

Division du front d'onde

Notes de cours mardi 9 janvier 2018

I- Interféromètres à division du front d'onde

1. Dispositif des trous de Young

☸ Interférence à partir d'une unique source primaire *s'y retrouver*

si l'on veut réaliser des interférences, une solution consiste à créer deux sources à partir d'une unique source primaire. On parle alors de deux sources secondaires. C'est ce qui se passe en particulier dans le dispositif des trous de Young.

Il faut pour réaliser une source quasi ponctuelle :

- un laser (source ponctuelle à l'infini) ;
- ou bien un laser à qui on adjoint un objectif de microscope (source ponctuelle à distance finie) ;
- soit encore une lampe qui éclaire (grâce à un condenseur) un diaphragme (qui est dans ce cas la source ponctuelle à S distance finie).

👁 Principe du dispositif des trous de Young *schéma*

La figure 1 représente deux rayons lumineux différents, issus du même point source primaire (qu'on notera S) qui vont interférer en un point M . Depuis M , ces deux rayons lumineux semblent provenir (ou proviennent effectivement) de deux point sources secondaires S_1 et S_2 .

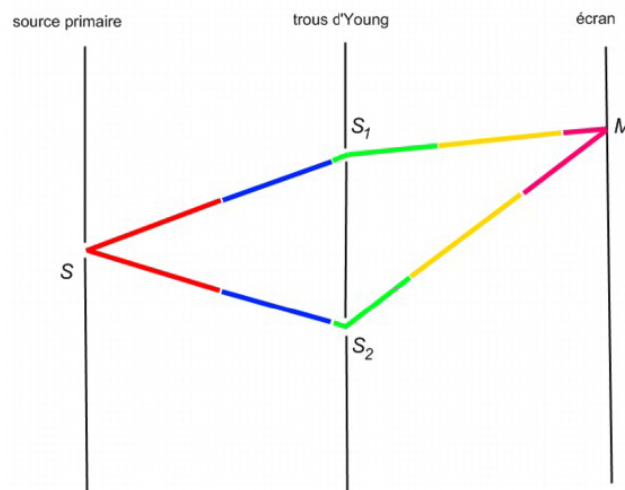


FIGURE 1 – Principe du dispositif des trous de Young

☸ Non localisation des interférences *s'y retrouver*

Dans le cas d'utilisation d'une source ponctuelle, les interférences ne sont pas localisées. C'est à dire qu'elles existent *a priori* dans toute la zone de recouvrement des faisceaux.

Aussi, il n'est pas nécessaire *a priori* d'utiliser un dispositif de formation d'image (lentille) pour visualiser

les interférences.



Phénomène de diffraction *vidéo*

Toute limitation spatiale (on parle de pupille) imposée à une onde provoque la diffraction de cette onde, c'est à dire un écart à la propagation rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par la réflexion, ni par la réfraction : l'optique géométrique est impuissante à expliquer le phénomène de diffraction.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



Champ d'interférences *s'y retrouver*

le champ d'interférences est le lieu des points M pouvant être atteints par les deux signaux. On parle aussi de zone de recouvrement des faisceaux.



1 Détermination de la différence de marche dans le cas des trous d'Young

exercice

- ▷ Déterminer la différence de marche δ dans le cas des trous d'Young.
- ▷ En utilisant le fait que les trous d'Young sont situés à une distance a faible devant la distance d séparant les trous de l'écran, faire un développement limité pour exprimer δ en fonction de x et y les coordonnées du point M sur l'écran.

▷ La différence de marche est

$$\delta = (SS_1M) - (SS_2M) = (SS_1 + S_1M) - (SS_2 + S_2M) = SS_1 - SS_2 + S_1M - S_2M$$

▷ On peut calculer, en prenant O , l'origine du repère au milieu de S_1S_2 .

$$S_1M^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2 + d^2 = d^2 \left[1 + \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2\right] \Rightarrow S_1M \approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{a}{2} + x}{d}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{d}\right)^2\right]$$

De la même façon,

$$S_2M \approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{a}{2} + x}{d}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{d}\right)^2\right] = d \left[1 + \frac{x^2 - ax + a^2/4}{2d^2} + \frac{y^2}{2d^2}\right]$$

Donc

$$\delta \approx SS_1 - SS_2 + d \left[1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4}{2d^2} + \frac{y^2}{2d^2}\right] - d \left[1 + \frac{x^2 - ax + a^2/4}{2d^2} + \frac{y^2}{2d^2}\right] = SS_1 - SS_2 + d \frac{2ax}{2d^2}$$

On trouve donc $\delta \approx SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d}$.



Ecran éclairé par un laser à travers des trous d'Young *schéma*

La figure 2 représente le plan d'observation derrière des trous d'Young éclairés par un laser.



Franges claires et sombres, interférences constructives et destructives *définition*

Le lieu des points M contigus de même éclairement, donc de même phase, est appelé frange d'interférences. $\Delta\varphi(M)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 2π modulo 2π mais deux cas sont particulièrement intéressants.

- si $\Delta\varphi(M) = 0[2\pi]$, $I > I_1 + I_2$, l'interférence est *constructive*. L'intensité y est maximale (on la notera I_{max}). On parle alors de *franges brillantes* ou de *franges claires*.
- au contraire si $\Delta\varphi(M) = \pi[2\pi]$, $I < I_1 + I_2$, l'interférence est *destructive*. L'intensité y est minimale (on la notera I_{min}). On parle dans ce cas de *franges sombres*. Si $I_{min} = 0$, on parle de *franges noires*.

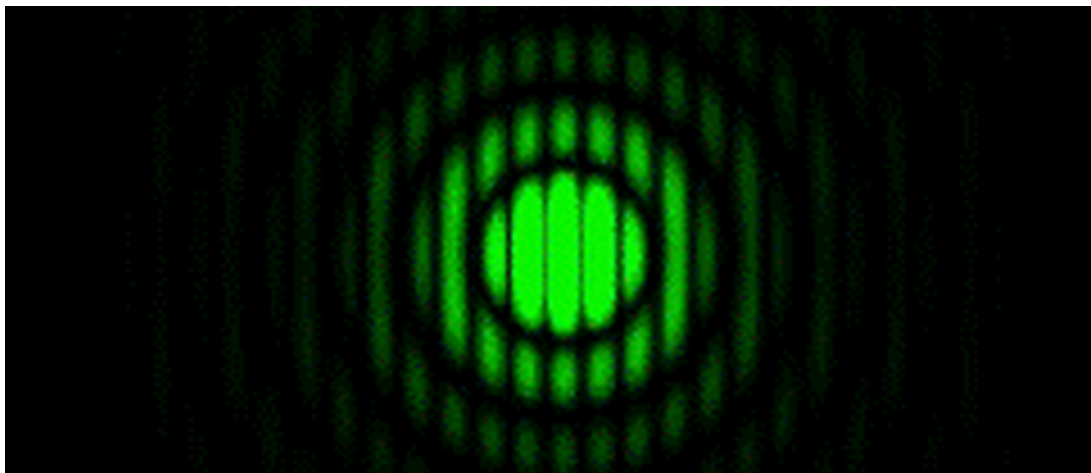


FIGURE 2 – Ecran éclairé par un laser à travers des trous d'Young

2 Forme des franges dans le cas des trous de Young *exercice*

- ▷ En utilisant la différence de marche $\delta \approx SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d}$, déterminer la forme des franges observées sur l'écran dans le cas des trous d'Young.
- ▷ Retrouver le résultat en utilisant les surfaces iso-éclairement.

▷ La formule de Fresnel donne :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

avec $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d})$ car il n'y a pas de déphasage supplémentaire. Aussi,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d}\right)\right)$$

qui n'est que fonction de x , donc invariante par translation suivant y : les franges sont rectilignes.

▷ L'intersection des surfaces iso-éclairement avec l'écran donne des hyperboles. Sur une petite distances, ces hyperboles peuvent être considérées comme quasi-rectilignes.

Interfrange *définition*

sur l'écran d'observation, la distance i entre deux franges consécutives de même nature est appelée interfrange. C'est par exemple l'espace entre deux franges sombres consécutives.

remarque

Cette définition n'a véritablement d'intérêt que si i est constant, c'est à dire si l'éclairement est une fonction périodique d'une direction (par exemple x) du plan d'observation.

3 Interfrange dans le cas des trous d'Young *exercice*

- ▷ En utilisant la différence de marche $\delta \approx SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d}$, déterminer l'interfrange dans le cas des trous d'Young écartés de a et observés à une distance d .

▷ La formule de Fresnel donne :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

avec $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d})$ car il n'y a pas de déphasage supplémentaire. Aussi,

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(SS_1 - SS_2 + \frac{ax}{d}\right)\right)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{x}{i} + \varphi_0\right)$$

Il s'agit bien d'une fonction périodique de x avec une période spatiale, l'interfrange, $i = \frac{\lambda d}{a}$.

▷ L'intersection des surfaces iso-éclairage avec l'écran donne des hyperboles. Sur une petite distances, ces hyperboles peuvent être considérées comme quasi-rectilignes.

2. Cohérence spatiale et passage aux fentes de Young



Principe des interféromètre *vidéo*

Le principe des interféromètre réside dans la superposition de deux ondes issues de deux sources.
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.



Critère semi-quantitatif de brouillage des franges à retenir

Si la variation de l'ordre d'interférence est $|\Delta p| > 1/2$ en un même endroit du plan d'observation, les interférences sont brouillées.

Cela peut arriver :

- pour une source large ($|\Delta p|$ est alors évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source), on parle de cohérence spatiale;
- pour une source non monochromatique ($|\Delta p|$ est alors évalué sur la moitié de l'étendue spectrale de la source), on parle de cohérence temporelle.



4 Cohérence spatiale d'une source *exercice*

Considérons deux points sources primaires très proches : S et S_0 . On admet que tous les rayons lumineux qui passent par la voie 1 (respectivement la voie 2) d'un interféromètre passent par S_1 (respectivement S_2). \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont des vecteurs normés dans les directions de S_1 et S_2 : $\vec{u}_1 = \frac{\vec{S_0 S_1}}{S_0 S_1}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\vec{S_0 S_2}}{S_0 S_2}$.

On appelle $\delta\Delta = (SS_1 - SS_2) - (S_0 S_1 - S_0 S_2)$ la différence de différence de marche entre les deux points sources pour aller en M suivant les deux voies de l'interféromètre.

▷ Montrer que

$$|\delta\Delta| \approx \left| \vec{S S_0} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \right| < \lambda$$

pour que les interférences ne soient pas brouillées.

$SS_1 = \sqrt{(\vec{S S_0} + \vec{S_0 S_1})^2}$. Donc $SS_1 = S_0 S_1 \cdot \left(1 + 2\vec{S S_0} \cdot \vec{u}_1 + \left(\frac{S S_0}{S_0 S_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Un développement limité au premier ordre donne : $SS_1 \approx S_0 S_1 \cdot \left(1 + \vec{S S_0} \cdot \vec{u}_1\right)$. De la même façon, $SS_2 \approx S_0 S_2 \cdot \left(1 + \vec{S S_0} \cdot \vec{u}_2\right)$.

Pour que S et S_0 donnent le même terme d'interférence, il faut que $\Delta\varphi(S, M) \approx \Delta\varphi(S_0, M) \Leftrightarrow \frac{2\pi\Delta(S)}{\lambda} \approx \frac{2\pi\Delta(S_0)}{\lambda}$, soit : $\left|\frac{2\pi\delta\Delta}{\lambda}\right| \ll 2\pi$, une condition approximative de non brouillage des interférences sur $\delta\Delta$ est donc : $|\Delta p| < 1$ $|\delta\Delta| < \lambda$. Donc :

$$|\delta\Delta| \approx \left| \vec{S S_0} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \right| < \lambda$$

pour que les interférences ne soient pas brouillées.

✪ Possibilité d'utiliser des fentes *s'y retrouver*

Aussi,

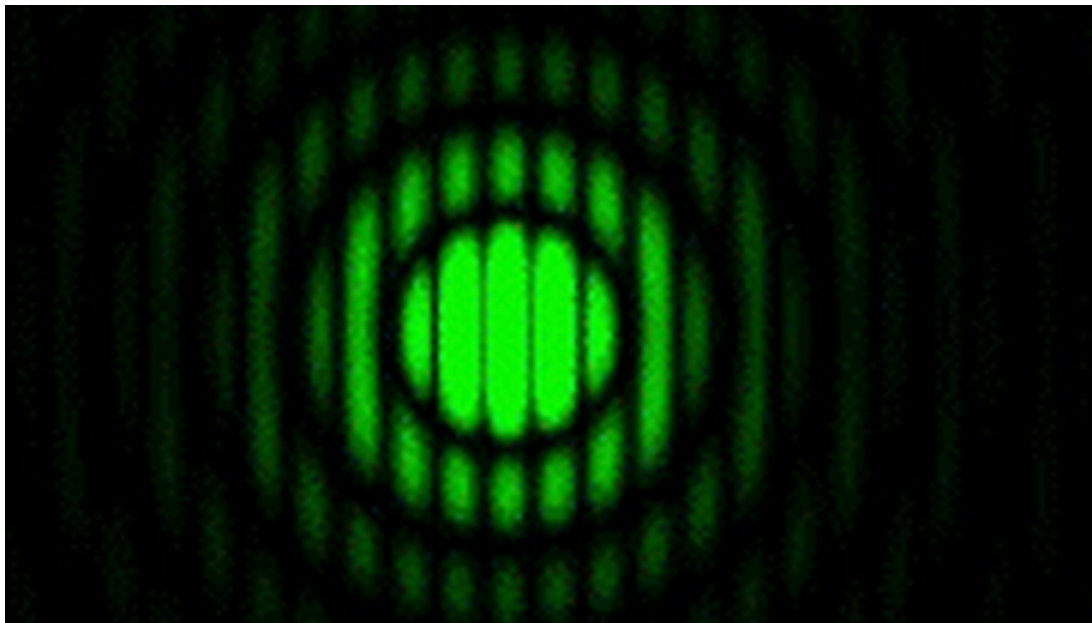
- dans le cas des fentes d'Young, $\delta\Delta$ est non nulle au premier ordre sauf si $\vec{SS}_0 \perp (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$. Pour cela, il faut utiliser une fente source primaire orthogonale à \vec{u}_1 et \vec{u}_2 : ainsi, on gagne en luminosité, sans brouiller les interférences.
- une autre solution consiste à avoir $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, ce qui est réalisé dans le cas des interféromètres à division d'amplitude.

👁 Expérience d'Young *vidéo*

L'expérience des trous (et des fentes d'Young) met en évidence le phénomène d'interférences.
Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Comparaison des dispositifs des trous d'Young et des fentes d'Young *schéma*

La figure 3 représente la comparaison des observations dans le cas des trous d'Young et des fentes d'Young.



↑ Trous d'Young et fentes d'Young ↓

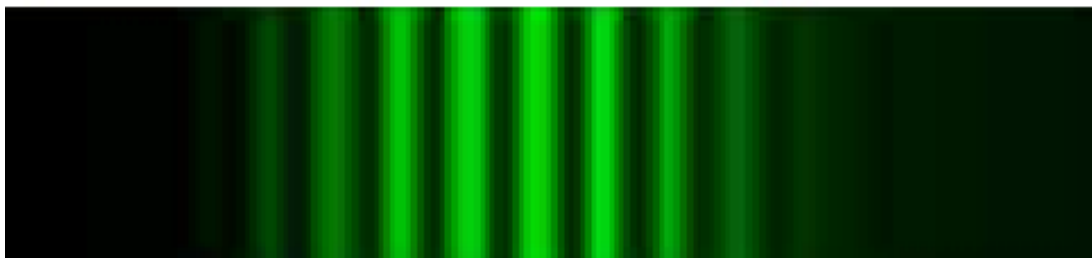


FIGURE 3 – Comparaison des dispositifs des trous d'Young et des fentes d'Young

II- Réseaux

👁️ Diffraction par deux fentes (fentes d'Young) *schéma*

La figure 4 représente l'intensité diffractée par deux fentes de largeur ℓ suivant x , et infinie suivant y , espacées de a suivant x , éclairée par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ).

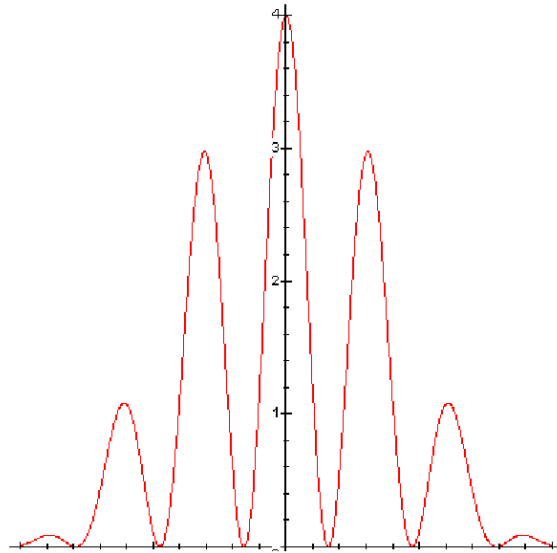


FIGURE 4 – Diffraction par deux fentes (fentes d'Young)

👁️ Diffraction par N fentes *schéma*

La figure 5 représente l'intensité diffractée par $N = 8$ fentes de largeur ℓ suivant x , et infinie suivant y , espacées de a suivant x , éclairée par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ).

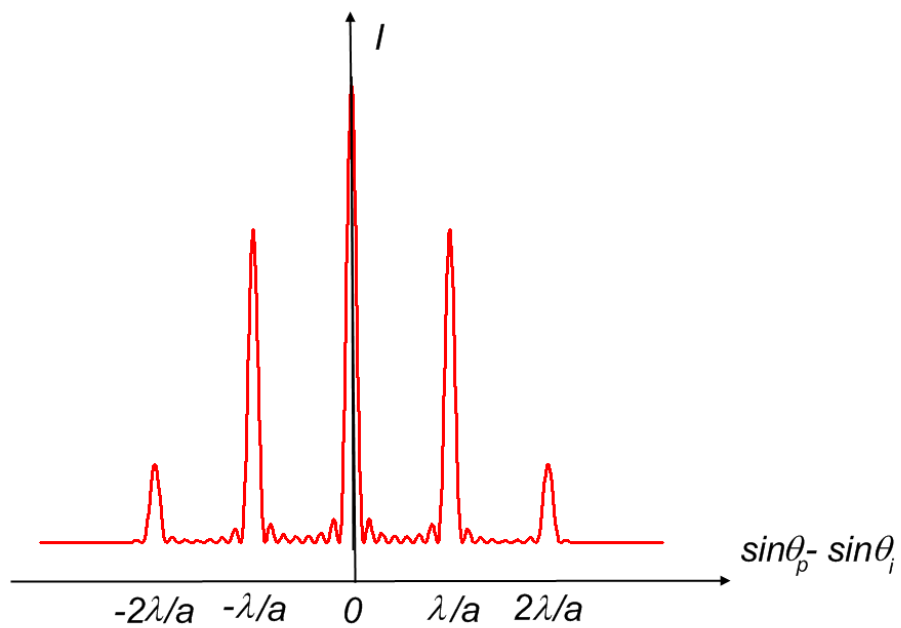


FIGURE 5 – Diffraction par N fentes

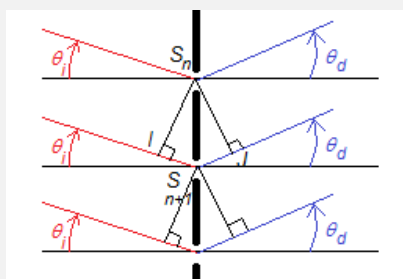
Effet du nombre de fentes sur la courbe de l'intensité lumineuse *animation*

La courbe de l'intensité en fonction de la direction présente des pics. En augmentant le nombre de fentes, la position des pics ne change pas, leur intensité augmente et leur largeur diminue.
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

Effet du nombre de fentes sur l'image de diffraction *animation*

La largeur des taches de diffraction diminue à mesure que le nombre de fentes augmente. On ne visualise de la lumière diffractée que dans certaines directions appelées ordres du réseau. L'ordre nul correspond à l'optique géométrique (pas de déviation des rayons incidents).
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

5 Détermination de la position et de la largeur des ordres par les conditions d'interférences. *exercice*



On s'intéresse à un ensemble de N trous alignés équidistants (de distance a) éclairés par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ faisant un angle θ_i avec la normale au plan des trous. On observe la lumière diffractée à l'infini dans la direction θ_d avec la normale au plan des trous.

▷ Calculer le déphasage φ entre deux ondes passant par deux trous successifs.

▷ En utilisant les vecteurs de Fresnel, déterminer la position des ordres par condition d'interférence constructive.

▷ Toujours en utilisant les vecteurs de Fresnel, déterminer la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ des franges brillantes par condition d'interférence destructive. Interpréter la dépendance de $\Delta\theta$ avec N .

▷ Le déphasage entre deux ondes passant par deux trous successifs est

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (IS_{n+1} + S_{n+1}J) = \frac{2\pi}{\lambda} a (-\sin\theta_i + \sin\theta_d)$$

▷ La condition d'interférence constructive est $\varphi = p2\pi$ avec p entier, soit :

$$p2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a (-\sin\theta_i + \sin\theta_d) \Leftrightarrow \sin\theta_d - \sin\theta_i = \frac{p\lambda}{a}$$

▷ La condition d'interférence destructive autour de $\varphi = 0$ est $N\Delta\varphi = \pm 2\pi$, la largeur du pic est donc $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{N}$. Or, en différentiant le déphasage on trouve

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \Delta(\sin\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} a \Delta\theta$$

autour de $\varphi = 0$. Soit :

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \Delta\theta = \frac{4\pi}{N} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Na}$$

Donc plus le nombre de fentes éclairées N est grand, plus la largeur du pic $\Delta\theta$ est petite.

Caractéristiques d'un réseau par transmission *s'y retrouver*

Un réseau par transmission est un ensemble de N pupilles identiques ($N \gg 1$) régulièrement espacées (de a suivant x).

- a est la période spatiale du réseau (en m) ;
- $n = \frac{1}{a}$ est le nombre de traits par millimètres (en m^{-1}).

Réseaux par réflexion *s'y retrouver*

un réseau par réflexion peut être compris comme un réseau par transmission accolé à un miroir plan.

Réseaux holographiques *s'y retrouver*

un réseau holographique est la photographie de franges d'interférences (l'interfrange i est alors la période a du réseau).

6 Formule des réseaux *théorème*

On cherche pour quelles directions il y a interférence constructive : $\Delta = a \cdot \sin \theta_d - a \cdot \sin \theta_i = p \cdot \lambda$, où p est entier. \Rightarrow

Si on éclaire un réseau de période spatiale a avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) qui fait un angle θ_i avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions repérées par les angles θ_p par rapport à la normale au plan du réseau, telles que

$$\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$$

(p , l'ordre de diffraction, est entier).

Utilisation d'un réseau *vidéo*

on visualise de la lumière monochromatique à la sortie d'un réseau par transmission uniquement dans certaines directions : les ordres. Eclairé en lumière blanche, le réseau disperse la lumière et permet d'en visualiser le spectre.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

Angle de déviation *définition*

L'angle de déviation pour l'ordre p est

$$D = \theta_p - \theta_i$$

où le rayon incident fait un angle θ_i avec la normale au réseau, et le rayon diffracté dans l'ordre p un angle θ_p .

7 Minimum de déviation dans le cas du réseau *théorème*

$dD = 0 = d\theta_p - d\theta_i$, soit $d\theta_p = d\theta_i$

Or la dérivation de la formule des réseaux donne : $\cos \theta_p \cdot d\theta_p - \cos \theta_i \cdot d\theta_i = 0$, soit $\cos \theta_p = \cos \theta_i$.

Il y a deux solutions : soit $\theta_p = \theta_i$ (et la déviation est nulle : c'est l'ordre nul, qui ne nous intéresse pas), soit $\theta_p = -\theta_i$. \Rightarrow

Si on éclaire un réseau de période spatiale a avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) et que la déviation est minimale ($D = D_{\min} \Leftrightarrow \theta_p = -\theta_i$) on a alors la formule

$$2 \sin \left(\frac{D_{\min}}{2} \right) = \frac{p \lambda}{a}$$

👁 Spectre visible *photo*



le spectre visible s'étale de 400nm à 750nm.

👁 Phénomène de recouvrement des ordres *animation*

La figure 6 représente les spectres des ordres 2 et supérieurs qui se recouvrent. Seul l'ordre 1 est exempt de ce défaut..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site alain.lerille.free.fr.

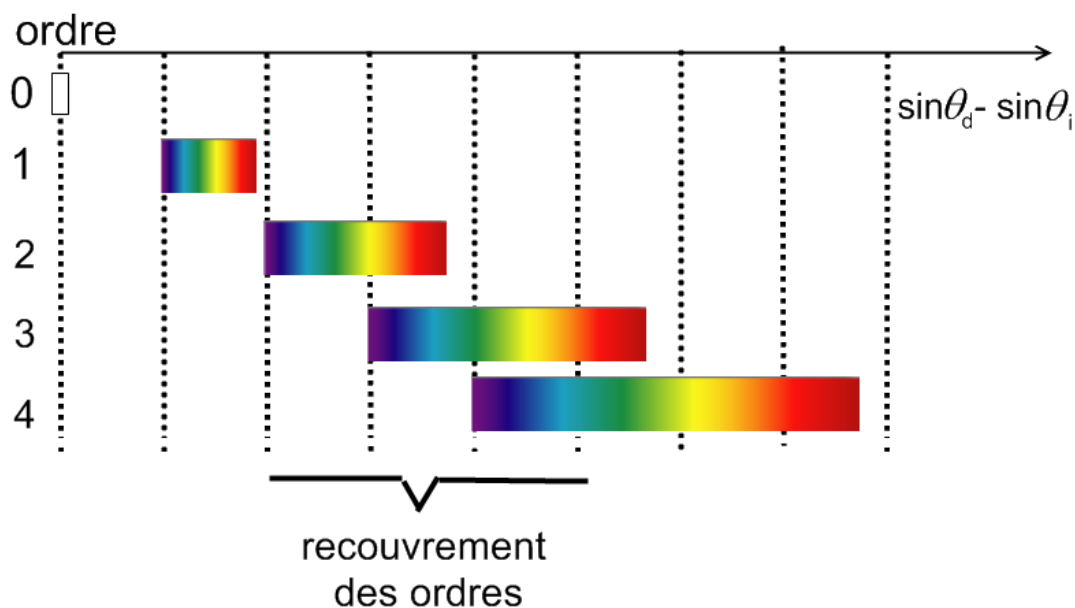


FIGURE 6 – Phénomène de recouvrement des ordres

⊗ Caractère dispersif des réseaux *s'y retrouver*

sauf pour l'ordre 0, la direction de diffraction dépend de la longueur d'onde.

⊗ Spectromètres et spectroscopes *s'y retrouver*

on peut analyser la lumière en créant une onde plane qui est diffractée par un réseau. On réalise ainsi un spectromètre (une seule longueur d'onde en sort) ou bien un spectroscopie (toutes les longueur d'onde sortent dispersées).

⊗ Goniomètre *s'y retrouver*

le goniomètre permet d'observer (sur un réticule) une onde plane qui est diffractée par un réseau, et de mesurer très précisément (avec un vernier angulaire) la déviation du faisceau.

III- Diffraction

1. Diffraction de Fraunhofer



Transmission d'une pupille diffractante *définition*

La transmission est complexe, telle que $|\tilde{t}| \in [0; 1]$:

- $\tilde{t}(P) = 0 \Rightarrow$ la pupille est opaque en P ;
- $\tilde{t}(P) = 1 \Rightarrow$ la pupille est transparente en P ;
- $\tilde{t}(P) = e^{j\varphi(P)} \Rightarrow$ la pupille est un "objet de phase" en P .



8 Objet de phase *exercice*

On s'intéresse à une pupille telle que

- pour $x > 0$, $\tilde{t}(x) = 1$ la pupille est transparente ;
- pour $x < 0$, la pupille est une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e d'indice n .

▷ Déterminer $\tilde{t}(x)$ pour $x < 0$.

▷ $\tilde{t}(x) = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\cdot e}$ pour $x < 0$.



remarque

dans le cadre de l'optique géométrique, les rayons émergents de la pupille devraient être dans la même direction que ceux qui sont incidents ($\vec{k}_i = \vec{k}_d$), du fait de la propagation rectiligne de la lumière. Mais dans le cadre de la diffraction, ce n'est pas nécessairement le cas : $\vec{k}_i \neq \vec{k}_d$.



Montage académique *animation*

La figure 7 représente les conditions de la diffraction de Fraunhofer : on éclaire la pupille diffractante avec une onde incidente plane monochromatique (de vecteur d'onde \vec{k}_i), c'est à dire par un faisceau laser parallèle ou par une source ponctuelle dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1 , et on observe en M à l'infini (dans la direction du vecteur d'onde \vec{k}_d) c'est à dire dans le plan focal d'une lentille convergente L_2 .

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site alain.lerille.free.fr.



Montage simplifié *schéma*

La figure 8 représente le montage simplifié de la diffraction de Fraunhofer : en fait, on peut utiliser une unique lentille juste avant la pupille diffractante et regarder l'image de diffraction dans le plan image de la source ponctuelle par cette lentille.



Ecran éclairé par un laser à travers un réseau de transmission sinusoïdale *photo*



Le faisceau d'un laser, une fois passé à travers un réseau de transmission sinusoïdale, laisse trois taches sur un écran, celle du centre étant plus lumineuse.

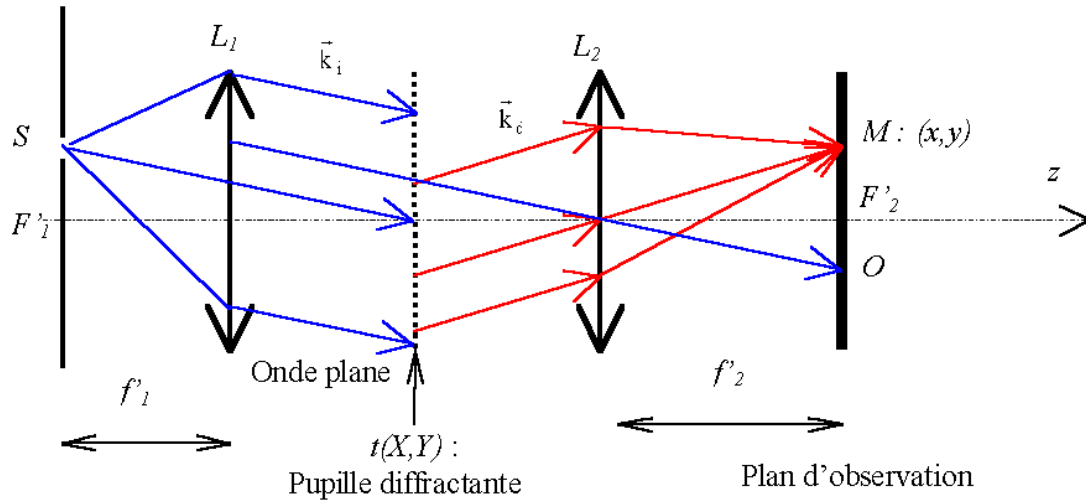


FIGURE 7 – Montage académique

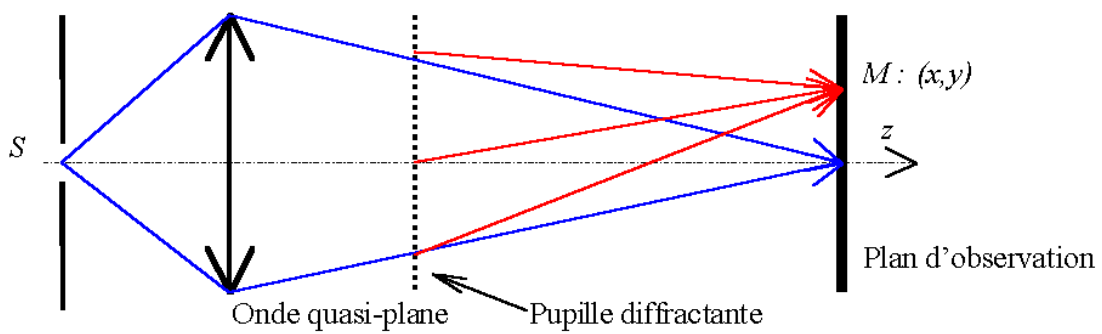
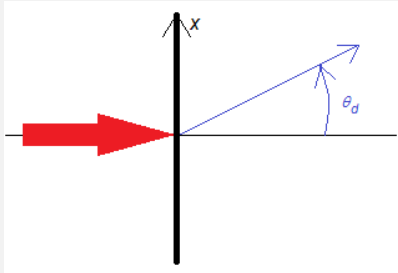


FIGURE 8 – Montage simplifié

I

9 Onde plane qui passe par un réseau de transmission sinusoïdale *exercice*



On s'intéresse à une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ incidente de façon normale sur un réseau unidimensionnel d'extension infinie de coefficient de transmission sinusoïdal

$$t(x) = t_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) \right]$$

et de pas a supérieur à λ .

▷ Décomposer $t(x)$ en une somme d'exponentielles complexes.
On cherche l'amplitude de l'onde transmise sous la forme :

$$\tilde{A}(\vec{r}, t) = \tilde{\alpha}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r})} + \tilde{\alpha}_{-1} e^{j(\omega t - \vec{k}_{-1} \vec{r})} + \tilde{\alpha}_{+1} e^{j(\omega t - \vec{k}_{+1} \vec{r})}$$

▷ Ecrire la continuité de l'amplitude de l'onde au passage de la pupille.
▷ En déduire que l'onde est diffractée dans trois directions qui correspondent aux fréquences spatiale n/a par la relation $\sin(\theta_n) = n \frac{a}{\lambda}$ avec $n = 0, -1, \text{ ou } 1$.
▷ Pourquoi les intensités lumineuses correspondant à ces directions sont-elles proportionnelles au carré des composantes de la décomposition de Fourier complexe de $t(x)$?

▷ Comme $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$,

$$t(x) = t_0 \left[1 + \frac{e^{j \frac{2\pi x}{a}}}{2} + \frac{e^{-j \frac{2\pi x}{a}}}{2} \right]$$

▷ Comme l'onde incidente est d'amplitude $\tilde{A}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$, avec $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_z$.

$$\tilde{A}(z=0, t) = t(x) \tilde{A}_0 e^{j(\omega t)}$$

soit

$$\tilde{\alpha}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_0 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y))} + \tilde{\alpha}_{-1} e^{j(\omega t - \vec{k}_{-1} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y))} + \tilde{\alpha}_{+1} e^{j(\omega t - \vec{k}_{+1} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y))} = t_0 \tilde{A}_0 e^{j(\omega t)} \left[1 + \frac{e^{j \frac{2\pi x}{a}}}{2} + \frac{e^{-j \frac{2\pi x}{a}}}{2} \right]$$

On trouve donc

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{-1} = \tilde{\alpha}_{+1} = \frac{\tilde{\alpha}_0}{2} = \frac{t_0 \tilde{A}_0}{2} \\ \vec{k}_0 \vec{e}_y = \vec{k}_{+1} \vec{e}_y = \vec{k}_{-1} \vec{e}_y = 0 \\ \vec{k}_0 \vec{e}_x = 0 \\ \vec{k}_{+1} \vec{e}_x = \frac{2\pi}{a} \\ \vec{k}_{-1} \vec{e}_x = -\frac{2\pi}{a} \end{cases}$$

▷ Comme la longueur d'onde ne varie pas lors de la diffraction,

$$|\vec{k}_0| = |\vec{k}_{+1}| = |\vec{k}_{-1}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On peut donc écrire

$$\vec{k}_n = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos \theta_n \vec{e}_z + \sin \theta_n \vec{e}_x)$$

avec $\sin \theta_n = n \frac{a}{\lambda}$ pour $n = 0, -1, \text{ ou } 1$.

▷ Les intensités lumineuses correspondant à ces directions sont proportionnelles au carré de l'amplitude ($\tilde{\alpha}_n$) donc des composantes de la décomposition de Fourier complexe de $t(x)$. Ici, si l'intensité pour $n = 0$ est I_0 , alors les intensités pour $n = 1$ et $n = -1$ sont $\frac{I_0}{4}$.

**Fréquence spatiale** *s'y retrouver*

Une périodicité a dans la pupille de diffraction correspond à une fréquence spatiale $\sigma = \frac{1}{a}$.
 σ s'exprime en m^{-1} .

**Lois de la diffraction pour une fréquence spatiale** *à retenir*

Une périodicité a dans la pupille de diffraction correspond à une fréquence spatiale

$$\sigma = \frac{1}{a}$$

La lumière est diffractée dans une direction faisant un angle θ avec l'axe optique tel que

$$\sin \theta = \lambda \sigma$$

Dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale f' , on observe de la lumière à une distance du foyer image

$$f' \lambda \sigma$$

L'intensité lumineuse diffractée I est proportionnelle au module au carré du coefficient de Fourier c_n de la transmission de la pupille : $I \propto |c_n|^2$.

**10 Mire unidimensionnelle infinie de N traits équidistants de pas a** *exercice*

On s'intéresse à une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ incidente de façon normale sur un réseau unidimensionnel d'extension infinie de N traits équidistants de pas a , de coefficient de transmission

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[t_n e^{j\left(\frac{2\pi n x}{a} + \varphi_n\right)} \right]$$

et de pas a supérieur à λ .

- ▷ Dans quelles directions observe-t-on de la lumière diffractée?
- ▷ Retrouve-t-on les résultats du réseau?

▷ Les fréquences spatiales sont $\sigma_n = \frac{n}{a}$, donc on observera de la lumière diffractée dans les directions faisant un angle θ_n avec la normale à la mire, avec

$$\sin \theta_n = \lambda \sigma_n = \frac{n}{a} \lambda$$

▷ On retrouve bien la formule des réseaux :

$$\sin \theta_n - \sin \theta_i = \frac{n}{a} \lambda$$

car $\theta_i = 0$.

**11 Fente rectiligne de largeur a** *exercice*

On s'intéresse à une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ incidente de façon normale sur une fente rectiligne de largeur a , de coefficient de transmission

$$t(x) = \int_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} e^{j(2\pi \sigma x + \varphi(\sigma))} d\sigma$$

▷ En utilisant les résultats vus en première année ($\sin \theta_{max} = \frac{\lambda}{a}$), montrer que les composantes de Fourier ne prennent des valeurs notables que pour $|\sigma| < \sigma_{max}$. On donnera σ_{max} .

▷ Comme on a vu en première année que $\sin \theta_{max} = \frac{\lambda}{a}$ et que d'autre part

$$\sin \theta = \lambda \sigma < \frac{\lambda}{a}$$

on peut en déduire que $\sigma_{max} = \frac{1}{a}$.

2. Filtrage spatial



Montage de Fourier *animation*

La figure 9 représente le montage de Fourier dans lequel on se sert des propriétés de la diffraction de Fraunhofer pour filtrer une image : la pupille diffractante est alors une diapositive, l'image à filtrer. En plaçant des filtres dans le plan de diffraction, l'image conjuguée de la diapositive par la lentille L_2 sera changée..

Vous pouvez retrouver le schéma animé sur le site alain.lerille.free.fr.

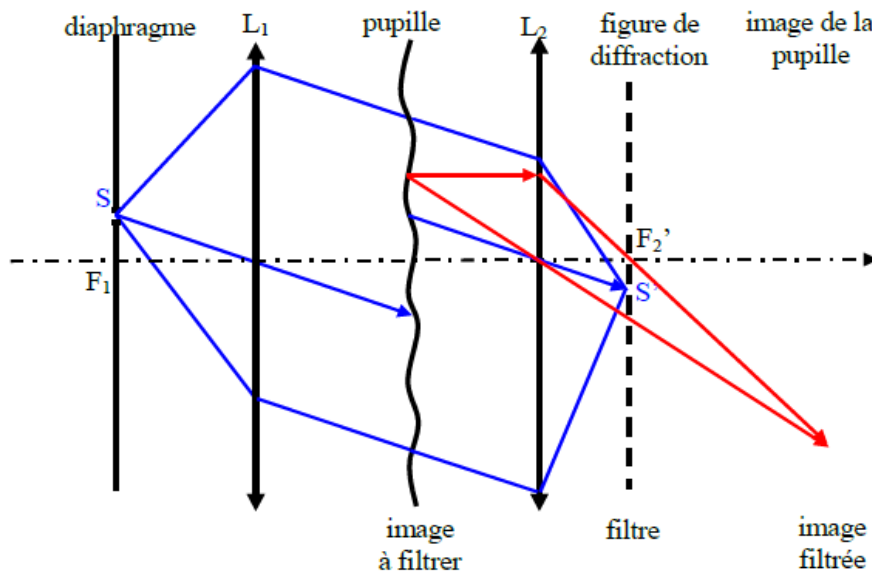


FIGURE 9 – Montage de Fourier



Divers types de filtrages *définition*

- le filtrage passe-bas : l'objet dans le plan de diffraction est un diaphragme centré sur l'image géométrique et l'image filtrée voit ses détails amoindris (détramage),
- le filtrage passe-haut : l'objet dans le plan de diffraction est un cache centré sur l'image géométrique et l'image filtrée voit ses détails renforcés (strioscopie).



Optique de Fourier *vidéo*

grâce au montage de Fourier, on peut renforcer ou diminuer des fréquences spatiales. L'expérience d'Abbe consiste à éliminer les hautes fréquences dans une seule dimension : on transforme ainsi une grille à deux dimension en une grille à une dimension.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

1) Modélisation de du VLTI (téléscope interférentiel) *exercice*

On assimile deux télescopes distants de a à deux trous T_1 et T_2 de taille négligeable et à une lentille d'axe optique Oz , de centre O , de distance focale f' . Le foyer image de la lentille est noté F' et le plan focal est le plan d'observation. T_1 et T_2 sont à une distance $\frac{a}{2}$ de l'axe optique.

1) Un unique objet ponctuel à l'infini A est observé dans la direction de l'axe optique.

Pour simplifier, on supposera que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2,0 \mu\text{m}$.

1.a) Où se trouve l'image géométrique A' de A ?

1.b) Calculer la différence de marche δ_0 entre les ondes provenant de A et se recombinant en A' , passant par les deux trous T_1 et T_2 .

1.c) Dans quelle mesure peut-on considérer que le contraste des interférences vaut 1? Dans la suite on supposera effectivement que le contraste vaut 1.

1.d) Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_A(x)$ d'un point d'abscisse x dans le plan focal.

1.e) En déduire l'expression de l'interfrange.

1.f) Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan $(x, F'y)$ telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

2) Un unique objet ponctuel à l'infini B est observé dans la direction $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan xOz , avec les mêmes caractéristiques que A .

2.a) A quelle distance x_B de F' se trouve l'image géométrique de B ?

2.b) Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_B(x)$ en un point d'abscisse x .

2.c) L'interfrange est-elle différente de celle trouvée précédemment?

3) Deux objets ponctuels à l'infini A et B sont observés dans les directions $i_A = 0$ et $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan xOz .

Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2,0 \mu\text{m}$ et la même puissance lumineuse.

3.a) Ces deux sources sont-elles cohérentes?

3.b) En déduire l'intensité lumineuse $I_{A \cup B}(x)$ en un point d'abscisse x .

3.c) Pour quelle(s) valeur(s) de a y a-t-il brouillage des interférences? On exprimera le résultat en fonction de i_B .

3.d) Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.

3.e) Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire i_{\min} du VLTI?

Correction :

1) Observation d'une source ponctuelle dans la direction de l'axe optique

1.a) $\tan i_A = \frac{x_A}{f'}$, donc $x_A = 0$ (normal : A' en F').

1.b) La différence de marche entre les ondes provenant de A et se recombinant en A' , passant par les deux trous T_1 et T_2 sur la figure 5 est $\delta_0 = 0$ d'après la symétrie du problème.

1.c) Le contraste des interférences vaut 1 si les intensités passant par T_1 et T_2 sont identiques.

1.d) L'intensité lumineuse est $I_A = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) = 2I_1 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)\right]$ où δ est la différence de marche. Le théorème de Malus permet d'écrire $\delta = a(i_m) \Rightarrow \delta = \frac{ax}{f'}$.

1.e) Puisque $I_A = 2I_1 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'}\right)\right]$ l'interfrange (périodicité spatiale des interférences) est $i = \frac{\lambda f'}{a}$.

1.f) On observe des franges rectilignes (parallèles à $F'y$, éloignées de i), dans une zone circulaire autour de F' qui est la tache de diffraction ("tache d'Airy", non exigible).

2) Observation d'une source ponctuelle dans une direction différente de celle de l'axe optique

2.a) $\tan i_B = \frac{x_B}{f'}$, donc $x_B = f' i_B$.

2.b) L'intensité lumineuse est $I_B = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) = 2I_1 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)\right]$ où δ est la différence de marche. Le théorème de Malus permet d'écrire $\delta = a(i_m - i_B) \Rightarrow \delta = \frac{a}{f'}(x - x_B)$.

2.c) Puisque $I_B = 2I_1 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'}(x - x_B)\right)\right]$ l'interfrange (périodicité spatiale des interférences) est inchangée : $i = \frac{\lambda f'}{a}$.

3) Observation de deux sources ponctuelles

3.a) Ces deux sources sont incohérentes.

3.b) L'intensité résultante est donc la somme des deux intensités :

$$I_{A \cup B}(x) = I_A + I_B = 2I_1 \left[2 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} x \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} (x - x_B) \right) \right]$$

donc
$$I_{A \cup B}(x) = 4I_1 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} (2x - x_B) \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} x_B \right) \right].$$

3.c) Il y a brouillage des interférences si $\cos \left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} x_B \right) = 0$ soit $\frac{\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} x_B = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $a = \frac{\lambda f'}{x_B} \left(\frac{1}{2} + k \right) \Rightarrow a = \frac{\lambda}{i_B} \left(\frac{1}{2} + k \right).$

3.d) On met les deux télescopes très proches ($a \mapsto 0$) visant dans la direction de l'étoile double. On visualise des franges d'interférence. On éloigne ensuite un télescope de l'autre et on s'arrête lorsque brouillage des franges. L'angle entre les deux étoiles est alors $i_B = \frac{\lambda}{2a}.$

3.e)

i_{min} correspond à a_{max} , soit $i_{min} = \frac{\lambda}{2a_{max}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{2 \times 100} = 1,0 \times 10^{-8} rad = 21 msec.$

Éléments de correction :

- 1) $x_A = 0$ et $I_A = 2I_1 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} x \right) \right].$
- 2) $x_B = f' i_B$ et $I_B = 2I_1 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} (x - x_B) \right) \right].$
- 3) $i_{min} = 21 msec.$

Les techniques mathématiques à connaître

Analyse de Fourier

Décomposition en séries de Fourier

Soit $s(t)$ une fonction T -périodique. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

- $s(t)$ peut se décomposer en sinus et cosinus :

$$s(t) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t)] + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sin(n\omega t)]$$

avec :

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega t) dt \\ B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

- $s(t)$ peut se décomposer en cosinus (avec une phase à l'origine) :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t + \phi_n)]$$

avec : $n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \tan \phi_n = -\frac{B_n}{A_n} \end{cases}$ et $C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$.

- $s(t)$ peut se décomposer en exponentielles complexes : $s(t) = \Re(\tilde{s}(t))$ avec : $\tilde{s}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\tilde{C}_n \exp(jn\omega t)]$

où :

$$\tilde{C}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \exp(-jn\omega t) dt \text{ et } \begin{cases} n > 0 \Rightarrow \tilde{C}_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \\ n = 0 \Rightarrow \tilde{C}_0 = C_0 = \frac{A_0}{2} \\ n < 0 \Rightarrow \tilde{C}_n = \frac{A_{-n} + jB_{-n}}{2} \end{cases}$$

On peut voir que $A_n = \tilde{C}_n + \tilde{C}_{-n}$ et $B_n = j(\tilde{C}_n - \tilde{C}_{-n})$.

NB : on peut utiliser aussi, pour éviter les calculs des coefficients de Fourier, les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Technique à maîtriser

jeudi 11 janvier 2018

I- Les capacités exigibles

1. Trous et fentes de Young



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Savoir que les franges ne sont pas localisées dans le cas des trous d'Young.
 Définir, déterminer et utiliser l'ordre d'interférences.
 Interpréter la forme des franges observées sur un écran éloigné parallèle au plan contenant les trous d'Young.
 Confronter les deux dispositifs des trous d'Young et des fentes d'Young : analogies et différences.

2. Optique de Fourier



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Construire l'onde transmise par un réseau de transmission sinusoïdal par superposition de trois ondes planes définies par la condition aux limites sur le réseau. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
 Dans le cas de N traits parallèles équidistants ou d'une fente, relier une fréquence spatiale du spectre à la position d'un point du plan de Fourier. Relier l'amplitude de l'onde en ce point à la composante du spectre de Fourier correspondant. Interpréter les observations dans le plan de Fourier.
 Dans le cas d'une fente, faire le lien avec la relation $\sin \theta = \lambda/a$ vue en première année.
 Utiliser l'analyse de Fourier pour interpréter les effets d'un filtrage de fréquences spatiales dans le plan de Fourier.

3. Réseaux



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Confronter le modèle de N trous d'Young à l'étude expérimentale du réseau plan.
 Utiliser un grapheur pour discuter l'influence de N sur la finesse sans calculer explicitement l'intensité sous forme compacte. Utiliser la construction de Fresnel pour établir la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes.

II- Méthodes

1. Trous et fentes de Young



A) Se ramener au dispositif des trous d'Young *méthode*

Tous les interféromètres à division du front d'onde peuvent se ramener au dispositif des trous d'Young. L'interfrange est $\frac{\lambda D}{a}$, où D est la distance d'observation des deux trous source éloignés de a .
 Pour connaître l'intensité, il s'agit de calculer la différence de marche Δ , de ne pas oublier les déphasages

supplémentaires φ_{sup} : avant d'appliquer la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta + \varphi_{sup}\right)$$

B) Déterminer l'interfrange *méthode*

Une fois écrit l'intensité lumineuse grâce à la formule de Fresnel sous la forme

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi\frac{x}{i} + \varphi_0\right)$$

l'interfrange i apparaît naturellement.

2. Optique de Fourier

C) Déterminer la transmittance d'une pupille *méthode*

$\tilde{i}(P) = 0 \Rightarrow$ la pupille est opaque en P ;

$\tilde{i}(P) = 1 \Rightarrow$ la pupille est transparente en P .

$\tilde{i}(P) = e^{j\Delta\varphi}$ exponentielle complexe \Rightarrow la pupille est un "objet de phase" en P qui introduit un déphasage $\Delta\varphi$.

D) Déterminer les fréquences spatiales *méthode*

Pour un objet de taille a , une fréquence spatiale $\sigma = \frac{1}{a}$ (et toutes ses harmoniques) apparaissent.

Cela se caractérise par de la lumière dans une direction faisant un angle $\theta = \lambda\sigma$ avec l'axe optique.

L'intensité lumineuse est proportionnelle au module au carré du coefficient de Fourier.

Observé dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f' , on observera de la lumière à une distance $f'\lambda\sigma$ du foyer.

E) Filtrer une image *méthode*

On discerne en particulier :

- le filtrage passe-bas : l'objet dans le plan de diffraction est un diaphragme centré sur l'image géométrique et l'image filtrée voit ses détails amoindris (détramage),
- le filtrage passe-haut : l'objet dans le plan de diffraction est un cache centré sur l'image géométrique et l'image filtrée voit ses détails renforcés (strioscopie),

3. Réseaux

F) Retrouver la formule des réseaux et la finesse des ordres *méthode*

Utiliser la construction de Fresnel pour établir la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. A FAIRE...

G) Appliquer la formule des réseaux *méthode*

Si on éclaire un réseau de période spatiale a avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) qui fait un angle θ_i avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions repérées par les angles θ_p par rapport à la normale au plan du réseau, telles que

$$\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \frac{\lambda}{a}$$

(p est entier).

III- Exercices

1. Trous et fentes de Young

1.1) Trous de Young sans diffraction

Une source ponctuelle S_0 (en $(0, 0, -l_0)$) monochromatique (de longueur d'onde λ) éclaire un écran opaque (placé en $z = -D$, où $D < l_0$) est percé de deux trous ponctuels S_1 (en $(\frac{a}{2}, 0, -D)$) et S_2 (en $(-\frac{a}{2}, 0, -D)$). On observe les interférences sur un écran en $z = 0$.

1) Calculs généraux :

On considère que les trous envoient, sur tout l'écran, des ondes de même intensité I_0 . On néglige donc le phénomène de diffraction.

1.a) Exprimer l'éclairement E en fonction de Δ , la différence de marche au point M et I_0 .

1.b) Déterminer la différence de marche Δ pour le point M placé en $(x, y, 0)$.

2) On suppose de plus que $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$.

2.a) Grâce à un développement limité, simplifier l'expression de Δ .

2.b) En déduire la forme des franges.

2.c) Quelle est l'interfrange i ?

1) Calculs généraux :

1.a) $E = 2.I_0. (1 + \cos (\frac{2.\pi.\Delta}{\lambda}))$.

1.b) $\Delta = S_1M - S_2M = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$.

2) On suppose de plus que $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$.

2.a) $\Delta \approx -\frac{a.x}{D}$.

2.b) Les franges sont rectilignes, parallèles à (Oy) .

2.c) $i = \frac{\lambda.D}{a}$.

1.2) Franges rectilignes dans le cas d'une visualisation à distance finie

On s'intéresse à deux sources qui sont à une distance $a = S_1S_2$, l'une de l'autre sur l'axe Ox . Ainsi, leurs coordonnées sont $S_1 (-\frac{a}{2}, 0, 0)$ et $S_2 (+\frac{a}{2}, 0, 0)$.

Le plan d'observation est le plan $z = D$, D est donc la distance des sources à l'écran. Un point d'observation M a pour coordonnées (x, y, D) .

Le milieu de propagation est l'air d'indice $n = 1$.

1) Montrer que la différence de marche en fonction de x est

$$\Delta = \Delta_0 + \frac{x.a}{D}$$

où Δ_0 est une constante.

2) En déduire que les franges sont rectilignes, parallèles à Oy .

3) Montrer que l'interfrange est $i = \frac{\lambda.D}{a}$.

4) Pour visualiser à l'œil nu les franges, il faut que l'interfrange soit suffisant, c'est à dire $i > 100\mu m$. Qu'est ce que cela impose sur a ?

1)

$$\Delta = SS_1 + S_1M - SS_2 - S_2M = \Delta_0 + S_1M - S_2M$$

avec $\Delta_0 = SS_1 - S_2M$ et $S_1M - S_2M = \sqrt{S_1M^2} - \sqrt{S_2M^2}$. En remplaçant par les coordonnées précédemment données,

$$\Delta = \Delta_0 + \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

soit :

$$\Delta = \Delta_0 + D \cdot \left[\left(1 + \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

On fait un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$ et $\frac{a}{D}$:

$$\Delta \approx \Delta_0 + D \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 + x.a + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 - x.a + \frac{a^2}{4} + y^2}{D^2} \right) \right] = \Delta_0 + \frac{x.a}{D}$$

2) L'intensité lumineuse en M est donc

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi x.a}{\lambda D} + \varphi_{sup} + \frac{2\pi \cdot \Delta_0}{\lambda} \right)$$

L'intensité ne dépendant que de x , les franges sont rectilignes, parallèles à Oy .

3) L'intensité lumineuse en M peut se réécrire sous la forme

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \left(2\pi \frac{x}{i} + \psi \right)$$

où i est la période spatiale des franges, c'est à dire l'interfrange. On en tire l'interfrange $i = \frac{\lambda \cdot D}{a}$. Quand x varie de $\pm i$ alors Δ varie de $\pm \lambda$.

4) Comme $\lambda \sim 500nm$ et $D \sim 50cm$, on trouve :

$$a < \frac{25 \cdot 10^{-8}}{10^{-4}} = 2,5mm$$

ce qui permet bien de vérifier que $a \ll D$.

1.3) Franges rectilignes dans le cas d'une visualisation à l'infini

On s'intéresse à la visualisation des interférences dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f' .

1) Montrer que la différence de marche est

$$\Delta = \Delta_0 - \frac{a \cdot x}{f'}$$

où Δ_0 est une constante.

2) En déduire que les franges sont donc rectilignes, parallèles à Oy , comme précédemment.3) Montrer que l'interfrange est : $i = \frac{\lambda \cdot f'}{a}$.

1) La lentille conjugue le point M avec l'infini dans la direction qui fait un angle α avec l'axe optique. Aussi, S_1 et H sont dans le même plan d'onde : $(S_1M) = (HM)$. La différence de marche est

$$\Delta = (SS_1M) - (SS_2M) = SS_1 - SS_2 - S_2H$$

On peut poser comme précédemment $\Delta_0 = SS_1 - S_2M$. D'autre part, $S_2H = S_1S_2 \cdot \sin \alpha \approx a \cdot \alpha = \frac{a \cdot x}{f'}$.

2) L'intensité lumineuse en M est donc

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi x.a}{\lambda f'} + \varphi_{sup} + \frac{2\pi \cdot \Delta_0}{\lambda} \right)$$

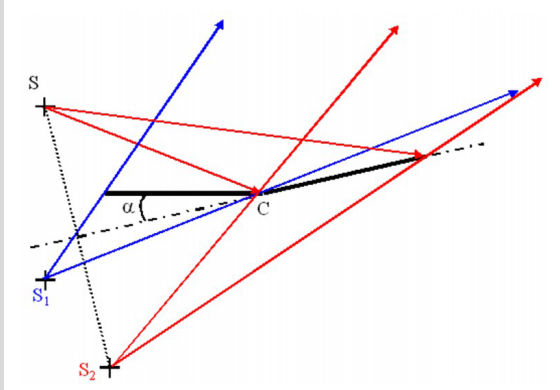
On voit que l'intensité ne dépendant que de x , les franges sont donc rectilignes, parallèles à Oy , comme précédemment.

3) L'intensité lumineuse en M peut se réécrire sous la forme

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{i} + \psi\right)$$

où i est la période spatiale des franges, c'est à dire l'interfrange.

1.4) Miroirs de Fresnel et trous d'Young équivalents



On s'intéresse au dispositif des miroirs de Fresnel. Les miroirs de Fresnel sont deux miroirs plans ayant une arête commune, dont l'angle α entre les normales est petit. On note R la distance de la source S à l'arête.

Dans ce dispositif, S_1 est le symétrique de S par rapport au premier miroir M_1 , tandis que S_2 est le symétrique de S par rapport au second miroir M_2 .

1) Déterminer $S_1 S_2$.

$$S_1 S_2 = 2 \cdot R \cdot \alpha.$$

1.5) Miroir de Lloyd et trous d'Young équivalents

Le miroir de Lloyd est un simple miroir plan. On note R la distance de la source S au miroir.

1) Déterminer $S_1 S_2$, la distance entre deux trous d'Young équivalents.

Dans ce dispositif, S_1 est simplement S , tandis que S_2 est le symétrique de S par rapport au miroir. Ainsi, la distance $S_1 S_2$ est $2R$.

1.6) Angle entre deux miroirs de Fresnel

On s'intéresse à deux miroirs de Fresnel qui font entre eux un angle α inconnu. Ils sont éclairés par un laser hélium-néon (de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$) qui voit son faisceau élargi par un objectif de microscope placé à une distance $d = 20 \text{ cm}$ de l'arête des miroirs. On observe des franges sur un écran à une distance $D = 1,6 \text{ m}$ de cette arête, grâce à une loupe de focale $f' = 10 \text{ cm}$. A travers cette loupe, on voit (sans accommoder) deux franges lumineuses consécutives à l'infini, écartées d'un angle $\beta = 1'$.

- 1) Quelle est l'interfrange i ?
- 2) En déduire la valeur numérique en $^\circ$ de α , l'angle entre les deux miroir.

1) Les franges sont placées dans le plan focal objet de la loupe, donc : $i = \beta \cdot f' = 29 \mu\text{m}$

2) L'interfrange est $i = \frac{\lambda \cdot D}{a}$ avec $a = 2 \cdot d \cdot \alpha$, donc

$$\alpha = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot d \cdot i} = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot d \cdot \beta \cdot f'} = 89 \text{ mrad} = 5^\circ$$

1.7) Interfranges avec des miroirs de Fresnel éclairé par une lampe au mercure

On s'intéresse à deux miroirs de Fresnel qui font entre eux un angle $\alpha = 4'0''$. Ils sont éclairés par une fente fine parallèle à l'arête des miroirs à une distance $d = 40 \text{ cm}$ de cette arête. On observe des franges sur un écran à une distance $D = 1,6 \text{ m}$ de cette arête.

1) Quelle est l'interfrange i des franges avec les différentes longueurs d'onde du mercure :

- 1.a) $\lambda_1 = 405 \text{ nm}$
- 1.b) $\lambda_2 = 436 \text{ nm}$
- 1.c) $\lambda_3 = 546 \text{ nm}$
- 1.d) $\lambda_4 = 579 \text{ nm}$

- 1) L'interfrange est $i = \frac{\lambda \cdot D}{a}$ avec $a = 2 \cdot d \cdot \alpha$
 - 1.a) $\lambda_1 = 405nm \Rightarrow i_1 = 0,84mm$
 - 1.b) $\lambda_2 = 436nm \Rightarrow i_2 = 0,91mm$
 - 1.c) $\lambda_3 = 546nm \Rightarrow i_3 = 1,1mm$
 - 1.d) $\lambda_4 = 579nm \Rightarrow i_4 = 1,2mm$

1.8) Miroir de Loyd

On s'intéresse à une source ponctuelle éclairée par une lampe monochromatique à vapeur de sodium ($\lambda = 589nm$) à une distance d d'un miroir.

1) On observe les interférences sur un écran placé à une distance $D = 1,0m \gg d$, orthogonalement au miroir entre le rayon issu directement de la source et celui réfléchi sur le miroir.

- 1.a) Où se trouvent les franges ?
- 1.b) Quelle est la forme de ces franges ?
- 1.c) Y a-t-il un déphasage supplémentaire φ_{sup} introduit par ce dispositif ?

2) Interfrange :

- 2.a) Quelle est l'interfrange i ?

On veut que l'interfrange soit, au moins $i > i_{min} = 1,0mm$.

- 2.b) Déterminer alors d_{max} , la valeur maximale de d .

1) Généralités :

- 1.a) Les franges se trouvent dans la zone de recouvrement des faisceaux.
- 1.b) Les franges sont rectilignes, parallèles au miroir.
- 1.c) $\varphi_{sup} = \pm\pi$ à cause d'une unique réflexion.

2) Interfrange :

- 2.a) Les deux sources secondaires sont symétriques par rapport au miroir, donc éloignées de $a = 2 \cdot d \Rightarrow i = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot d}$.
- 2.b) $d < d_{max} = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot i_{min}} = 0,29mm$, ce qui est très compliqué expérimentalement.

1.9) Miroirs de Fresnel

On s'intéresse à deux miroirs de Fresnel M_1 et M_2 faisant un angle θ entre eux. Ils sont éclairés par une source ponctuelle S derrière laquelle est placée une lampe monochromatique à vapeur de sodium ($\lambda = 589nm$). S se trouve à une distance $R = 15cm$ du point O , appartenant aux deux miroirs, OS faisant un angle α avec M_1 .

1) On observe les interférences sur un écran placé à une distance $D = 1,0m \gg R$, de O .

- 1.a) Quelle est la forme de ces franges ?
- 1.b) Y a-t-il un déphasage supplémentaire φ_{sup} introduit par ce dispositif ?

2) Rapport avec les trous d'Young :

- 2.a) A quelles distances de O se trouvent les sources secondaires S_1 et S_2 ?
- 2.b) Que vaut l'angle (\vec{OS}_1, \vec{OS}_2) ?
- 2.c) En déduire la distance $a = S_1S_2$.

3) Interfrange :

- 3.a) Quelle est l'interfrange i ?

On veut que l'interfrange soit, au moins $i > i_{min} = 1,0mm$.

- 3.b) Déterminer alors θ_{max} , la valeur maximale de θ en degrés, minutes et secondes d'arc.

1) Généralités :

- 1.a) Les franges sont rectilignes, parallèles au coin des miroirs.
- 1.b) $\varphi_{sup} = 0$ à cause de deux réflexions.

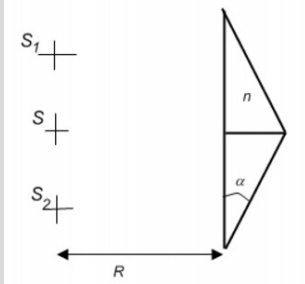
2) Rapport avec les trous d'Young :

- 2.a) $OS_1 = OS_2 = R$.
- 2.b) $(\vec{OS}_1, \vec{OS}_2) = 2 \cdot \theta$.
- 2.c) $a = S_1S_2 = 2 \cdot R \cdot \tan \theta$.

3) Interfrange :

- 3.a) $i = \frac{\lambda \cdot D}{a} = \frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot R \cdot \tan \theta}$.
- 3.b) $\theta < \theta_{max} = \arctan\left(\frac{\lambda \cdot D}{2 \cdot R \cdot i_{min}}\right) = 2,0 \cdot 10^{-3} rad = 6'45''$.

1.10) Biprisme de Fresnel et trous d'Young équivalents



On s'intéresse à un biprisme de Fresnel. Il s'agit de deux prismes (triangles rectangles) identiques, de petit angle α , accolés par leur base (leur petite largeur), d'indice optique n .

On note R la distance de la source S au biprisme.

1) Déterminer S_1S_2 , la distance entre deux trous d'Young équivalents.

$$S_1S_2 = 2.R.(n - 1) \alpha.$$

2. Optique de Fourier

2.11) Largeur d'un faisceau laser

Un laser hélium-néon émet une onde quasiment plane et monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633nm$. A la sortie du laser, le faisceau est limité par un trou du diamètre du faisceau de sortie : $D_1 = 3,0mm$.

1) Déterminer l'ordre de grandeur du diamètre D du faisceau à une distance :

1.a) $L = 15m$;

1.b) $L = 150m$.

1) L'image, à l'infini, d'un trou de rayon R , éclairé par une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ), a une ouverture angulaire : $\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{R}$. Ainsi, si on assimile la tangente de cet angle à l'angle lui-même

$$D = 2 L \Delta\theta = \frac{\lambda.L}{D_0}$$

1.a) $L_2 = 15m \Rightarrow D \approx 7 \text{ mm}$.

1.b) $L_3 = 150m \Rightarrow D \approx 70 \text{ mm}$.

2.12) Les phares de voiture la nuit

Les deux phares avant (supposés ponctuels) d'une voiture observée à une distance D (très grande) sont distants de $l = 1,4m$.

1) Quel est l'angle α sous lequel on voit ces deux phares ?

Le diamètre de la pupille de l'œil est $d = 5mm$.

2) Quelle est l'ouverture angulaire $\delta\theta$ de la tache de diffraction donnée par un phare ? On prendra une longueur d'onde moyenne de la lumière : $\lambda = 600nm$.

Le critère de Rayleigh stipule que deux images sont séparées si la distance entre les deux images est supérieure au diamètre de la tache de chacune des images.

3) Déterminer la distance D_{max} à partir de laquelle l'œil peut séparer l'image des deux phares. Application numérique.

1) $\alpha = \frac{l}{D}$.

2) $\delta\theta \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{2\lambda}{d} = 0,3mrad$.

3) On veut $\alpha > \delta\theta$, c'est à dire

$$D < D_{max} = \frac{l.d}{\lambda} \approx 10 \text{ km}$$

2.13) Brouillard

On observe une source ponctuelle blanche ($\lambda \approx 0,6\mu m$) à l'infini à travers un brouillard est constitué de gouttelettes opaques de rayon r . On visualise un halo irisé, de premier anneau sombre obtenu pour l'angle $\theta = 2^\circ$.

1) En déduire r . Application numérique.

1) L'ouverture angulaire de la tache est : $2.\theta \approx \frac{\lambda}{r}$, soit

$$r \approx \frac{\lambda}{2.\theta} = 10 \mu\text{m}$$

2.14) Diffraction par une grille

On considère une mire qui présente une grille de pas a suivant x éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde λ .

1) Quelle est l'allure de la mire éclairée?

Cette mire est placée devant une lentille convergente L de focale f' .

2) A quelle(s) position(s) observe-t-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille L ?

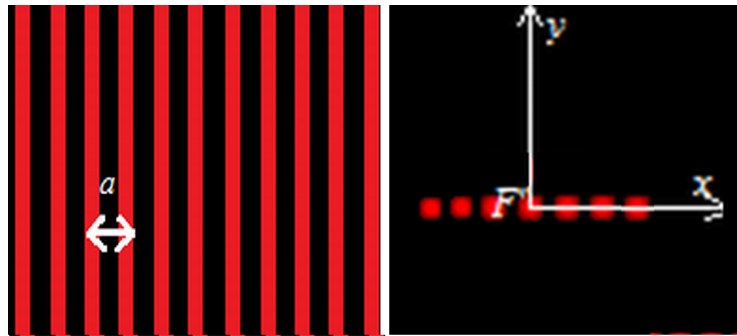
1) La mire éclairée est un quadrillage formés de traits suivant y .

2) Les fréquences spatiales (et leurs harmoniques sont) :

- $\frac{n}{a}, 0$ suivant x

avec n entier. On observe de la lumière pour les positions suivantes :

- $\frac{n f' \lambda}{a}, 0$.



image

image de diffraction

2.15) Filtrage d'une grille sinusoïdale dans les deux dimensions

On considère une mire de coefficient de transmission (en amplitude)

$$t(x, y) = \frac{(\cos^2 \frac{\pi x}{a}) + (\cos^2 \frac{\pi y}{a})}{2}$$

avec $a = 10 \mu\text{m}$ éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

1) Quelle est l'allure de la mire éclairée?

Cette mire est placée à une distance $2 f'$ avant une lentille convergente L de focale $f' = 1,0 \text{ m}$.

2) A quelle(s) position(s) observe-t-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille L ?

3) Comment faire, en plaçant dans le plan focal image de la lentille L un filtre de sorte que l'éclairage dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L présente des traits régulièrement espacés parallèles à y ? On donnera les caractéristiques (numériques) du filtre.

1) Comme

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^{j \frac{\pi x}{a}} + e^{-j \frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{j \frac{\pi y}{a}} + e^{-j \frac{\pi y}{a}}}{2} \right)^2 \right]$$

Donc

$$t(x, y) = \frac{1}{8} \left[\left(e^{j \frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j \frac{2\pi x}{a}} \right) + \left(e^{j \frac{2\pi y}{a}} + 2 + e^{-j \frac{2\pi y}{a}} \right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 + e^{j \frac{2\pi x}{a}} + e^{-j \frac{2\pi x}{a}} + e^{j \frac{2\pi y}{a}} + e^{-j \frac{2\pi y}{a}} \right]$$

Ainsi,

$$t(x, y) = \frac{1}{8} \left[4 + 2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi y}{a} \right) \right]$$

la mire éclairée est un quadrillage de pas a dans les deux directions.

2) Revenons à l'expression :

$$t(x, y) = \frac{1}{8} \left[4 + e^{j\frac{2\pi x}{a}} + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} + e^{j\frac{2\pi y}{a}} + e^{-j\frac{2\pi y}{a}} \right]$$

On observe de la lumière pour les positions suivantes ($f' \lambda \sigma = \frac{f' \lambda}{a} = 6,33 \text{ cm}$) :

- 0, 0 avec une intensité $16 I_0$;
- $\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 ;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 ;
- 0, $\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- 0, $-\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 .

3) Pour que l'éclairage dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L présente des traits régulièrement espacés parallèles à y , il suffit de sélectionner dans l'image de diffraction :

- 0, 0 avec une intensité $16 I_0$;
- $\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 ;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 .

aussi, tout se passe comme si l'onde avait une amplitude :

$$a(x, y) = \frac{1}{8} \left[2 + e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right)$$

Dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L , on observera une grille (sinusoïdale), orientée parallèlement à y .

Pour cela, il faut placer dans le plan focal de L une fente suivant $F'x$, de largeur inférieure à $f' \lambda \sigma = \frac{f' \lambda}{a} = 6,33 \text{ cm}$.

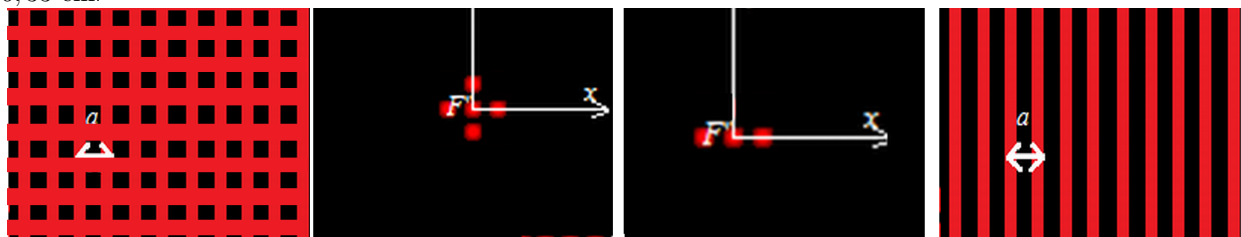


image avant filtrage

image de diffraction

image de diffraction filtrée

image filtrée

2.16) Filtrage d'une mire de transmission sinusoïdale dans les deux dimensions

On considère une mire de coefficient de transmission (en amplitude)

$$t(x, y) = \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} \right)$$

avec $a = 10 \mu\text{m}$ éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Cette mire est placée à une distance $2 f'$ avant une lentille convergente L de focale $f' = 1,0 \text{ m}$.

1) A quelle(s) position(s) observe-t-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille L ?

On place maintenant dans le plan focal image de la lentille L une fente à 45° par rapport à $OF'x$ de largeur $1,0 \text{ cm}$.

2) Donner les caractéristiques (en particulier la période spatiale) de la figure observée dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L .

1) Comme

$$t(x, y) = \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} \right) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{j\frac{\pi y}{a}} + e^{-j\frac{\pi y}{a}}}{2} \right)^2$$

$$t(x, y) = \frac{1}{16} \left[\left(e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right) \left(e^{j\frac{2\pi y}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi y}{a}} \right) \right]$$

$$t(x, y) = \frac{1}{16} \left[2e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 4 + 2e^{-j\frac{2\pi x}{a}} + e^{j\frac{2\pi(y+x)}{a}} + 2e^{j\frac{2\pi y}{a}} + e^{j\frac{2\pi(y-x)}{a}} + e^{j\frac{2\pi(-y+x)}{a}} + 2e^{-j\frac{2\pi y}{a}} + e^{-j\frac{2\pi(y+x)}{a}} \right]$$

On observe de la lumière pour les positions suivantes ($f' \lambda \sigma = \frac{f' \lambda}{a} = 6,33 \text{ cm}$) :

- 0, 0 avec une intensité $16 I_0$;
- $\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$;
- 0, $\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité $4 I_0$;
- 0, $-\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité $4 I_0$;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, -\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, +\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $+\frac{f' \lambda}{a}, -\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $+\frac{f' \lambda}{a}, +\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;

2) Le filtre sélectionne :

- 0, 0 avec une intensité $16 I_0$;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, -\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $+\frac{f' \lambda}{a}, +\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;

aussi, tout se passe comme si l'onde avait une amplitude :

$$a(x, y) = \frac{1}{16} \left[4 + e^{j\frac{2\pi(y+x)}{a}} + e^{-j\frac{2\pi(y+x)}{a}} \right] = \frac{1}{8} \left[2 + \cos \frac{2\pi(y+x)}{a} \right]$$

Dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L , on observera une grille (sinusoïdale), orientée à -45° par rapport à x . Posons x' à 45° par rapport à x . Ainsi, $x' = \sqrt{2}(x + y)$. D'où

$$a(x') = a_0 \left[2 + \cos \frac{2\pi\sqrt{2}x'}{a} \right]$$

La période spatiale est donc $\frac{a}{\sqrt{2}} = 7,1 \mu\text{m}$.

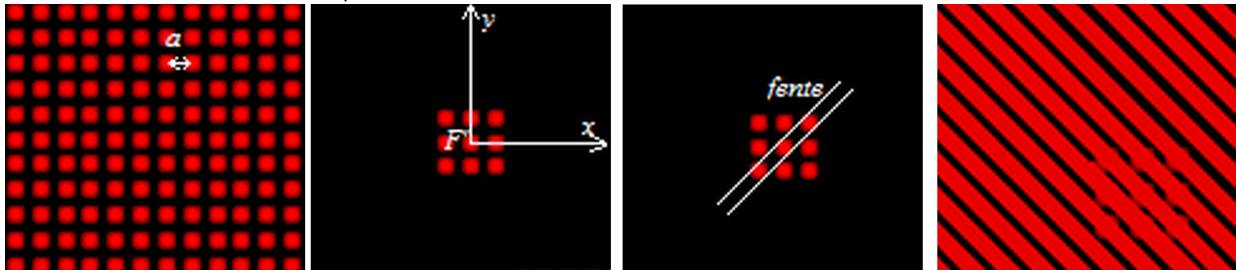


image avant filtrage

image de diffraction

image de diffraction filtrée

image filtrée

2.17) Filtrage uniforme d'une mire de transmission sinusoïdale

On considère une mire de coefficient de transmission (en amplitude)

$$t(x, y) = \cos^2 \frac{\pi x}{a}$$

avec $a = 5,0 \mu\text{m}$ éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Cette mire est placée à une distance $2 f'$ avant une lentille convergente L de focale $f' = 25 \text{ cm}$.

1) A quelle(s) position(s) observe-t-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille L ?

2) Comment faire, en plaçant dans le plan focal image de la lentille L un filtre de sorte que l'éclairage dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L soit uniforme? On donnera les caractéristiques (numériques) du filtre.

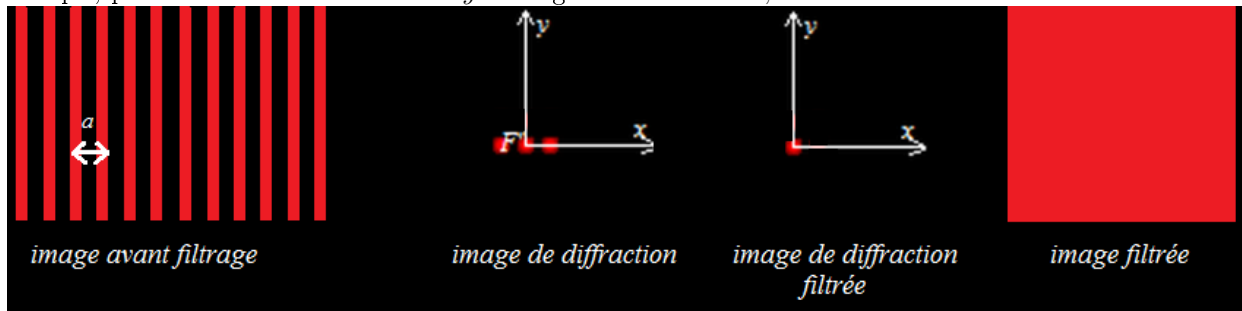
1) Comme

$$t(x, y) = \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right]$$

On observe de la lumière pour les positions suivantes ($f' \lambda \sigma = \frac{f' \lambda}{a} = 31,65 \text{ mm}$) :

- 0, 0 avec une intensité $4 I_0$;
- $\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 ;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité I_0 .

2) On veut un éclairage uniforme, donc que le filtre sélectionne uniquement 0,0. Aussi, il faut, par exemple, positionner une fente d'axe $F'y$ de largeur inférieure à 3,1 cm.



2.18) Transformation de l'image d'une mire de transmission sinusoïdale dans les deux dimensions

On considère une mire de coefficient de transmission (en amplitude)

$$t(x, y) = \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} \right)$$

avec $a = 10 \mu\text{m}$ éclairée sous incidence normale par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Cette mire est placée à une distance $2 f'$ avant une lentille convergente L de focale $f' = 1,0 \text{ m}$.

1) A quelle(s) position(s) observe-t-on de la lumière dans le plan focal image de la lentille L ?

2) Comment faire, en plaçant dans le plan focal image de la lentille L un filtre de sorte que l'éclairage dans le plan placé à une distance $2 f'$ après la lentille convergente L présente des traits régulièrement espacés parallèles à y ? On donnera les caractéristiques (numériques) du filtre.

1) Comme

$$t(x, y) = \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi y}{a} \right) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{j\frac{\pi y}{a}} + e^{-j\frac{\pi y}{a}}}{2} \right)^2$$

$$t(x, y) = \frac{1}{16} \left[\left(e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right) \left(e^{j\frac{2\pi y}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi y}{a}} \right) \right]$$

$$t(x, y) = \frac{1}{16} \left[2e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 4 + 2e^{-j\frac{2\pi x}{a}} + e^{j\frac{2\pi(y+x)}{a}} + 2e^{j\frac{2\pi y}{a}} + e^{j\frac{2\pi(y-x)}{a}} + e^{j\frac{2\pi(-y+x)}{a}} + 2e^{-j\frac{2\pi y}{a}} + e^{-j\frac{2\pi(y+x)}{a}} \right]$$

On observe de la lumière pour les positions suivantes ($f' \lambda \sigma = \frac{f' \lambda}{a} = 6,33 \text{ cm}$) :

- 0, 0 avec une intensité $16 I_0$;
- $\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$;
- 0, $\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité $4 I_0$;
- 0, $-\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité $4 I_0$;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, -\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $-\frac{f' \lambda}{a}, +\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $+\frac{f' \lambda}{a}, -\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;
- $+\frac{f' \lambda}{a}, +\frac{f' \lambda}{a}$ avec une intensité I_0 ;

2) Pour que l'éclairage dans le plan placé à une distance $2f'$ après la lentille convergente L présente des traits régulièrement espacés parallèles à y , il suffit de sélectionner dans l'image de diffraction :

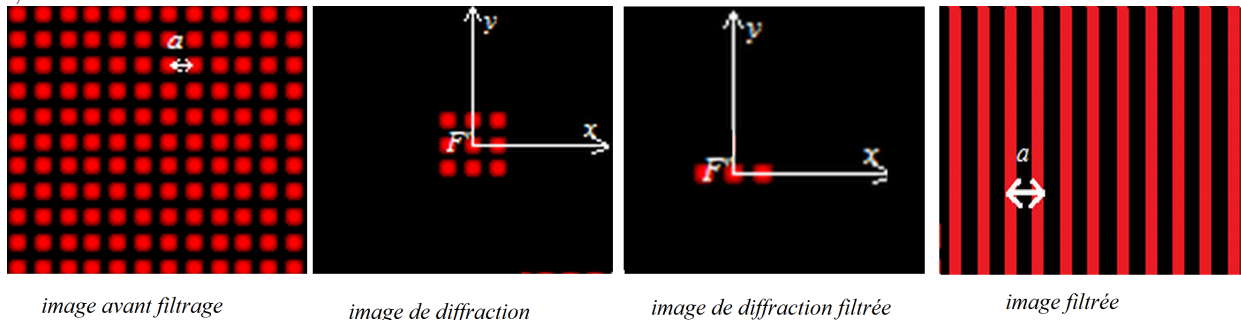
- $0,0$ avec une intensité $16 I_0$;
- $\frac{f'\lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$;
- $-\frac{f'\lambda}{a}, 0$ avec une intensité $4 I_0$.

aussi, tout se passe comme si l'onde avait une amplitude :

$$a(x, y) = \frac{1}{8} \left[e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \right)$$

Dans le plan placé à une distance $2f'$ après la lentille convergente L , on observera une grille (sinusoïdale), orientée parallèlement à y .

Pour cela, il faut placer dans le plan focal de L une fente suivant $F'x$, de largeur inférieure à $f'\lambda\sigma = \frac{f'\lambda}{a} = 6,33$ cm.



3. Réseaux

3.19) Positions des ordres d'un réseau

Soit un réseau à 8 000 LPI (traits par pouce, où $1in = 2,5cm$).

1) Situer les positions angulaires θ_p (en $^\circ$) des maxima principaux pour un faisceau en incidence normale et de longueur d'onde $\lambda = 546nm$.

1) $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p.n.\lambda$, avec $\theta_i = 0$ et $n = 320$ traits/mm. Soit : $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 9,9^\circ$, $\theta_2 = 20,1$, $\theta_3 = 31,1^\circ$, $\theta_4 = 43,5^\circ$, $\theta_5 = 59,3^\circ$.

3.20) Détermination d'une raie inconnue par un réseau

On éclaire un réseau de $n = 547$ traits /mm en incidence quasi-normale par une raie de longueur d'onde λ inconnue et on observe les déviations suivantes : $\theta_{-2} = -32^\circ 34'$, $\theta_{+2} = 32^\circ 31'$.

1) Déterminer λ .

1) $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = n.p.\lambda$. Soit $\sin \theta_{+2} - \sin \theta_{-2} = 4.n.\lambda$

$$\lambda = \frac{\sin \theta_{+2} - \sin \theta_{-2}}{4.n} = 492nm$$

3.21) Réseau éclairé par une lampe à vapeur de mercure

On éclaire un réseau de pas a par la raie verte du mercure ($\lambda = 546,1nm$), et on observe les déviations suivantes : $\theta_{-3} = -63^\circ 40'$, $\theta_{-2} = -36^\circ 41'$, $\theta_{-1} = -17^\circ 24'$, $\theta_{+1} = 17^\circ 22'$, $\theta_{+2} = 36^\circ 22'$, $\theta_{+3} = 63^\circ 37'$.

1) Déterminer :

- a , le pas du réseau ;
- n , le nombre de traits par mm du réseau.

- 1) $\sin \theta_p - \sin \theta_0 = \frac{p \cdot \lambda}{a}$. Une modélisation donne :
- 1.a) $a = 1,828 \mu m$;
 - 1.b) $n = 547$ traits /mm.

3.22) Réseau éclairé par une lumière blanche

On éclaire un réseau de $n = 500$ traits /mm en incidence quasi-normale par une lumière blanche (dont les longueurs d'ondes sont dans le domaine $\lambda \in [400nm; 750nm]$).

- 1) Pour chaque ordre k , déterminer en degré les déviations minimale θ_{min_k} et maximale θ_{max_k} .
- 2) En déduire :
 - 2.a) le nombre de spectres complets observables ;
 - 2.b) les ordres des spectres sans recouvrement.

- 1) Ordre 1 : $\theta_{min_1} = 11,55^\circ$ et $\theta_{max_1} = 22,02^\circ$;
 ordre 2 : $\theta_{min_2} = 23,62^\circ$ et $\theta_{max_2} = 48,59^\circ$;
 ordre 3 : $\theta_{min_3} = 36,96^\circ$ et θ_{max_3} : pas de solution.
- 2) On en déduit :
 - 2.a) nombre de spectres complets observables : 4 (ordres -2,-1,+1,+2) ;
 - 2.b) ordres des spectres sans recouvrement : -1 et +1.

3.23) Réalisation d'un monochromateur

Un réseau 15 000 LPI (traits par pouce, où $1in = 2,5cm$) est éclairé en incidence normale par une lumière blanche. Un spectre se forme sur un écran parallèle au réseau, situé à $d = 50cm$ du réseau.

1) Si on perce un trou de $\Delta x = 5mm$ de côté dans l'écran et dont le centre est placé à $x = 20cm$ de l'image géométrique parallèlement aux traits du réseau, quel sera le domaine de longueurs d'onde sélectionné par le trou ?

- 1) $\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \cdot n \cdot \lambda$, avec $\theta_i = 0$ et $n = 600$ traits/mm. Soit : $\lambda = \frac{\sin \theta}{p \cdot n}$ avec $\tan \theta = \frac{x}{d}$. On est dans l'ordre $p = 1$. On trouve :

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \frac{1}{n} \sin \left(\arctan \left(\frac{x - \frac{\Delta x}{2}}{d} \right) \right) = 622nm \\ \lambda_{max} = \frac{1}{n} \sin \left(\arctan \left(\frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{d} \right) \right) = 635nm \end{cases}$$

(C'est du rouge).

3.24) Séparation d'un doublet par un réseau

Un réseau comporte $n = 130$ traits/mm et est éclairé par un faisceau en incidence normale d'extension spatiale $L = 5mm$ dans la direction perpendiculaire aux traits. On se placera aux petits angles.

- 1) Rappeler :
 - 1.a) l'angle θ sous lequel est envoyée la lumière à l'ordre p pour la longueur d'onde λ ;
 - 1.b) la largeur angulaire $\Delta \theta$ de ce faisceau.
- 2) On s'intéresse au doublet du sodium : $\lambda = 590nm$, et $\Delta \lambda = 0,6nm$. Le critère de Rayleigh stipule que deux images sont séparées si la distance entre les deux images est supérieure au diamètre de la tache de chacune des images.
 - 2.a) Quel est le plus petit intervalle de longueur d'onde séparable $\Delta \lambda_{min}$ dans l'ordre p autour de $\lambda = 590nm$?
 - 2.b) Application numérique dans l'ordre 1. Sépare-t-on le doublet du sodium ?
 - 2.c) Application numérique dans l'ordre 2. Sépare-t-on le doublet du sodium ?

- 1)
 - 1.a) $\sin \theta = p \cdot n \cdot \lambda$ soit

$$\theta = p \cdot n \cdot \lambda$$
 - 1.b) $\Delta \theta = \frac{n \cdot \lambda}{N}$ où $N = n \cdot L$ est le nombre de traits éclairés, soit :

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{L}$$

2) Critère de Rayleigh :

2.a) $p.n.(\lambda_1 - \lambda_2) > \frac{\lambda}{L}$. Soit

$$\Delta\lambda > \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p.n.L}$$

1.

2.b) $p = 1 : \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p.n.L} = 0,9nm > \Delta\lambda$. On ne sépare pas le doublet du sodium dans l'ordre

2.c) $p = 2 : \Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda}{p.n.L} = 0,45nm < \Delta\lambda$. On sépare le doublet du sodium dans l'ordre 2.

3.25) Minimum de déviation pour un réseau

Si on éclaire un réseau de période spatiale a avec une onde plane monochromatique (de longueur d'onde λ) qui fait un angle θ_i avec la normale au plan du réseau, l'intensité diffractée est non nulle seulement dans quelques directions repérées par les angles θ_p par rapport à la normale au plan du réseau.

1) Que vérifie θ_p (formule des réseaux) ?

On définit l'angle de déviation pour l'ordre p par $D = \theta_p - \theta_i$.

2) Si la déviation est minimale ($D = D_{min}$), qu'est-ce que cela impose sur θ_i et θ_p ?

3) Exprimer $\sin\left(\frac{D_{min}}{2}\right)$, en fonction de p , a et λ .

1) $\sin\theta_p - \sin\theta_i = p\frac{\lambda}{a}$ (p est entier).

2) $D = D_{min} \Leftrightarrow \theta_p = -\theta_i$.

3) $\sin\left(\frac{D_{min}}{2}\right) = \frac{p.\lambda}{2.a}$.

3.26) Recouvrement des ordres

On éclaire un réseau par transmission qui possède $n = 130\text{traits/mm}$ de façon normale, avec de la lumière blanche ($\lambda \in [\lambda_{min} = 400nm; \lambda_{max} = 750nm]$).

On observe sur un écran placé parallèlement au réseau, dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale $d = 2,5m$, et repéré par un axe (Ox) , l'axe (Oy) étant confondu avec l'ordre nul.

1) Calculer la position des bords des spectres :

1.a) $x_1(\lambda_{min})$ et $x_1(\lambda_{max})$ pour l'ordre 1 ;

1.b) $x_2(\lambda_{min})$ et $x_2(\lambda_{max})$ pour l'ordre 2 ;

1.c) $x_3(\lambda_{min})$ et $x_3(\lambda_{max})$ pour l'ordre 3.

2) Quels sont les ordres qui se recouvrent ?

1) Si les angles sont petits : $x \approx d.n.p.\lambda$

1.a) $x_1(\lambda_{min}) = 13cm$ et $x_1(\lambda_{max}) = 24cm$ pour l'ordre 1 ;

1.b) $x_2(\lambda_{min}) = 26cm$ et $x_2(\lambda_{max}) = 49cm$ pour l'ordre 2 ;

1.c) $x_3(\lambda_{min}) = 39cm$ et $x_3(\lambda_{max}) = 73cm$ pour l'ordre 3.

2) Tous les ordres sauf l'ordre ± 1 se recouvrent.

3.27) Doublet du sodium résolu grâce à un réseau

On éclaire un réseau par transmission qui possède $n = 130,0\text{traits/mm}$ de façon normale, avec une lampe au sodium (de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0nm$ et $\lambda_2 = 589,6nm$).

On observe sur un écran placé parallèlement au réseau, dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale $d = 2,500m$, et repéré par un axe (Ox) , l'axe (Oy) étant confondu avec l'ordre nul.

1) Calculer la position des raies dans l'ordre 1 pour :

1.a) λ_1 (x_1)

1.b) et λ_2 (x_2).

La largeur de la fente d'éclairage est l , le grandissement du montage optique est $\gamma = \frac{1}{10}$ (on négligera l'élargissement de l'image de la fente d'éclairage par diffraction).

2) Exprimer une condition sur l pour que le doublet du sodium soit résolu.

1) Si les angles sont petits : $x \approx d.n.p.\lambda$

1.a) $\lambda_1 \Rightarrow x_1 = 191,4mm$

1.b) et $\lambda_2 \Rightarrow x_2 = 191,6mm$.

2) $l < \frac{n.d.(\lambda_2 - \lambda_1)}{\gamma} = 1,9mm$.

4. Techniques mathématiques - Analyse de Fourier

4.28) Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction cosinus au carré

1) Donner la décomposition de Fourier en exponentielles complexes de la fonction $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

1)

$$f(x) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{j\frac{2\pi x}{a}} + 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}}\right)$$

4.29) Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction sinus au carré

1) Donner la décomposition de Fourier en exponentielles complexes de la fonction $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

1)

$$f(x) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} - e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2j}\right)^2 = \frac{-1}{4} \left(e^{j\frac{2\pi x}{a}} - 2 + e^{-j\frac{2\pi x}{a}}\right)$$

4.30) Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction cosinus au cube

1) Donner la décomposition de Fourier en exponentielles complexes de la fonction $f(x) = \cos^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

1)

$$f(x) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \left(e^{j\frac{3\pi x}{a}} + 3e^{j\frac{\pi x}{a}} + 3e^{-j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{3\pi x}{a}}\right)$$

4.31) Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction sinus au cube

1) Donner la décomposition de Fourier en exponentielles complexes de la fonction $f(x) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

1)

$$f(x) = \left(\frac{e^{j\frac{\pi x}{a}} - e^{-j\frac{\pi x}{a}}}{2j}\right)^3 = \frac{j}{8} \left(e^{j\frac{3\pi x}{a}} - 2e^{j\frac{\pi x}{a}} + e^{-j\frac{\pi x}{a}} - e^{j\frac{\pi x}{a}} + 2e^{-j\frac{\pi x}{a}} - e^{-j\frac{3\pi x}{a}}\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{8} \left(e^{j\frac{3\pi x}{a}} - 3e^{j\frac{\pi x}{a}} + 3e^{-j\frac{\pi x}{a}} - e^{-j\frac{3\pi x}{a}}\right)$$

4.32) Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction cosinus au carré

1) Donner la décomposition de Fourier en sinus et cosinus de la fonction $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

1) Comme $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$,

$$f(x) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

Travaux dirigés

vendredi 12 janvier 2018

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

La trame dans le tableau de Lichtenstein

Article "États de couleur : du pixel graphique au pixel numérique" de Sandrine Maurial.
disponible sur le site "archée, revue d'art en ligne : arts médiatiques et cyberculture" disponible à l'adresse "<http://archee.qc.ca>"

Les pixellisations picturales de Roy Lichtenstein

Dès 1960, le peintre du Pop art Roy Lichtenstein, met primitivement, en ordre la couleur au sein de ses toiles. Il réduit la couleur à la seule triade des couleurs primaires : bleu, jaune et rouge. Il peint un monde dans sa forme archétypale, reflétant les couleurs de la trame typographique agrandie. Des images peintes en aplats, très colorées, marquées de points et de lignes parallèles, constituent la trame, la marque personnelle de ses toiles. Les points réalisés au pochoir imitent l'aspect tramé des images imprimées.



Énoncé

1) Proposer un montage possible de filtrage optique du tableau de Roy Lichtenstein dans laquelle la trame aura disparu. On donnera les valeurs numériques :

- des distances réelles sur le schéma du montage ;
- des focales des lentilles utilisées ;
- et des caractéristiques du filtre employé.

Correction

S'approprier :

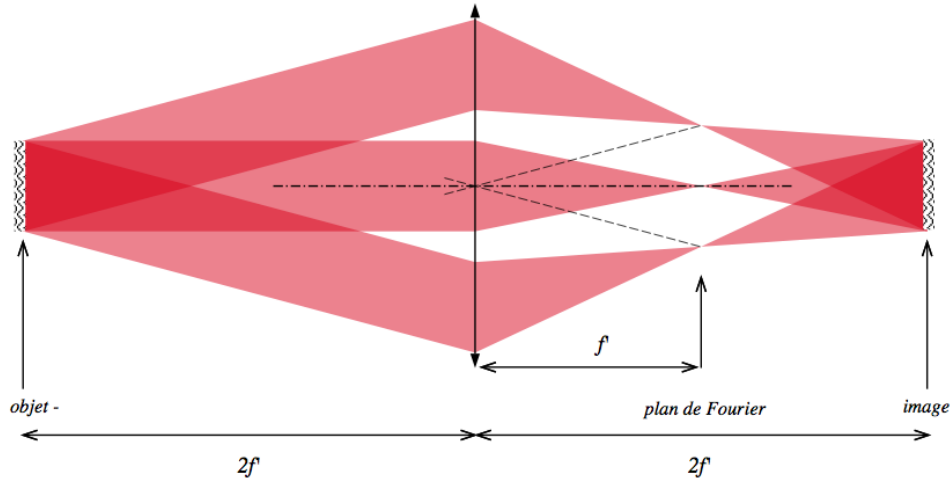
- réseau hexagonal de points éloignés de $\ell = 0,13$ mm.

Analyser :

- Il s'agit d'éliminer la trame donc les détails : un filtre passe bas s'impose.
- La fréquence spatiale caractéristique est $\sigma = \frac{1}{\ell} = 7,5 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$.

Réaliser :

- On peut choisir un montage $4f'$:



- Une valeur possible de f' est 25 cm ($4f' = 1$ m : possible).
- L'éclairage peut se faire avec un laser hélium-néon de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm.
- Il faut comme filtre un trou (diaphragme) centré sur F' , de diamètre légèrement inférieur à

$$d = \lambda f' \sigma = 633 \times 10^{-9} \times 25 \times 10^{-2} \times 7,5 \times 10^3 \text{ m}^{-1} = 1,2 \text{ mm}$$

Devoir non surveillé

vendredi 12 janvier 2018

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Les couleurs interférentielles

Etienne Guyon

Matière et matériaux - Belin.

La nature offre de nombreux exemples de couleurs dont l'origine est due aux interférences et à la diffraction, comme celles des bulles de savon, des opales, des plumes de paon, de la nacre et de certains papillons.

Structures monodimensionnelles.

La structure en multicouches offrant une périodicité spatiale à une dimension est responsable des couleurs irisées de la nacre. Pour comprendre les phénomènes d'interférences à l'origine de ces couleurs, examinons d'abord le cas d'une couche mince dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde lumineuse. C'est typiquement le cas d'une fine couche d'huile à la surface de l'eau, ou d'une bulle de savon dont la paroi est constituée d'un film d'eau emprisonné entre deux couches de tensioactifs.

Comme le montre le schéma (Fig. 2a), une onde de lumière blanche arrivant sur la surface d'une lame à faces parallèles y pénètre en subissant une réfraction, alors qu'une petite fraction est réfléchie. L'onde qui a pénétré subit le même phénomène sur la face arrière de la couche : si elle est essentiellement transmise, une partie est réfléchie. L'onde réfléchie subit à son tour une réfraction et une réflexion au niveau de la face avant. La partie transmise par cette face avant et la première onde réfléchie sont d'intensité similaire, et puisqu'elles sont issues d'une même onde, elles

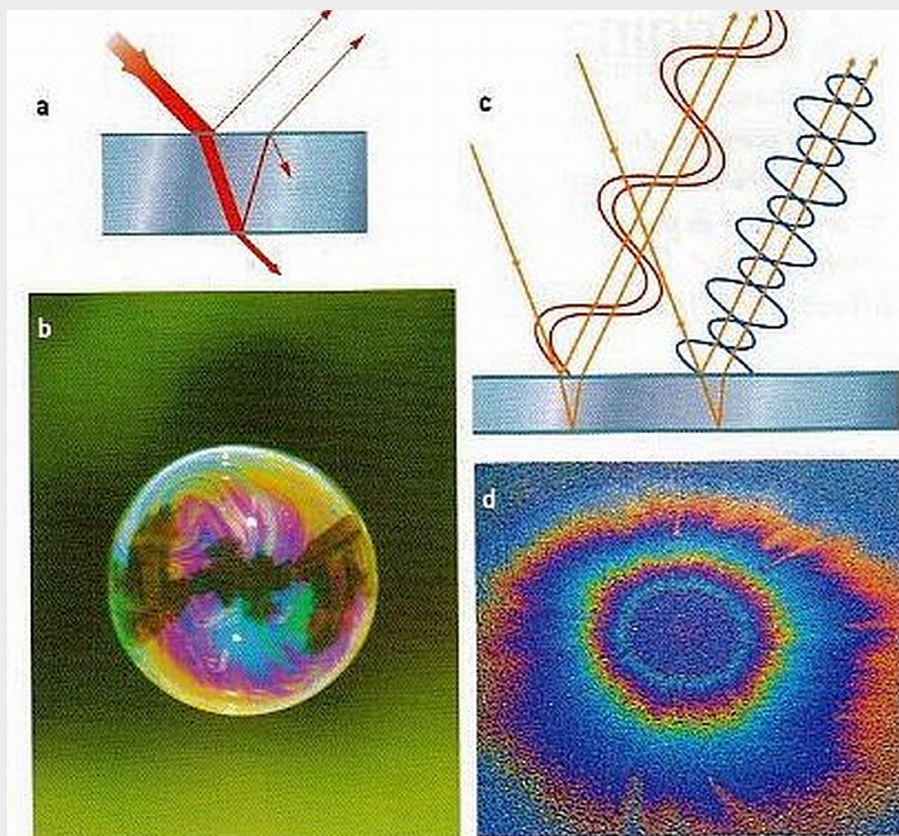


Fig. 2 Interférences observées avec une lame mince éclairée par la lumière blanche du Soleil. (a) L'épaisseur des traits rouges est proportionnelle à l'intensité. Il n'est pas nécessaire de considérer d'autres réflexions et réfractions, car les ondes associées présentent une intensité négligeable. (b) Dans une direction donnée, les interférences sont constructives pour la longueur d'onde correspondant au rouge, et destructives pour la longueur d'onde correspondant au bleu. En modifiant l'angle d'incidence ou en changeant l'épaisseur de la lame, on pourra au contraire observer du bleu mais pas du rouge. (c) et (d) Couleurs interférentielles de bulles de savon et d'un film d'essence sur l'asphalte.

peuvent se renforcer si elles passent simultanément par un maximum (interférences constructives), ou au contraire s'annihilent lorsque l'une passe par un maximum à l'instant où l'autre passe par un minimum (interférences destructives). Or le renforcement ou l'annihilation dans une direction donnée dépend de la longueur d'onde (Fig. 2c). Ainsi, la couleur observée est fonction de l'angle d'incidence et de l'épaisseur de la couche.

Lorsqu'un film de savon s'amincit par drainage de l'eau sous l'effet de la pesanteur, Newton avait observé qu'il devient noir, c'est-à-dire qu'il ne réfléchit aucune lumière. Quelle en est la raison ? L'épaisseur étant devenue très petite par rapport à la longueur d'onde de la lumière, l'onde lumineuse réfléchie par la face avant et celle réfléchie par la face interne s'annihilent par interférences destructives. La théorie des ondes électromagnétiques (dont fait partie la lumière) prévoit en effet qu'elles sont en opposition de phase (le maximum d'amplitude de l'une correspond au minimum d'amplitude de l'autre), car la première se réfléchit sur une interface air-eau et la seconde sur une interface eau-air. Dans le cas d'une seule couche dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de la lumière, la fraction de lumière réfléchie donnant lieu aux interférences est faible (inférieure à 10%). Le facteur de réflexion est considérablement augmenté lorsque plusieurs couches sont empilées (structure périodique à une dimension) (Fig. 3). C'est ainsi que l'on explique les couleurs irisées non seulement de la nacre, mais aussi des scarabées, ou des ailes de certains papillons.

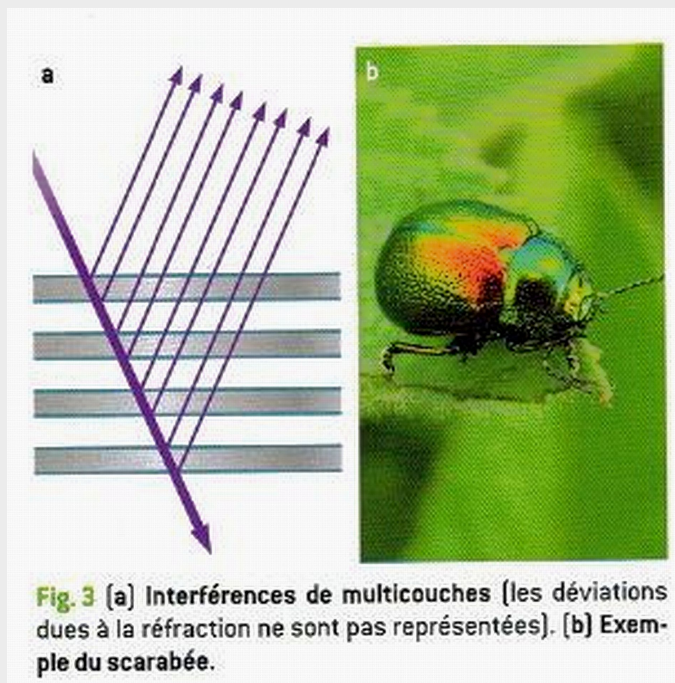


Fig. 3 (a) Interférences de multicouches [les déviations dues à la réfraction ne sont pas représentées]. (b) Exemple du scarabée.

Structures bidimensionnelles.

Observez les couleurs irisées d'un disque compact : vous remarquerez que ces couleurs dépendent de l'orientation du disque par rapport à la source de lumière et de l'angle d'observation. Les phénomènes de diffraction et d'interférences, qui en sont responsables, résultent de la gravure en spirale d'une surface réfléchissante (en polycarbonate), l'espacement entre les pistes de la spirale étant de l'ordre du micromètre. Creusons l'idée et examinons ce qui se produit lorsque la lumière arrive sur un réseau plan constitué de surfaces réfléchissantes ayant une périodicité spatiale (réseaux par réflexion). Chacune de ces surfaces se comporte comme une source secondaire, et les ondes qui en sont issues interfèrent. Des radiations de différentes longueurs d'onde interfèrent de façon constructive dans des directions distinctes. C'est pourquoi un réseau éclairé en lumière blanche diffracte la lumière et conduit à plusieurs spectres de la lumière blanche (Fig. 4). On parle alors des ordres 1, 2, etc. du réseau. Les réseaux décrits ci-dessus sont appelés réseaux par réflexion. Si les traits ne sont plus des surfaces réfléchissantes mais des lentes fines, parallèles, identiques et équidistantes, il s'agit de réseaux par transmission. Les ondes résultant de la diffraction de la lumière par ces fentes interfèrent et conduisent, là encore, à plusieurs spectres de la lumière blanche. Les couleurs irisées des plumes de paon et des ailes de certains papillons résultent de même de la diffraction et des interférences par des structures périodiques à deux dimensions (Fig. 6).

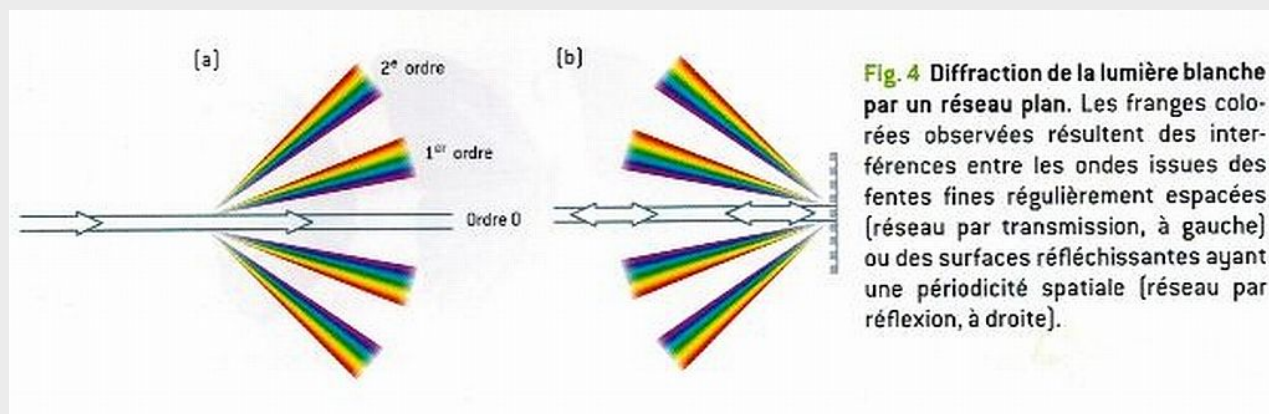


Fig. 4 Diffraction de la lumière blanche par un réseau plan. Les franges colorées observées résultent des interférences entre les ondes issues des fentes fines régulièrement espacées [réseau par transmission, à gauche] ou des surfaces réfléchissantes ayant une périodicité spatiale [réseau par réflexion, à droite].

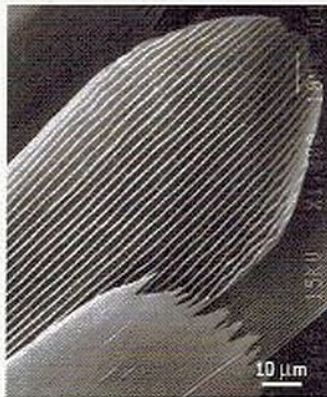


Fig. 6 L'iridescence des ailes de *Morpho menelaus* est due aux écailles du papillon, qui présentent des stries formant une structure périodique à deux dimensions. Vue à gauche en microscopie électronique à balayage, la couleur varie selon l'angle d'incidence de la lumière.

Structures tridimensionnelles.

Les cristaux habituels (comme le chlorure de sodium ou le sulfate de cuivre, par exemple) sont constitués d'un arrangement périodique d'ions (ou d'atomes ou de molécules) à 3 dimensions. Quand la périodicité se situe non plus à l'échelle atomique ou moléculaire, mais à l'échelle de la longueur d'onde de la lumière, on parle de cristaux photoniques. La diffraction de la lumière par ce type de structure, et les interférences entre les rayons qui sont réfléchis conduisent à des couleurs d'iridescence. C'est typiquement les cas des opales qui sont constituées de sphères de taille inférieure à 300 nanomètres, immergées dans une matrice empilées avec soin sur un étal). Lorsqu'il s'agit de microsphères creuses au sein d'une matrice solide, on parle d'opales inverses. C'est le cas de certaines opales naturelles et des écailles de divers coléoptères (Flg. 7).

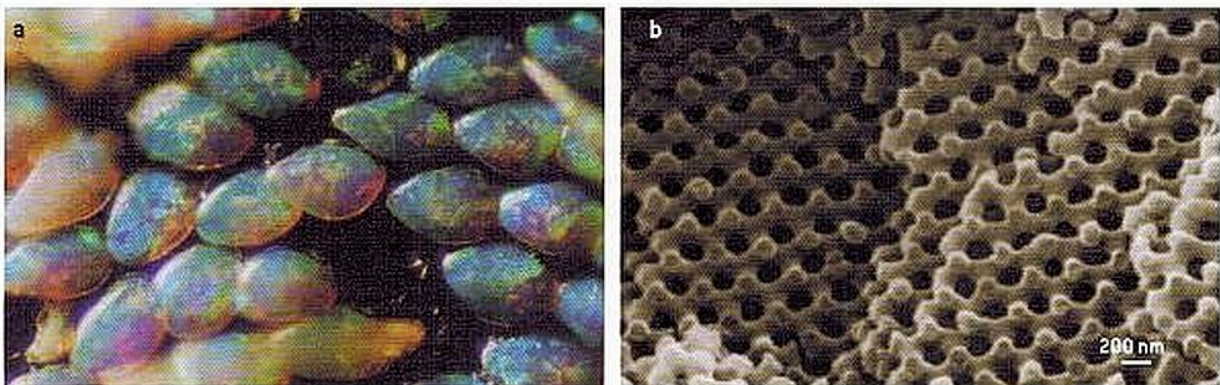


Fig. 7 (a) Les couleurs iridescentes des écailles de ce coléoptère (grossies 200 fois) sont du type opale inverse. (b) Cette image de microscopie électronique montre que chaque écaille présente une structure tridimensionnelle particulière, puisqu'elle est constituée de microsphères creuses au sein d'une matrice solide.

Enoncé

Soit une structure monodimensionnelle multicouche telle que celle de la figure 3a.

Les coefficients respectivement de transmission et de réflexion en amplitude pour chaque interface sont notés t et r , et la traversée d'une lame de fluide introduit un déphasage $\delta\varphi$.

1) Amplitudes

On note \tilde{A}_0 , l'amplitude de l'onde incidente sur la structure et les amplitudes des différentes ondes réfléchies par la structure $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$.

1.a) Exprimer \tilde{A}_1 en fonction de \tilde{A}_0 et r .

1.b) Exprimer \tilde{A}_2 en fonction de \tilde{A}_0, t, r et $\delta\varphi$.

1.c) Exprimer \tilde{A}_n en fonction de n, \tilde{A}_0, t, r et $\delta\varphi$.

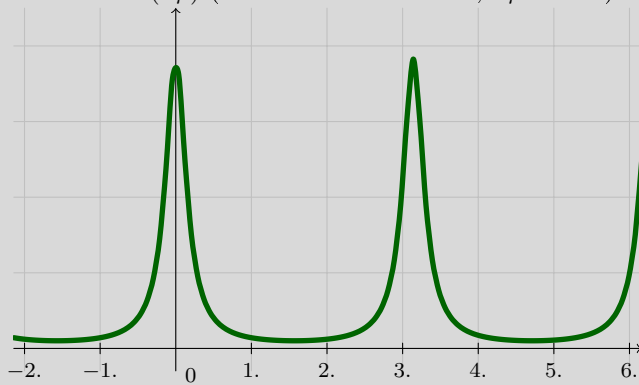
2) Onde résultante

2.a) Montrer que l'amplitude totale de l'onde réfléchie est $\tilde{A}_r = \frac{\tilde{A}_0 r}{1 - (t^2 \exp(2j \delta\varphi))}$.

2.b) En déduire que l'intensité de l'onde réfléchie est de la forme $I(\delta\varphi) = \frac{c}{a-b \cos(2\delta\varphi)}$, avec a , b et c , des constantes positives.

3) Interprétation

L'allure de $I(\delta\varphi)$ (I en unités arbitraires, $\delta\varphi$ en rad) est donnée ci-dessous :



3.a) En utilisant le graphique, déterminer pour quels $\delta\varphi$ il y a une intensité maximale.

3.b) Comparer ce dernier résultat trouvé dans le cas d'une interférence mettant en jeu uniquement deux ondes (d'amplitudes \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2).

3.c) On peut estimer que $\delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda}e$ avec e l'épaisseur qui sépare deux couches. Rapprocher ce dispositif d'un autre, vu dans le cours sur la diffraction.

Correction

1) Amplitudes

1.a) $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_0 r.$

1.b)

$$\tilde{A}_2 = \tilde{A}_0 t \exp(j \delta \varphi) r \exp(j \delta \varphi) t = \tilde{A}_0 t^2 r \exp(2j \delta \varphi)$$

1.c)

$$\tilde{A}_n = \tilde{A}_0 t^{(n-1)} r \exp(j(n-1)\delta\varphi) \exp(j(n-1)\delta\varphi) t^{(n-1)} = \tilde{A}_0 r t^{2(n-1)} \exp(2j(n-1)\delta\varphi)$$

2) Onde résultante

2.a) L'amplitude totale de l'onde réfléchie est

$$\tilde{A}_r = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_0 r (t^2 \exp(2j \delta \varphi))^{(n-1)}$$

qui est une série géométrique de raison $\tilde{q} = (t^2 \exp(2j \delta \varphi))$, donc :

$$\tilde{A}_r = \tilde{A}_0 r \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}^{(n-1)} = \tilde{A}_0 r \frac{1}{1 - \tilde{q}}$$

(cqfd).

2.b) L'intensité de l'onde réfléchie est

$$I = |\tilde{A}_r|^2 = \tilde{A}_r \tilde{A}_r^* = \frac{|\tilde{A}_0|^2 r^2}{(1 - \tilde{q})(1 - \tilde{q}^*)} = \frac{|\tilde{A}_0|^2 r^2}{(1 - \tilde{q} - \tilde{q}^* + |\tilde{q}|^2)}$$

Donc

$$I = \frac{|\tilde{A}_0|^2 r^2}{(1 - t^2 r (\exp(2j \delta \varphi) + \exp(-2j \delta \varphi)) + t^4 r^2)} = \frac{|\tilde{A}_0|^2 r^2}{(1 + t^4 r^2 - 2t^2 r \cos(2\delta \varphi))}$$

(cqfd).

3) Interprétation

3.a) En utilisant le graphique, on voit qu'il y a une intensité maximale pour $\delta \varphi = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.b) Le déphasage entre les deux ondes (d'amplitudes \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2) est $2\delta \varphi$. La condition d'interférence constructive est $2\delta \varphi = 2k\pi$ (elle est donc identique).

3.c) Il s'agit d'un réseau, non pas bidimensionnel en surface, mais en profondeur, d'épaisseur e . On retrouve une sorte de formule des réseaux en incidence et réflexion normales : $0 = k \frac{\lambda}{e}$.