérique en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini. Relier les ordres de grandeur mis en jeu : rayons et énergies. Justifier la nécessité de l'interaction forte.

Mettre en évidence les analogies formelles entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour en déduire l'analogie des propriétés des champs.

3. Dipôles électrostatiques



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Décrire les conditions de l'approximation dipolaire.

Établir l'expression du potentiel V . Comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ.

Utiliser les expressions fournies pour le dipôle de l'énergie potentielle E_p , de la résultante \vec{F} et du moment \vec{M} .

Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ d'origine extérieure \vec{E} .

Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. Expliquer qualitativement pourquoi l'énergie d'interaction entre deux molécules polaires n'est pas en $1/r^3$.

Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de Thomson. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.

II- Méthodes

1. Propriétés du champ électrostatique

A) Quelles sont les propriétés des lignes de champ électrostatique ? *méthode*

Les lignes de champ électrostatique sont ouvertes.

Elles sont orthogonales aux surfaces isopotentielles et vont des charges positives vers les charges négatives (et vers les potentiels décroissants).

B) Quelles sont les propriétés de symétrie du champ électrostatique ? *méthode*

Les plans de symétrie pour ρ sont des plans de symétrie pour \vec{E} .

Les plans d'antisymétrie pour ρ sont des plans d'antisymétrie pour \vec{E} .

Le champ \vec{E} est orthogonal aux plans d'antisymétrie et appartient aux plans de symétrie de ρ .

2. Calculs de champs électrostatiques

C) Comment calculer un champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges ? *méthode*

Il faut superposer le champ de Coulomb de chacune des charges

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4.\pi.\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i M}{P_i M^3}$$

D) Comment calculer un champ électrostatique créé par une distribution continue de charges ? *méthode*

Il faut utiliser les symétries (s'il y en a assez) puis le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée qui vérifie les symétries.

3. Dipôles électrostatiques

E) Utiliser les dipôles électrostatiques *méthode*

Le moment dipolaire électrique est $\vec{p} = q.\overline{NP}$ où N est le barycentre des charges négatives et P celui des charges positives.

Un tel dipôle ressent le moment $\vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$ et a l'énergie potentielle $E_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$.

La résultante tend à déplacer le dipôle électrostatique vers les régions de champ électrostatique intense et le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

III- Exercices

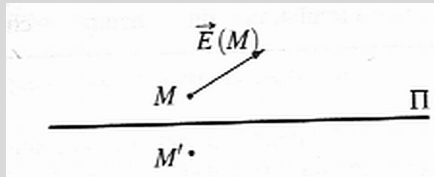
1. Propriétés du champ électrostatique

1.1) Propriétés des lignes de champ électrostatique

Les lignes de champ électrostatique sont-elles ouvertes ou fermées ?

Les lignes de champ électrostatique sont ouvertes. En effet, elles ne peuvent être fermées car le champ électrostatique dérive d'un potentiel et ce potentiel décroît strictement le long d'une ligne de champ.

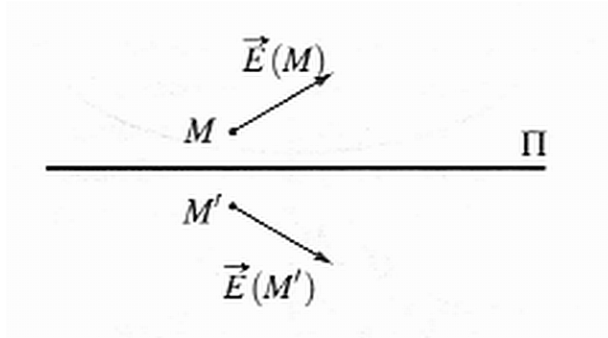
1.2) Plan de symétrie d'une distribution de charge



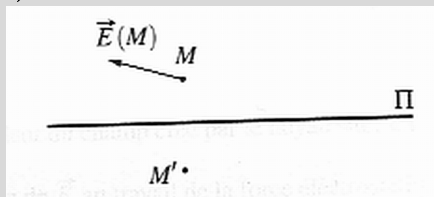
Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charge. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π .

1) Compléter le schéma en dessinant le champ électrostatique au point M' .

Les plans de symétrie pour ρ sont des plans de symétrie pour \vec{E} .



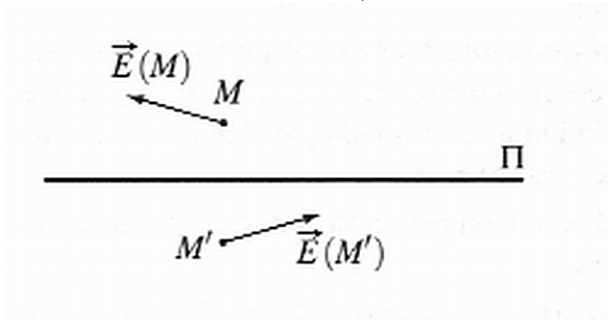
1.3) Plan d'antisymétrie d'une distribution de charge



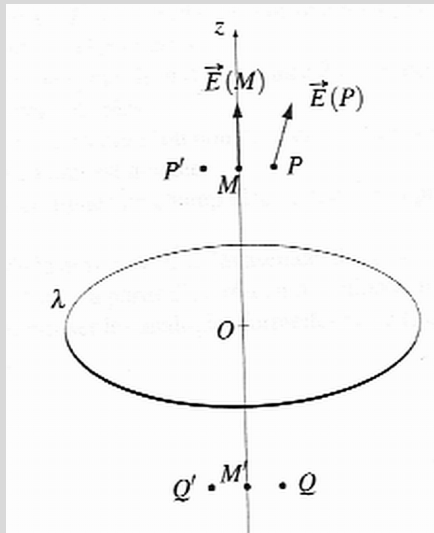
Le plan Π est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π .

1) Compléter le schéma en dessinant le champ électrostatique au point M' .

Les plans d'antisymétrie pour ρ sont des plans d'antisymétrie pour \vec{E} .



1.4) Symétries d'un cerceau chargé linéiquement

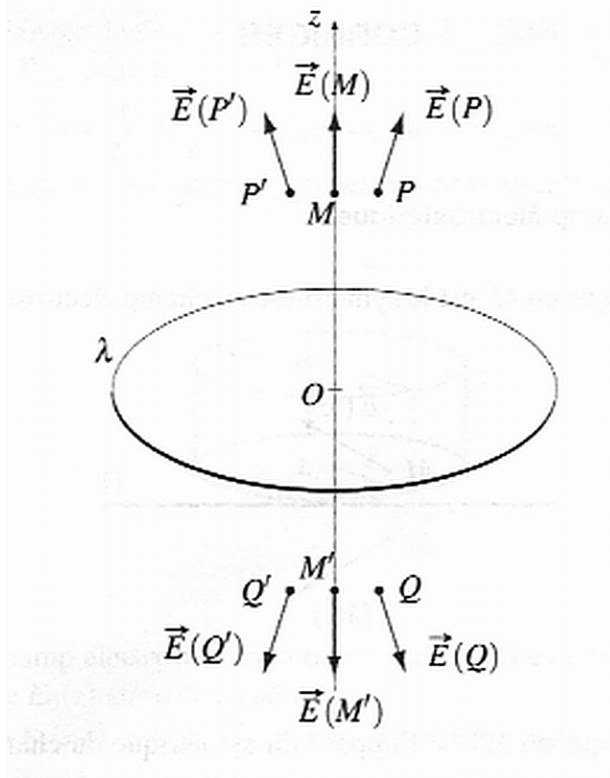


On considère un cercle d'axe Oz chargé linéiquement λ . On donne le champ électrostatique en M et en P .

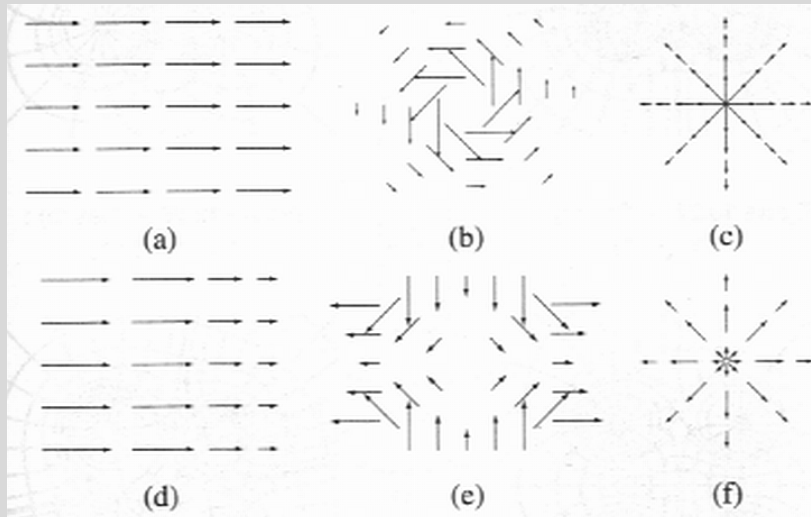
1) Représenter le champ électrostatique

- en M' symétrique de M par rapport au plan du cercle,
- en P' symétrique de P par rapport à l'axe,
- en Q symétrique de P par rapport au plan du cercle,
- et en Q' symétrique de Q par rapport à l'axe.

Les plans de symétrie pour λ (comme le plan qui contient le cercle ou les plans qui contiennent l'axe du cercle) sont des plans de symétrie pour \vec{E} .



1.5) Sont-ce des lignes de champ électrostatique ?

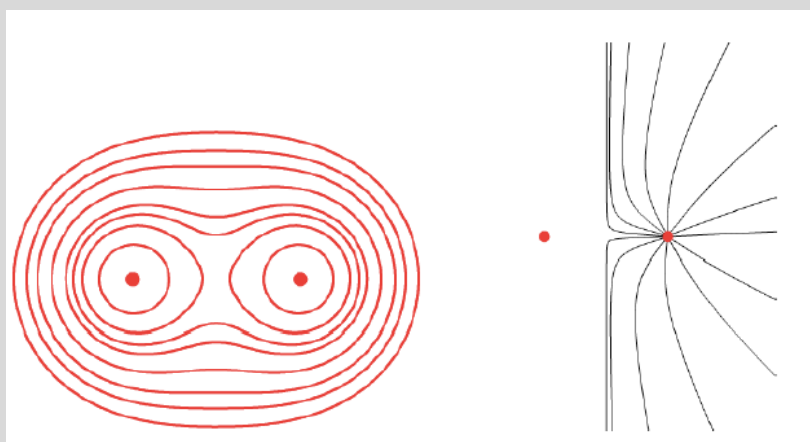


On considère les lignes de champ des différentes configurations à gauche. On supposera la figure invariante par translation perpendiculaire au plan du dessin.

1) Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique, et si oui, si des charges sont présentes dans la région représentée.

- Le champ représenté en (a) est un champ uniforme. Un champ uniforme est bien de rotationnel nul, il peut donc être de nature électrostatique. Sa divergence est nulle aussi, il n'y a donc pas de charges dans la région représentée (d'après l'équation de Maxwell-Gauss).
- Dans le cas (b), on peut mettre en évidence un contour (cercle) le long duquel la circulation n'est pas nulle, le champ ne pourra pas être un champ électrostatique.
- Dans le cas (c) le champ est de la forme $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques. Un tel champ diverge mais ne tourne pas, il peut donc être de nature électrostatique. Les lignes de champ divergent à partir d'un point, il y a donc des charges en ce point-là.
- Le cas (d) correspond à un champ de la forme : $\vec{E} = E_x(x) \vec{u}_x$. Son rotationnel est nul, il peut donc être de nature électrostatique. Sa divergence n'est pas nulle : il y a donc des charges dans la région représentée.
- Dans le cas (e), on peut mettre en évidence un contour le long duquel la circulation n'est pas nulle, le champ ne pourra pas être un champ électrostatique.
- Dans le cas (f) le champ est de la forme $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques. Un tel champ diverge mais ne tourne pas, il peut donc être de nature électrostatique. Les lignes de champ divergent à partir d'un point, il y a donc des charges en ce point-là.

1.6) Lignes de champ électrostatique et lignes isopotentielles de deux charges ponctuelles



On considère une distribution de deux charges ponctuelles (repérées par des points rouges).

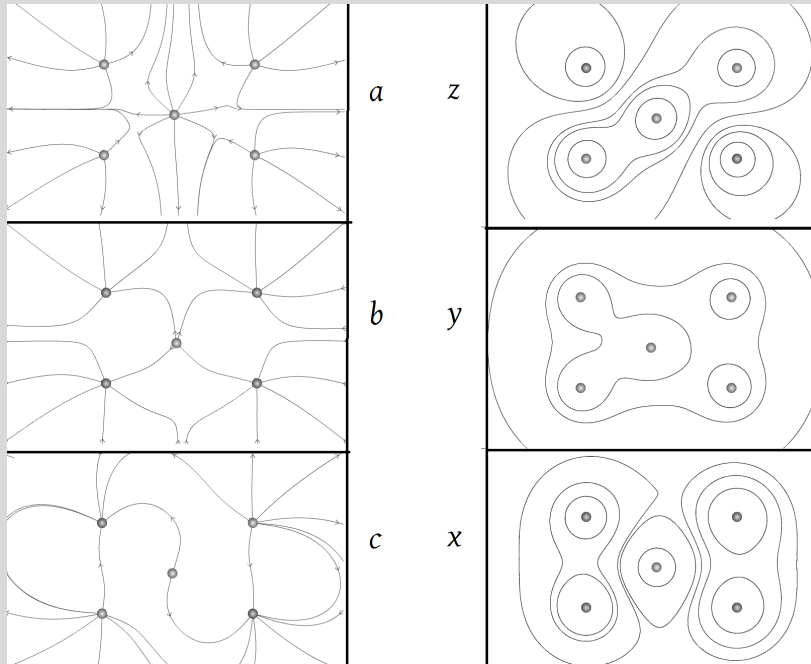
Sur les figures ci-contre sont représentées les lignes de champ et les équipotentielles correspondant à cette distribution.

- 1) Repérer, en le justifiant la carte des lignes de champ et celle des équipotentielles.
- 2) Les sources de champ ont-elles des signes opposés ou égaux ?

1) Les lignes isopotentielles sont à gauche et les lignes de champ à droite (car les lignes de champ électrostatiques ne peuvent être fermées).

2) Puisque les lignes de champ ne vont pas d'une charge à l'autre, celles-ci sont de même signe.

1.7) Lignes de champ électrostatique et lignes isopotentielles de cinq charges ponctuelles



On considère une distribution de cinq charges ponctuelles (repérées par des points).

Sur les figures a,b et c ci-contre sont représentées des lignes de champ et sur les figure z,y et x des équipotentielles.

1) Associer, en le justifiant, chaque représentation de lignes de champ à une représentation d'équipotentielles.

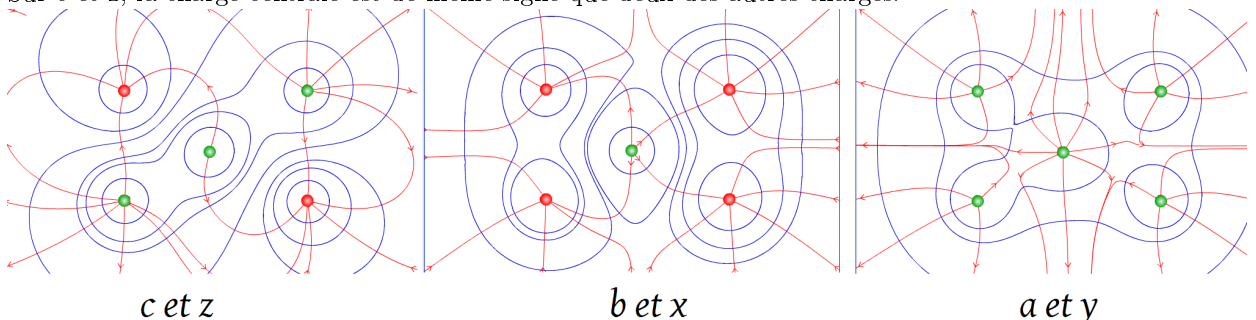
2) Repérer sur chaque distribution les signes opposés ou égaux des charges.

1) Les lignes de champ vont d'une charge positive vers une charge négative et elles sont orthogonales aux lignes isopotentielles.

Sur b et x la charge centrale est de signe opposé aux autres charges.

Sur a et y, la charge centrale est de même signe que les autres charges.

Sur c et z, la charge centrale est de même signe que deux des autres charges.



2) Les charges de signes identiques sont de couleurs identiques.

2. Calculs de champs électrostatiques

2.8) Symétries d'une sphère chargée surfaciquement

Soit une sphère de centre O , portant une répartition surfacique de charges σ .

1) Déterminer les symétries de cette répartition de charges :

- 1.a) invariances ;
- 1.b) plans de symétrie ;
- 1.c) plans d'antisymétrie.

$\rho(r)$ uniquement (symétrie sphérique); tous les plans contenant O sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) \forall M$.

2.9) Détermination d'un champ électrostatique en symétrie cylindrique

On s'intéresse à une distribution cylindrique infinie d'axe (Oz) , de charge (le cylindre de rayon R est uniformément chargé).

1) En déduire les symétries (en statique) de V et \vec{E} .

- 1) $\triangleright \rho(r)$, de plans de symétrie $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, et (\vec{u}_r, \vec{u}_z) . Donc $V(r)$ et $\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$.

2.10) Quatre charges ponctuelles

Soit quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré d'axes Ox et Oy , de centre O dont la longueur de la diagonale est $2a$.

- 1) Calculer le potentiel en O ainsi que le champ \vec{E} dans les cas où les charges sont les suivantes :
- 1.a) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$.
- 1.b) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.
- 1.c) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.
- 1.d) $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$, $q\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = +e$ et $q\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -e$.

- 1) On trouve grâce au théorème de superposition :

- 1.a) $V(0,0) = \frac{e}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$ et $\vec{E}(0,0) = \vec{0}$.
- 1.b) $V(0,0) = 0$ et $\vec{E}(0,0) = \vec{0}$.
- 1.c) $V(0,0) = 0$ et $\vec{E}(0,0) = \frac{e}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} \vec{u}_x$.
- 1.d) $V(0,0) = \frac{e}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$ et $\vec{E}(0,0) = \frac{e}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$.

2.11) Utilisation des potentiels retardés en électrostatique

On donne le potentiel scalaire $V(M)$ créé en M par D , une distribution de charges ρ d'extension finie,

$$V(M,t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3\tau$$

(la formule des potentiels retardés)

- 1) Que devient cette formule dans le cas électrostatique?
2) En déduire l'expression du champ électrostatique.

- 1)

$$V(M,t) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3\tau = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P)}{PM} d^3\tau$$

- 2) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(V) = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\rho(P)}{PM} \right) d^3\tau$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\rho(P)}{PM} \right) = \rho(P) \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) = \rho(P) \left(\frac{-\overrightarrow{PM}}{PM^3} \right)$. Donc

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \iiint_{P \in D} \frac{\rho(P) \cdot \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3\tau$$

2.12) Champ électrostatique créé par un cerceau linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge, de densité λ , uniforme sur le cercle de centre O , d'axe Oz , de rayon R .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :

- 1.a) invariances;
1.b) plans de symétrie;
1.c) plans d'antisymétrie.

- 2) En déduire les symétries de \vec{E} :

- 2.a) sur l'axe (Oz) ;
2.b) sur l'axe (Oz) , en $z = 0$.

- 3) Calculer le champ électrostatique créé en un point M de l'axe Oz , de coordonnée z .

- 1) Symétries dans un repère cylindrique d'axe (Oz) :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de θ : $\rho(r, z)$ uniquement (symétrie cylindrique);
 - 1.b) le plan (xOy) est plan de symétrie : plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$.
 - 1.c) Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
- 2) Symétries de \vec{E} :
 - 2.a) Sur l'axe (Oz) , $\vec{E} // \vec{u}_z$.
 - 2.b) Sur l'axe (Oz) , en $z = 0$ (plan (xOy)), $\vec{E} = \vec{0}$.
- 3) $\vec{E} = \frac{\lambda \cdot R}{2 \cdot \epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$.

2.13) Champ électrostatique créé par un fil infini linéiquement chargé

On considère une distribution linéique de charge infinie de densité λ sur l'axe Oz .

- 1) Etudier les symétries :
 - 1.a) invariances de cette répartition de charge;
 - 1.b) plans de symétrie et d'antisymétrie de cette répartition de charge;
 - 1.c) en déduire les symétries de \vec{E} .
- 2) Calculer le champ électrostatique créé en un point M à la distance r de l'axe Oz .
- 3) Potentiel électrostatique :
 - 3.a) En déduire le potentiel électrostatique créé en un point M à la distance r de l'axe Oz .
 - 3.b) Peut-on prendre $V = 0$ à l'infini ?

- 1) Symétries dans un repère cylindrique d'axe (Oz) :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de θ et translation de z : $\rho(r)$ uniquement (symétrie circulaire);
 - 1.b) tous les plans orthogonaux à (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \forall M$ et tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \forall M$. Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
 - 1.c) $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- 2) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \vec{u}_r$.
- 3) Potentiel :
 - 3.a) $V(r) = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$.
 - 3.b) $r_0 \rightarrow \infty$ pose un problème mathématique (en fait la distribution est infinie, aussi, on ne peut pas choisir le potentiel nul à l'infini).

2.14) Champ électrostatique créé par une demi-sphère surfaciquement chargée

On considère une distribution surfacique de charge uniforme σ sur une demi-sphère (dans l'espace $z > 0$) de centre O , de rayon R .

- 1) Déterminer les symétries de cette répartition de charge :
 - 1.a) invariances;
 - 1.b) plans de symétrie;
 - 1.c) plans d'antisymétrie.
- 2) Champ électrostatique :
 - 2.a) En déduire les symétries de \vec{E} en O .
 - 2.b) Calculer le champ électrostatique créé en O .

- 1) Symétries dans un repère sphérique de centre O :
 - 1.a) la distribution de charge est invariante par rotation de φ : $\rho(r, \theta)$ uniquement;
 - 1.b) tous les plans contenant (Oz) sont plans de symétrie : plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \forall M$.
 - 1.c) Enfin, il n'y a pas de plans d'antisymétrie.
- 2) Champ électrostatique :
 - 2.a) $\vec{E} // \vec{u}_z$.
 - 2.b) $\vec{E} = -\frac{\sigma}{4 \cdot \epsilon_0} \vec{u}_z$.

2.15) Potentiel scalaire créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q en O crée un potentiel scalaire $V(M) = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r}$ exprimé dans le repère sphérique de centre O .

- 1) Ce potentiel vérifie-t-il bien l'équation de Poisson ?
- 2) En déduire le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M .

1) Calculons le laplacien en sphérique $\Delta V = \frac{1}{r^2.\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2.\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial r})$ soit $\Delta V = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r})$
d'où $\Delta V = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0$. Dans le vide (sauf en O), la densité volumique de charge étant nulle, on a bien $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.

2) $\vec{E}(M) = -\vec{grad}(V) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$, soit : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \vec{u}_r$.

2.16) Deux condensateurs en série

Un générateur parfait impose une différence de potentiel $U = 12V$ aux bornes de deux condensateurs en série, de capacités respectives $C_1 = 10\mu F$ et $C_2 = 80\mu F$.

- 1) Calculer les tensions respectives aux bornes des deux condensateurs :
 - 1.a) u_1 ;
 - 1.b) et u_2 .
- 2) Calculer les énergies stockées respectivement dans les deux condensateurs :
 - 2.a) E_1 ;
 - 2.b) et E_2 .

- 1) Tensions respectives aux bornes des deux condensateurs :

1.a) $u_1 = \frac{C_2.U}{C_1+C_2} = 11V$;

1.b) et $u_2 = \frac{C_1.U}{C_1+C_2} = 1,3V$.

- 2) Energies stockées respectivement dans les deux condensateurs :

2.a) $E_1 = \frac{1}{2} \frac{C_1.C_2.U^2}{(C_1+C_2)^2} = 0,57mJ$;

2.b) et $E_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1.C_2.U^2}{(C_1+C_2)^2} = 71\mu J$.

2.17) Champ et potentiels électrostatiques d'un noyau atomique

On assimile le noyau d'un atome à une sphère uniformément chargée, de centre O , de rayon R , de charge Q .

- 1) Généralités :

1.a) Établir l'expression du champ électrostatique \vec{E} produit par le noyau en un point quelconque M .

1.b) En déduire le potentiel V en un point quelconque, en choisissant $V = 0$ à l'infini.

- 2) Application :

On considère un noyau de baryum : $Z = 56$ et $R = 6,3fm$. On donne la charge électronique $e = 1,6.10^{-19}C$ et la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}F.m^{-1}$. Que vaut le champ

2.a) au voisinage du noyau : $r = 2R$?

2.b) à la périphérie de l'atome : $r = 1,0.10^{-10}m$?

- 1) Généralités :

1.a)

/1 Si $r > R$: $\vec{E} = \frac{Q}{4.\pi.\epsilon_0.r^2} \vec{u}_r$

/1 et si $r < R$: $\vec{E} = \frac{Q.r}{4.\pi.\epsilon_0.R^3} \vec{u}_r$.

1.b)

/1 Si $r > R$: $V = \frac{Q}{4.\pi.\epsilon_0.r}$

/1 et si $r < R$: $V = \frac{Q}{8.\pi.\epsilon_0.R} \left(3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$.

- 2) Application :

2.a)

/1 au voisinage du noyau : $r = 2R$, $|\vec{E}| = 5,1.10^{20}V.m^{-1}$

/1 et $V = 6,4.10^6V$;

2.b)

- /1 à la périphérie de l'atome : $|\vec{E}| = 8,1.10^{12} V.m^{-1}$
 /1 et $V = 0,81 kV$.

2.18) Détermination de l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

- 1) Faire une analogie formelle entre le champ électrique créé par une charge ponctuelle et l'attraction créée par une masse ponctuelle.
- 2) Grâce à cette analogie, énoncer la loi locale que vérifie le champ d'attraction gravitationnel \vec{A} .
- 3) Énoncer un "théorème de Gauss pour le champ d'attraction gravitationnel \vec{A} ".

- 1) L'analogie est la suivante :

$$\vec{F}_e = -\frac{q \cdot q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}_r \leftrightarrow \vec{F}_g = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$$

$$q \leftrightarrow m$$

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{A}$$

$$\frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \leftrightarrow G$$

- 2) L'analogie de $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ est :

$$div \vec{A} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \mu$$

- 3) L'analogie de $\oint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ est :

$$\oint \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M_{int}$$

2.19) Utilisation de l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

On considère un astre (la Terre par exemple), qu'on assimile à une sphère de rayon R et de centre O . Sa masse volumique est à symétrie sphérique : μ ne dépend que de r .

- 1) Grâce aux symétries de μ , déduire la forme qualitative du champ gravitationnel \vec{A} créé par l'astre.
- 2) Appliquer le théorème de Gauss pour connaître quantitativement \vec{A} .
- 3) Montrer que, hors de l'astre, "tout se passe comme si l'astre était ponctuel".

1) Invariances : $\mu(r) \Rightarrow \vec{A}(r)$. Les plans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont plans de symétrie. Comme \vec{A} est un vrai vecteur, $\vec{A} = A_r \cdot \vec{u}_r$.

2) En appliquant le théorème de Gauss pour une sphère de centre O et de rayon $r \geq R_T$, on obtient :

$$\oint \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = A_r(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot M_T \Rightarrow$$

$$\vec{A} = -\frac{G \cdot M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

3) Hors de l'astre (si $r \geq R_T$), tout se passe effectivement comme si l'astre était ponctuel. En particulier, en $r = R_T$, $\vec{F} = -G \frac{m \cdot M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -m \cdot g \cdot \vec{u}_r \Rightarrow$

$$\vec{A}(r = R_T) = -\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \vec{u}_r$$

3. Dipôles électrostatiques**3.20) Invariance de la définition du moment dipolaire**

- 1) Montrer que la définition du moment dipolaire $\iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot d^3\tau$ ne dépend pas du choix du point O .

$$1) \quad \iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{O'M} \cdot d^3\tau = \iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{O'O} \cdot d^3\tau + \iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot d^3\tau \quad \text{donc} \\ \iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{O'M} \cdot d^3\tau = \iiint_{M \in D} \rho(M) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot d^3\tau \text{ puisque la charge totale est nulle (cqfd).}$$

3.21) Equation des surfaces équipotentielles créées par un dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire

On rappelle que le potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire est

$$V(M) = \frac{p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

1) Montrer que l'équation des surfaces équipotentielles est : $r^2 = k \cdot \cos \theta$.

$$1) \quad V(M) = \frac{p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = cste \text{ ssi } \frac{\cos \theta}{r^2} = cste'. \text{ (cqfd).}$$

3.22) Equation des lignes de champ créées par un dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire

Dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par le dipôle sont

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{p}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \Leftrightarrow \begin{cases} E_r = \frac{2 \cdot p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\theta = \frac{p \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que l'équation des lignes de champ est : $r = k' \cdot \sin^2 \theta$.

1) On cherche $\vec{E} = k \cdot d\vec{\ell} = k \cdot (dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta)$, soit

$$\begin{cases} \frac{2 \cdot p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} = k \cdot dr \\ \frac{p \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} = k \cdot r \cdot d\theta \end{cases}$$

qui donne $\frac{dr}{r} = 2 \frac{d\theta}{\tan \theta}$ qui s'intègre en $\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) = 2 \cdot \ln \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)$

3.23) Dipôle de la molécule d'eau

Dans la molécule d'eau H_2O , la distance $O - H$ est $a = 97 \text{ pm}$ et l'angle que font entre elles les deux liaisons $O - H$ vaut $\theta = 104,30^\circ$. D'autre part, l'oxygène étant plus électronégatif que l'hydrogène, on suppose que chaque H porte une charge $+\frac{e}{3}$, où $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ est la charge électronique fondamentale.

1) Exprimer le moment dipolaire p_0 de la molécule d'eau

1.a) dans les unités du système international;

1.b) en debye.

1) Le moment dipolaire de la molécule d'eau est $p_0 = 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot a \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$, soit :

1.a) $p_0 = 0,63 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ dans les unités du système international;

1.b) $p_0 = 1,9 \text{ D}$.

3.24) Orientation d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur

1) Montrer en traçant $E_p(\theta)$, où $\theta = \left(\vec{E}_{ext}, \vec{p} \right)$ que le moment tend à aligner parallèlement le dipôle électrostatique au champ électrostatique.

2) Montrer que la position d'équilibre stable correspond à \vec{p} dans le même sens que \vec{E}_{ext} .

- 1) $E_p(\theta) = -p \cdot E_{ext} \cdot \cos \theta$.
- 2) Minimum de l'énergie potentielle pour $\theta = 0$.

3.25) Interaction dipôle-dipôle

On étudie deux dipôles électrostatiques de moments dipolaires respectifs \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . Le premier est fixe en O , centre d'un repère sphérique d'axe polaire (O, \vec{u}_z) , parallèle à son moment dipolaire : $\vec{p}_1 = p_1 \cdot \vec{u}_z$.

Le second dipôle est placé en $r = cste$, θ fixé, et $\varphi = 0$. On repère son moment dipolaire par l'angle $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{p}_2)$, qui peut varier.

- 1) Exprimer l'énergie potentielle $E_p(\alpha)$ d'interaction du second dipôle avec le champ électrostatique créé par le premier dipôle.
- 2) Que doit vérifier $\tan(\theta - \alpha)$ à l'équilibre stable?
- 3) Application : que vaut α si
 - 3.a) $\theta = 0$;
 - 3.b) $\theta = \frac{\pi}{4}$;
 - 3.c) $\theta = \frac{\pi}{2}$;
 - 3.d) $\theta = \pi$.

- 1) $E_p(\alpha) = \frac{-p_1 \cdot p_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3} [2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta - \alpha) - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta - \alpha)]$.
- 2) $\tan(\theta - \alpha) = \frac{1}{2} \tan(\theta)$ à l'équilibre stable.
- 3) Application :
 - 3.a) $\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$;
 - 3.b) $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 18^\circ$;
 - 3.c) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$;
 - 3.d) $\theta = \pi \Rightarrow \alpha = 0$.

3.26) Dipôle de l'atome d'hydrogène

On modélise l'atome d'hydrogène comme un doublet formé d'un proton (chargé $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$) et d'un électron (chargé $-e$, placé à la distance $a = 0,10 nm$ du noyau). On donne $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$.

- 1) Calculer W_{propre} , l'énergie électrostatique propre de ce doublet :
 - 1.a) dans les unités du système international;
 - 1.b) en eV .
 - 1.c) Cela vous rappelle-t-il quelque chose?

On place l'atome dans un champ électrique extérieur de valeur le champ de claquage de l'air : $E_{ext} = 3 \cdot 10^6 V \cdot cm^{-1}$. On suppose que la distance entre le noyau et l'électron est quasi invariante.

- 2) Calculer W_{ext} , l'énergie électrostatique d'interaction de ce doublet avec le champ extérieur :
 - 2.a) dans les unités du système international;
 - 2.b) en eV .
- 3) Comparer W_{ext} et W_{propre} .

- 1) Energie électrostatique propre de ce doublet : $W_{propre} = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a}$ soit
 - 1.a) $W_{propre} = 2,3 \cdot 10^{-18} J$ dans les unités du système international;
 - 1.b) $W_{propre} = 14 eV$.
 - 1.c) C'est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.
- 2) Energie électrostatique d'interaction de ce doublet avec le champ extérieur : $W_{ext} = e \cdot a \cdot E_{ext}$, soit
 - 2.a) $W_{ext} = 4,8 \cdot 10^{-18} J$ dans les unités du système international;
 - 2.b) $W_{ext} = 30 meV$.
- 3) $W_{ext} \ll W_{propre}$.

3.27) Potentiel électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

- 1) Démontrer que le potentiel électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire est :

$$V(M) = \frac{p \cdot \cos \theta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

- 1.a) pour un doublet ;
- 1.b) pour un dipôle quelconque.

1)

1.a) pour un doublet : le potentiel est la superposition des deux potentiels de Coulomb :

$$V(M) = \frac{-q}{4.\pi.\varepsilon_0.NM} + \frac{+q}{4.\pi.\varepsilon_0.PM}$$

$$\text{Or } NM^2 = (\vec{NO} + \vec{OM})^2 \approx OM^2 \cdot \left(1 - 2\frac{\vec{OM} \cdot \vec{ON}}{OM \cdot ON}\right) = r^2 \cdot \left(1 - 2\vec{u}_r \cdot \frac{\vec{ON}}{r}\right)$$

Donc $\frac{1}{NM} \approx r^{-1} \cdot \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{ON}}{r}\right)$. De la même façon, $\frac{1}{PM} \approx r^{-1} \cdot \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{OP}}{r}\right)$. Donc

$$V(M) = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0.r} \left[- \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{ON}}{r}\right) + \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{OP}}{r}\right) \right] = \frac{q\vec{u}_r \cdot \vec{NP}}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}$$

(cqfd)

1.b) pour un dipôle quelconque :

$$V(M) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \cdot \iiint_{\Omega \in D} \frac{\rho(\Omega)}{\Omega M} d^3\tau$$

$$\text{Or } \Omega M^2 = (\vec{\Omega O} + \vec{OM})^2 \approx OM^2 \cdot \left(1 - 2\frac{\vec{OM} \cdot \vec{O\Omega}}{OM \cdot O\Omega}\right) = r^2 \cdot \left(1 - 2\vec{u}_r \cdot \frac{\vec{O\Omega}}{r}\right)$$

Donc $\frac{1}{\Omega M} \approx r^{-1} \cdot \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{O\Omega}}{r}\right)$

$$V(M) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0.r} \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \left(1 + \vec{u}_r \cdot \frac{\vec{O\Omega}}{r}\right) d^3\tau$$

$$V(M) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0.r} \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) d^3\tau + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2} \vec{u}_r \cdot \iiint_{\Omega \in D} \rho(\Omega) \cdot \vec{O\Omega} d^3\tau$$

La première intégrale est nulle (la charge globale est nulle), et la seconde intégrale est le moment dipolaire. (cqfd)

3.28) Champ électrostatique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

1) Démontrer que le champ électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire est :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{p}}{4.\pi.\varepsilon_0.r^3}$$

On placera le dipôle en O , origine d'un repère sphérique (d'axe (Oz) , suivant \vec{p}).

2) En déduire que

$$\begin{cases} E_r = \frac{2.p \cdot \cos \theta}{4.\pi.\varepsilon_0.r^3} \\ E_\theta = \frac{p \cdot \sin \theta}{4.\pi.\varepsilon_0.r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

1) On va partir de la formule du potentiel

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(-\frac{p \cdot \cos \theta}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2} \right) = \frac{-p}{4.\pi.\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

soit en sphérique :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \frac{-p}{4.\pi.\varepsilon_0} \frac{-2 \cdot \cos \theta}{r^3} = \frac{2.p \cdot \cos \theta}{4.\pi.\varepsilon_0.r^3} \\ E_\theta = \frac{-p}{4.\pi.\varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{-\sin \theta}{r^2} = \frac{p \cdot \sin \theta}{4.\pi.\varepsilon_0.r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

2) $\vec{p} = p \cdot (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$ et $3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r = 3.p \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_r$, donc

$$3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r - \vec{p} = 2.p \cdot \cos \theta \cdot \vec{u}_r + p \cdot \sin \theta \vec{u}_\theta$$

(cqfd)

4. Techniques mathématiques - Intégrer une divergence

4.29) Calcul d'un champ de divergence donnée (1)

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a \vec{u}_r$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée un cylindre d'axe Oz , de rayon r de longueur ℓ pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d}^2\Sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 2\pi r \ell = a \pi r^2 \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{ar}{2} \vec{u}_r$.

4.30) Calcul d'un champ de divergence donnée (2)

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = ar \vec{u}_r$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée un cylindre d'axe Oz , de rayon r de longueur ℓ pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d}^2\Sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 2\pi r \ell = a 2\pi \frac{r^3}{3} \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{ar^2}{3} \vec{u}_r$.

4.31) Calcul d'un champ de divergence donnée (3)

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a \vec{u}_r$$

où a est une constante.

- 1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{d}^2\Sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^3}{3}$$

donc $\vec{E} = \frac{ar}{3} \vec{u}_r$.

4.32) Calcul d'un champ de divergence donnée (4)

- 1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = ar^2 \vec{u}_r$$

où a est une constante.

1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^5}{5} \ell$$

donc $\vec{E} = \frac{a r^3}{5} \vec{u}_r$.

4.33) Calcul d'un champ de divergence donnée(5)

1) Déterminer le champ \vec{E} tel que, dans le repère sphérique (r, θ, φ) ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = a r \vec{u}_r$$

où a est une constante.

1) On choisit comme surface fermée une sphère de centre O , de rayon r pour appliquer la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \, d^3\tau \Rightarrow E_r(r) 4\pi r^2 = a 4\pi \frac{r^4}{4} \ell$$

donc $\vec{E} = a r^2 \vec{u}_r$.

Travaux dirigés

vendredi 19 janvier 2018

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

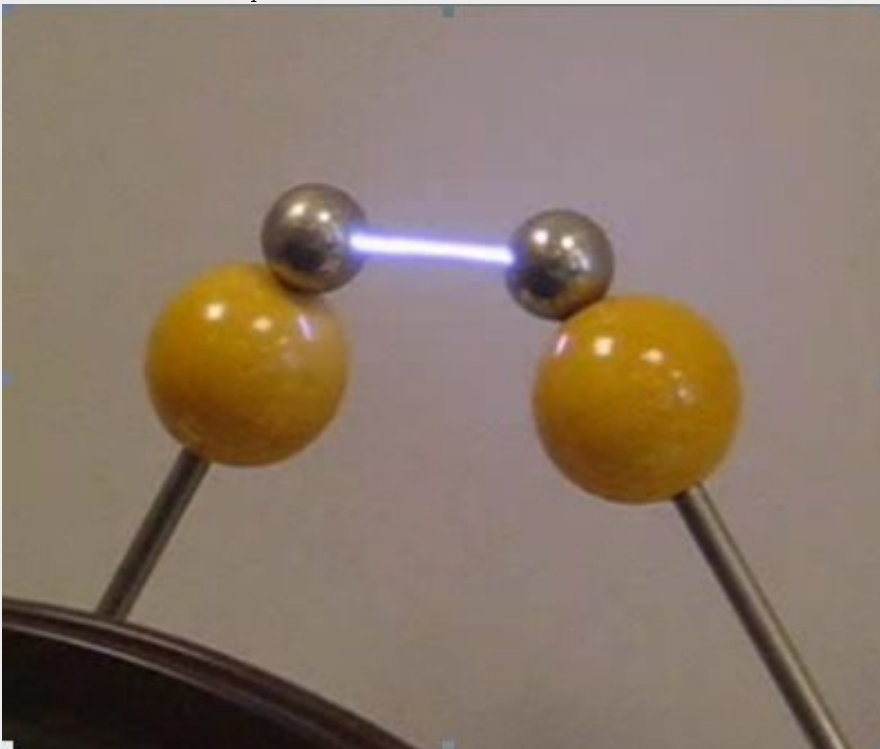
Le champ de claquage de l'air

Définition de "disruptif"

disponible à l'adresse <http://fr.wiktionary.org/wiki/disruptif>

Quand ça fait des étincelles

L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, les électrons qui composent les atomes des molécules de l'air sont littéralement arrachés à leur orbite de valence pour participer à la conduction électrique : la foudre traverse alors l'atmosphère.



Enoncé

- 1) A l'aide de ces données, saurez-vous estimer l'ordre de grandeur du champ disruptif de l'air ?

Correction

L'électron est lié ce qui rend l'air isolant, sauf si l'électron est soumis à un champ extérieur qui l'arrache, rendant ainsi l'air conducteur (lors d'un éclair).

Un électron de charge $q = -e$ dans une molécule globalement neutre ressent la force qui le lie à la molécule et la force électrique due au champ électrique extérieur. Les deux forces auxquelles est soumis l'électron sont

- la force appliquée par le noyau $\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ avec $r \approx 10^{-10}$ m ;
- et la force due au champ appliqué $-e \vec{E}$.

Il s'agit de déterminer le champ $\|\vec{E}\|$ nécessaire pour arracher l'électron c'est-à-dire compenser la force qui le lie à la molécule :

$$\|\vec{E}\| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (10^{-10})^2} = 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

La valeur trouvée correspond à un éclair entre deux prises de 220 V éloignées de 1 micromètre ce qui n'est pas absurde. D'autre part, on a surévalué ce champ car il s'agit en fait d'ioniser des molécules (O_2 ou N_2) et pas des atomes (H_2).

On sait (cf. cours) que le champ disruptif de l'air est en fait $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Notre valeur est donc bien surévaluée.

Devoir non surveillé

vendredi 19 janvier 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Le modèle de l'atome de Thomson

Disponible sur le site <http://culturesciences.chimie.ens.fr/>.

Un premier modèle de l'atome : celui du "plum-pudding"

La notion d'atome est développée pour la première fois par Démocrite entre -460 et -370 avant J.C, qui définit l'atome comme la plus petite partie insécable d'un corps simple. Il faudra cependant attendre le XIXème siècle, avec notamment J. Dalton et A. Avogadro pour que l'atome passe d'un concept philosophique à un concept scientifique. Ce n'est qu'au début du XXème siècle que l'on aura les moyens techniques pour sonder la matière à l'échelle subatomique.

La notion d'électron, ou "atome d'électricité", est posée par G. Stoney. La démonstration expérimentale ainsi que la caractérisation de cette particule viendront avec J.J. Thomson. Celui-ci prouve que la matière est constituée de lourdes parties positives et d'électrons, parties négatives plus légères, pour lesquelles il arrive à déterminer la charge et la masse. J.J. Thomson entrevoit ainsi la notion d'atomes sécables. Pour respecter la vision classique de la matière continue, il propose le modèle du "plum-pudding".



Schématisation du plum-pudding

Il imagine que les électrons, le "plum" se déplacent dans un milieu chargé positivement : le "pudding".
On donne :

- la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C,
- la masse d'un électron $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg,
- la masse d'un nucléon $m_n = 1,7 \times 10^{-27}$ kg,
- la constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s,
- la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8$ m·s⁻¹,
- la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12}$ F·m⁻¹.

Enoncé

1) Exprimer le champ de la densité volumique de charge ρ du pudding dont la charge $+q$ est uniformément répartie dans une sphère de rayon a .

2) En se plaçant dans un repère adapté à définir, étudier les symétries de la distribution de charge et en déduire celles du champ électrostatique. Déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} créé par le pudding, dans l'atome et à l'extérieur de l'atome.

3) Donner l'expression de la force \vec{F} ressentie par un électron du plum, de charge $-e$, situé en M , dans l'atome. Expliquer pourquoi l'électron est « élastiquement lié ».

- 4) Déterminer l'expression du potentiel électrique V créé par le pudding partout dans l'espace. On prendra par convention le potentiel nul à l'infini.
- 5) Tracer l'évolution de l'énergie potentielle $E_p(r)$ de l'électron avec la distance r au centre de l'atome ($r < a$). Déterminer l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène pris dans son état fondamental. Connaissant la valeur numérique de cette énergie d'ionisation (13,6 eV), calculer a . Discuter du résultat trouvé.

Correction

1) La densité volumique de charge du pudding de rayon a , de charge $+q$ est $\rho = \frac{3q}{4\pi a^3}$ pour $r < a$ et $\rho = 0$ pour $r > a$.

2) Le repère adapté est le repère sphérique de centre, le centre de l'atome : la distribution de charge est à symétrie sphérique ($\rho(r)$), tout plan qui contient le centre est plan de symétrie pour la distribution de charge. Ainsi \vec{E} appartient aux plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$. Donc $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$.

Le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre O, de rayon r est

$$\iint \vec{E} \cdot d^2\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, à l'extérieur de l'atome, $\vec{E}(r > a) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.

A l'intérieur de l'atome,

$$Q_{int} = \iiint \rho(r) d^3\tau = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3q}{4\pi a^3} = \frac{qr^3}{a^3}$$

donc $\vec{E}(r < a) = \frac{qr}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{u}_r$.

3) La force ressentie par le plum (un électron ponctuel en M , de charge $-e$) dans l'atome est $\vec{F} = -e\vec{E}(r < a)$, soit $\vec{F} = -\frac{eqr}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{u}_r$. Cette force est du type $\vec{F} = -kr\vec{u}_r$, avec $k > 0$, comme celle due à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide nulle : l'électron est « élastiquement lié ».

4) Le champ électrique est lié au potentiel électrique par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

A l'extérieur de l'atome,

$$\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} + C$$

La constante est nulle, car on prend le potentiel nul à l'infini : $V(r > a) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$.

A l'intérieur de l'atome,

$$\frac{qr}{4\pi \epsilon_0 a^3} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\frac{qr^2}{8\pi \epsilon_0 a^3} + C'$$

On détermine la constante par continuité de V en $r = a$:

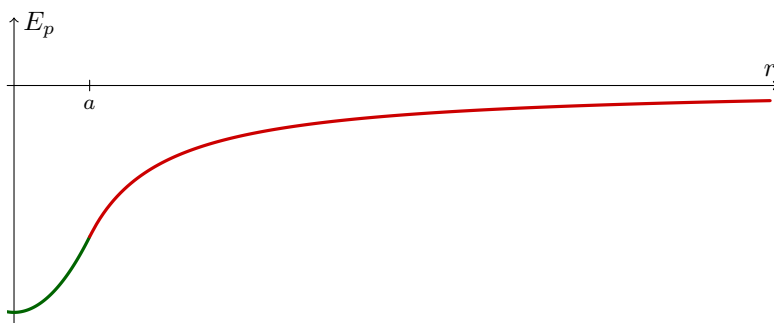
$$\frac{q}{4\pi \epsilon_0 a} = -\frac{q}{8\pi \epsilon_0 a} + C' \Rightarrow C' = \frac{3q}{8\pi \epsilon_0 a}$$

Aussi $V(r < a) = \frac{q}{8\pi \epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.

5) L'énergie potentielle étant $-eV$,

$$\begin{cases} E_p(r < a) = \frac{-eq}{8\pi \epsilon_0 a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) \\ E_p(r > a) = \frac{-eq}{4\pi \epsilon_0 r} \end{cases}$$

L'évolution de l'énergie potentielle est un puits de potentiel ("hamonique", ie parabolique à l'intérieur) :



L'énergie d'ionisation E_i est l'énergie qu'il faut fournir pour porter l'électron depuis son énergie fondamentale ($E_p(r=0) = \frac{-3e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$) jusqu'à l'infini ($E_p(r \rightarrow \infty) = 0$) : $E_i = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$.

On en déduit :

$$a = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 E_i} = \frac{3 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{8\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 13,6 \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

qui donne $a = 1,6 \times 10^{-10} \text{ m}$.

L'ordre de grandeur est respecté (autour de l'angström).