

Diffusion thermique

Notes de cours

mardi 19 septembre 2017

I- Les flux thermiques

1. Généralité sur les flux thermiques

Notion de chaleur : s'y retrouver

La chaleur est un transfert d'énergie (en joule, J) qui n'est pas le travail. Elle dépend du "chemin suivi" (de la transformation). On la note donc δQ (c'est une forme différentielle) pour une transformation infinitésimale, et Q pour une transformation finie. Attention : la chaleur n'est pas une fonction d'état : elle n'est pas définie pour un état d'équilibre.

Flux thermique à travers une surface orientée : définition

La chaleur qui traverse une surface orientée S pendant dt est :

$$\delta Q = \phi_{th} dt \text{ avec : } \phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2S}$$

Le flux thermique (ou puissance thermique) ϕ_{th} s'exprime en W.
 \vec{j}_{th} est le vecteur densité de courant thermique (en $W \cdot m^{-2}$).

Flux thermique pour un système : définition

Soit un système fermé (limité par la surface fermée Σ) qui échange pendant dt la chaleur élémentaire δQ . Le flux thermique ϕ_{th} échangé par ce système fermé est une puissance (en W) :

$$\phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = - \oiint \vec{j}_{th} \cdot \vec{d^2\Sigma}$$

Modes de transferts thermiques : s'y retrouver

Les trois modes de transferts thermiques sont :

- la conduction (transferts thermiques de proche en proche) ;
- la convection (avec transport macroscopique de matière, naturel ou forcé) ;
- le rayonnement.

2. Le rayonnement

Transferts thermiques par rayonnement *vidéo*

Le rayonnement est un mode de transfert thermique

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

☼ Corps noir : s'y retrouver

Le corps noir est un objet idéal qui absorberait toute l'énergie électromagnétique qu'il recevrait, sans en réfléchir ni en transmettre. Il n'est fait aucune autre hypothèse sur la nature de l'objet. La lumière étant un rayonnement électromagnétique, elle est absorbée totalement et l'objet devrait donc apparaître noir, d'où son nom.

L'objet réel qui se rapproche le plus de ce modèle est l'intérieur d'un four. Afin de pouvoir étudier le rayonnement dans cette cavité, une de ses faces est percée d'un petit trou laissant s'échapper une minuscule fraction du rayonnement interne.

👁 Spectre du corps noir schéma

La figure 1 représente le spectre du rayonnement du corps noir. L'augmentation de la température du corps noir a deux effets :

- l'augmentation du rayonnement (cf. loi de Stefan-Boltzman),
- le déplacement du spectre vers les faibles longueurs d'onde (cf. loi de Wien).

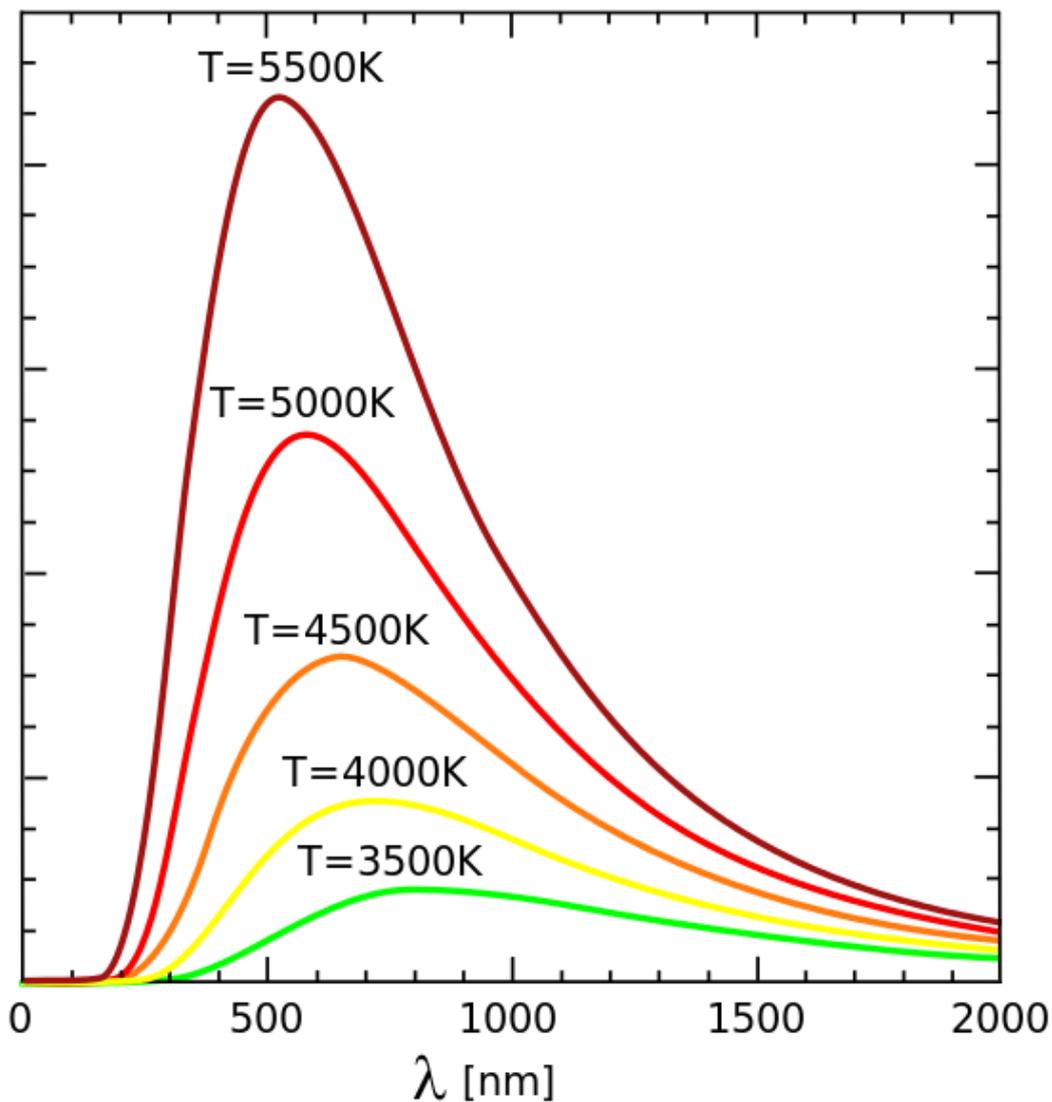


FIGURE 1 – Spectre du corps noir

**Loi de Stefan-Boltzman : définition**

La puissance émise par rayonnement d'un corps noir de surface S et de température T est :

$$P_{th} = \sigma S T^4$$

où $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

**Loi de Wien : définition**

La longueur d'onde λ_{max} , correspondant au pic d'émission lumineuse du corps noir, et la température T sont liées par la relation :

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

**Lois du corps noir vidéo**

Le rayonnement du corps noir dépend de sa température.

Vous pouvez retrouver la vidéo de cette expérience sur le site alain.lerille.free.fr.

**Conséquences de la loi de Wien s'y retrouver**

La température de surface du Soleil est 5780 K, ce qui correspond à un maximum d'émission vers 500 nm, au milieu du spectre visible

Les étoiles plus chaudes émettent à des longueurs d'onde plus courtes et apparaissent bleutées ; les étoiles plus froides nous semblent rougeâtres.

Notre environnement a une température d'environ 300 K et émet ainsi dans l'infrarouge moyen, aux alentours 10 μm .

La plupart des caméras à vision nocturne fonctionnent sur le principe de la détection de ce rayonnement thermique ;

**Transparence de l'atmosphère schéma**

La figure 2 représente la transparence de l'atmosphère aux rayonnements du Soleil et de la Terre. Du fait des différences de températures des deux corps, le Soleil émet plutôt dans le visible, où l'atmosphère est assez transparente, tandis que la Terre émet dans l'infrarouge où l'atmosphère est opaque.

**Le mécanisme de l'effet de serre : s'y retrouver**

La présence de l'atmosphère, tout comme celle du verre dans une serre, revient à absorber le rayonnement infrarouge émis par le sol, et le lui restituer en partie. Sans atmosphère, la température sur Terre serait plus basse.

3. Convection thermique

**Notion de convection : schéma**

La figure 3 représente le principe de la convection. C'est un mode de transfert d'énergie qui implique un déplacement de matière dans le milieu. La matière est transportée par un fluide.

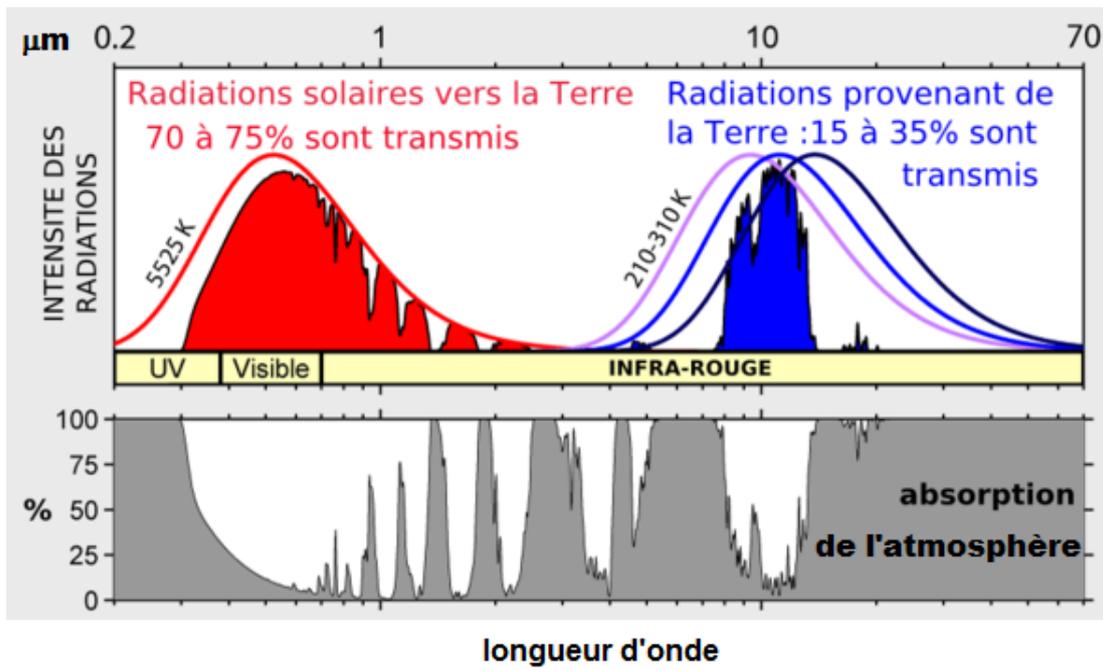


FIGURE 2 – Transparence de l’atmosphère

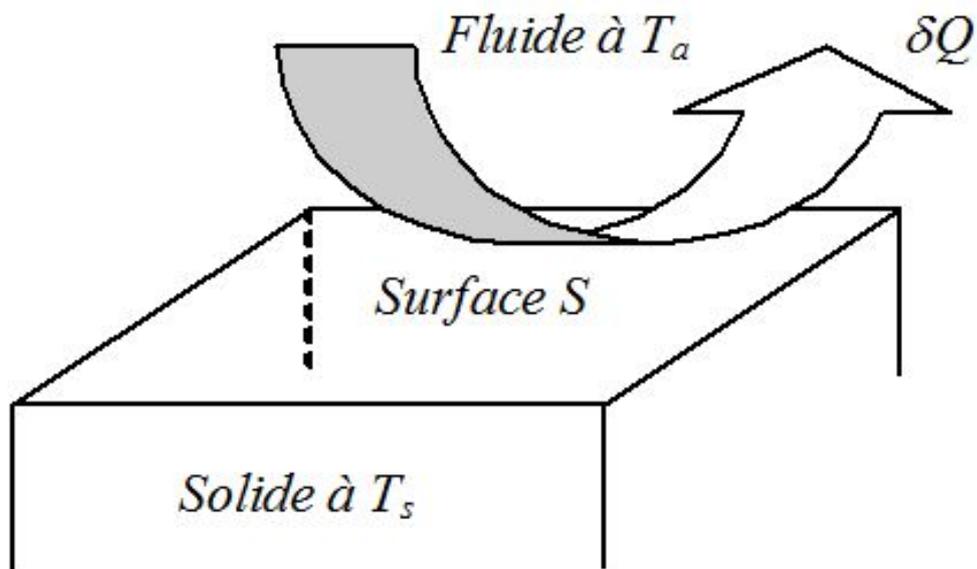
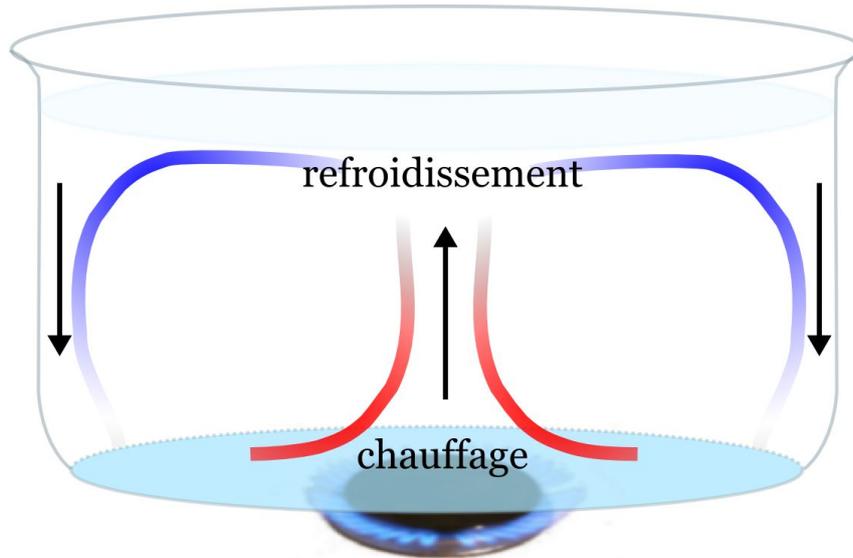


FIGURE 3 – Notion de convection :

Exemple de convection libre *photo*



L'eau se met en mouvement spontanément dans une casserole : les groupes de particules de fluide proches du fond de la casserole sont chauffés, se dilatent donc deviennent moins denses et montent ; ceux de la surface de la casserole sont refroidis par le contact de la surface avec un milieu moins chaud, se contractent donc gagnent en densité et plongent.

Notion de convection forcée : *s'y retrouver*

Dans le cas de la convection forcée, un dispositif mécanique (soufflerie, ventilateur) fait circuler le fluide aux abords du solide. Le mouvement favorise le transfert thermique.

Exemples de transfert thermique par convection forcée :

- radiateurs à circulation d'eau ou d'air (comme dans un ordinateur ou le moteur d'une voiture),
- tasse de liquide chaud lorsqu'on souffle dessus.

Loi de Newton : *définition*

Pour un corps (dans l'espace $x < x_0$) en contact avec un écoulement fluide à une température T_0 , l'expression de la densité de flux thermique est la suivante :

$$\vec{j}_{th} = h (T(x_0, t) - T_0) \vec{u}_x$$

où h est le coefficient de transfert thermique par convection (exprimé en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$).

4. Conduction thermique

Notion de conduction thermique : *s'y retrouver*

Le transfert par conduction est un échange d'énergie avec contact quand il existe une inhomogénéité (gradient) de température au sein d'un système. Elle peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique : un atome (ou une molécule) cède une partie de son énergie cinétique à l'atome voisin.

Dans un gaz ou un liquide, l'énergie se propage par contact direct entre molécules au gré des chocs aléatoires à l'échelle microscopique. Dans un solide, la vibration des atomes autour de leur position d'équilibre, se transmet de proche en proche. Les cristaux disposent d'un mode de transfert thermique

supplémentaire particulier associé aux vibrations du réseau (phonon). Les cristaux métalliques voient leurs électrons libres se charger de la conduction thermique (aussi bien que de la conduction électrique).



Loi de Fourier : *définition*

On admet que le vecteur densité de flux thermique dans le cas de la conduction thermique suit la loi de Fourier

$$\vec{j}_{th} = -\kappa \overrightarrow{grad}(T)$$

κ , qui s'exprime en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, est la conductivité thermique du corps ($\kappa > 0$).



Origine de la loi de Fourier : *s'y retrouver*

Cette loi a été établie mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822.

Il s'agit d'une réponse linéaire (développement limité à l'ordre 1).



Conductivité thermique *s'y retrouver*

Les métaux sont d'excellents conducteurs et les gaz de mauvais conducteurs thermiques : la conduction n'est sensible que dans le cas des milieux denses (solides et liquides).



Exemples de conductivités thermiques. *tableau*

Le tableau 1 présente quelques conductivités thermiques.

| Matériau | κ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) |
|-----------------|--|
| air | 0,026 |
| laine de verre | 0,04 |
| bois de chêne | 0,16 |
| eau | 0,6 |
| brique | 0,66 |
| béton | 1,3 |
| pierre calcaire | 2,2 |
| acier inox | 26 |
| aluminium | 237 |
| or | 317 |

TABLE 1 – Conductivités thermiques de quelques matériaux



Autres propriétés thermiques dans la construction *tableau*

Le tableau 2 présente quelques propriétés thermiques de matériaux de construction.



Interprétation de la loi de Fourier : *s'y retrouver*

dans le cas d'un système à une dimension (x), la loi de Fourier devient

$$\vec{j}_{th} = -\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{u}_x$$

La chaleur va du chaud au froid.

| Matériau | μ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) | c ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$) | κ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) |
|-----------------|--|--|--|
| brique | 1700 | 840 | 0,66 |
| granit | 2630 | 775 | 2,8 |
| Pierre calcaire | 2320 | 810 | 2,2 |
| marbre | 2680 | 830 | 2,8 |
| grès | 2150 | 745 | 2,9 |
| béton | 2200 | 880 | 1,3 |

TABLE 2 – Propriétés thermodynamiques de quelques matériaux de construction

Ce qui est conforme à l'énoncé du second principe de Clausius selon lequel "la chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid à un corps chaud".

Aussi, la loi de Fourier prend en compte le second principe, elle porte donc en elle l'irréversibilité.

II- Etablissement de l'équation de diffusion thermique

1. Etablissement dans le cas général

1 Diffusion thermique sans travail *théorème*

⇒

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène sans travail est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu c_V}$$

où D_{th} est la diffusivité thermique,

κ est la conductivité thermique,

μ est la masse volumique

et c_V est la capacité thermique massique à volume constant.

2. Cas unidimensionnel



Diffusion thermique à une dimension sans travail *s'y retrouver*

On retrouve bien sûr l'équation à une dimension.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu \cdot c_V} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

3. Symétrie cylindrique



Système à choisir dans le cas cylindrique *schéma*

La figure 4 représente un cylindre creux de rayon compris entre r et $r + dr$.



Diffusion thermique dans le cas cylindrique sans travail *s'y retrouver*

On peut exprimer le laplacien en cylindrique, et comparer au bilan énergétique effectué pour un cylindre creux de rayon compris entre r et $r + dr$.

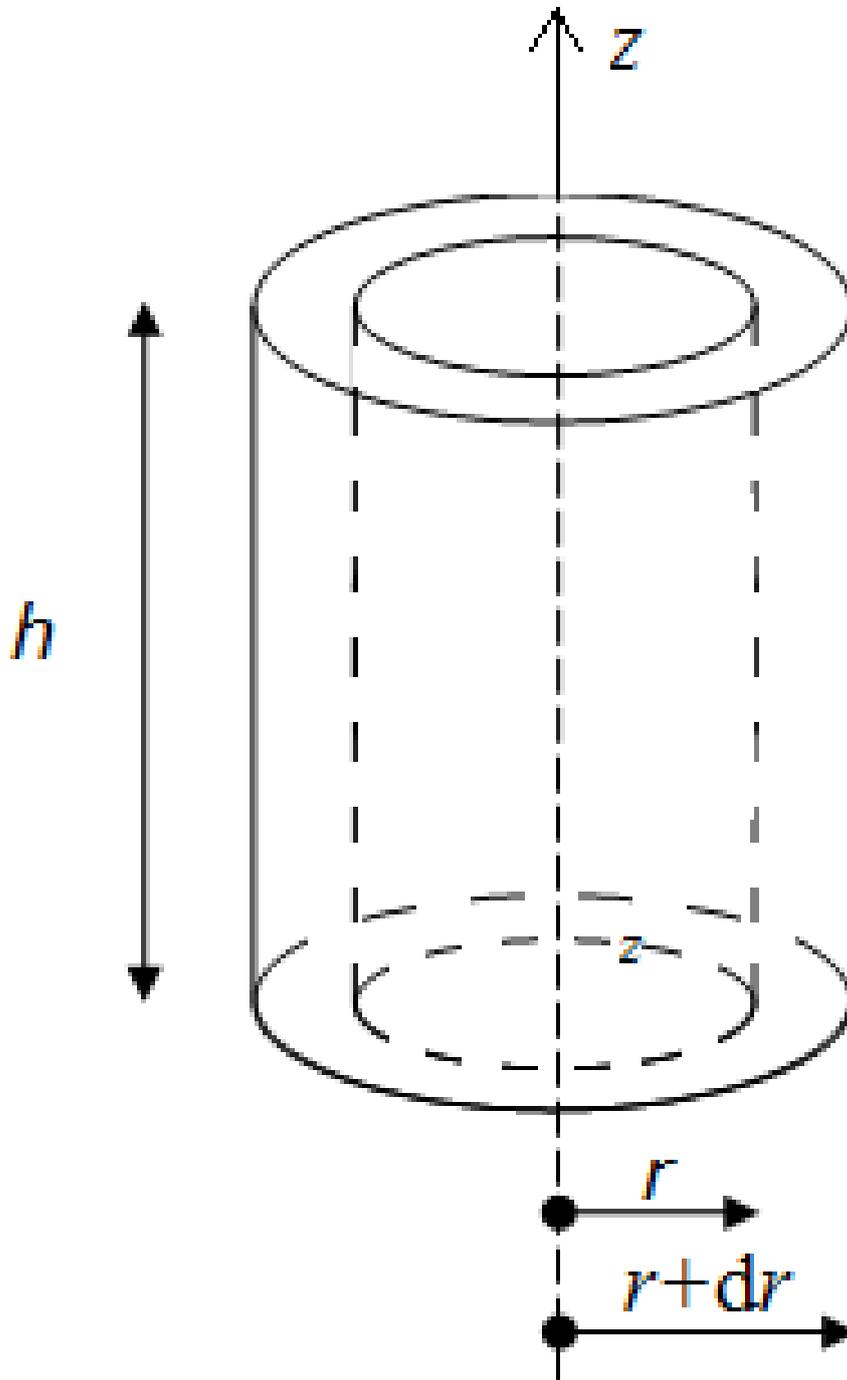


FIGURE 4 – Système à choisir dans le cas cylindrique

4. Symétrie sphérique

Système à choisir dans le cas sphérique *schéma*

| La figure 5 représente une sphère creuse de rayon compris entre r et $r + dr$.

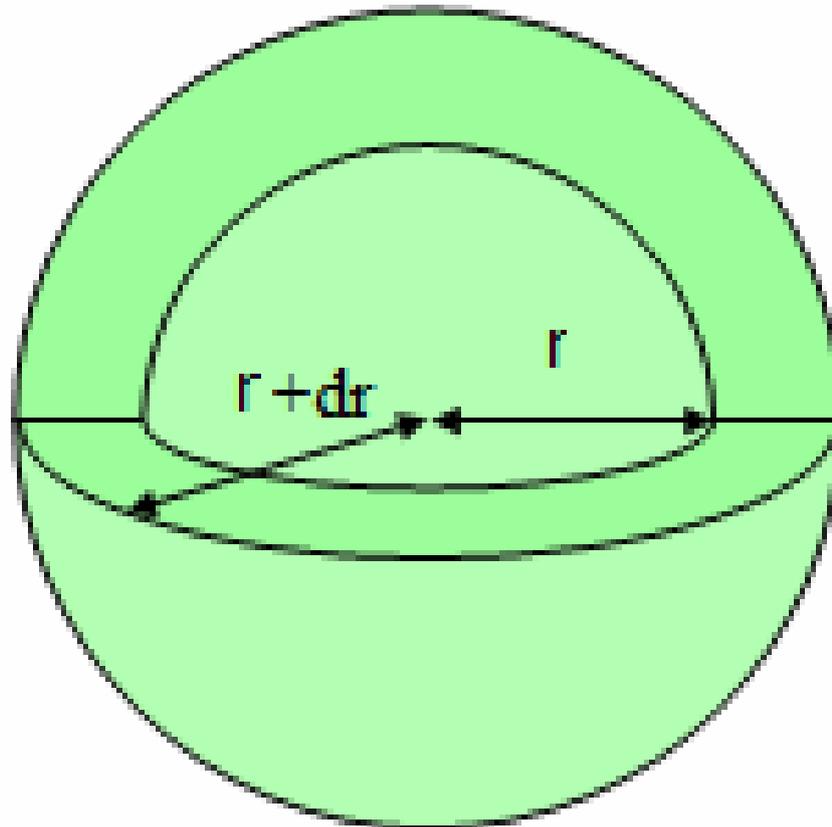


FIGURE 5 – Système à choisir dans le cas sphérique

Diffusion thermique dans le cas sphérique sans travail *s'y retrouver*

| On peut exprimer le laplacien en sphérique, et comparer au bilan énergétique effectué pour une sphère creuse de rayon compris entre r et $r + dr$.

III- Solutions de l'équation de diffusion thermique

Solution numérique : *s'y retrouver*

| Il se peut que l'on ne trouve pas de solution analytique à l'équation de diffusion. On fait alors appel à une solution numérique, trouvée par ordinateur.

✳ Ordre de grandeur : s'y retrouver

L'équation de diffusion fait apparaître un temps caractéristique τ pour un système de taille caractéristique L :

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2}$$

On voit donc que L varie comme $\sqrt{\tau}$: la diffusion est un phénomène lent, dans la mesure où, pour des tailles macroscopiques, les temps de diffusion sont souvent très grands.

👁 Solution gaussienne de l'équation de diffusion *animation*

La distribution de particules initialement disposées en $x = 0$ est une gaussienne dont la largeur augmente au cours du temps. C'est aussi le cas de la distribution de température pour une barre initialement chauffée en $x = 0$. On voit que le processus de diffusion est irréversible.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Solution intégrale d'une gaussienne de l'équation de diffusion *animation*

La distribution de température d'une barre dont les deux extrémités sont mises en contact avec des sources de chaleur différentes est l'intégrale d'une gaussienne (fonction *erf*). On voit que le processus de diffusion tend à rendre affine la distribution si $t \rightarrow \infty$.

Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site alain.lerille.free.fr.

👁 Position du problème à une dimension *schéma*

La figure 6 représente une tige homogène, de section constante S , de longueur L_{AB} , isolée sur ses surfaces latérales, mise en contact avec deux milieux en x_A et en x_B , en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

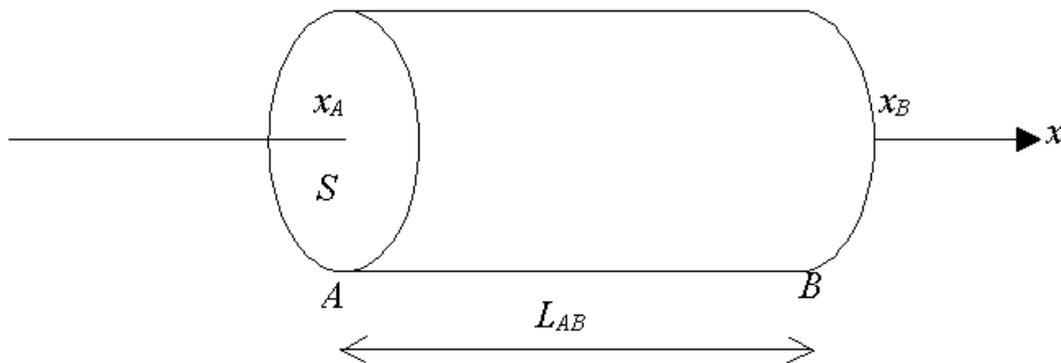


FIGURE 6 – Position du problème à une dimension

🔪 2 Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent à une dimension *théorème*

⇒

On se souviendra qu'en régime permanent, dans un milieu homogène :

- la température $T(x)$ suit une loi affine,
- le flux thermique ϕ_{th} est constant.

| domaine | électricité | thermique | particules |
|-----------------|---|---|---|
| potentiel | V | T | n |
| conductivité | γ | κ | D |
| loi locale | d'Ohm | de Fourier | de Fick |
| densité de flux | $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(V)$ | $\vec{j}_{th} = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ | $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n)$ |
| flux | $I = \iint_S \vec{j} \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x$ | $\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x$ | $\phi_N = \iint_S \vec{j}_N \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x$ |
| résistance | $R = \frac{L_{AB}}{\gamma S}$ | $R_{th} = \frac{L_{AB}}{\kappa S}$ | $R_N = \frac{L_{AB}}{D S}$ |
| loi globale | $V_A - V_B = R I$ | $T_A - T_B = R_{th} \phi_{th}$ | $n_A - n_B = R_N \phi_N$ |

TABLE 3 – Présentation synthétique de l'analogie.

3 Résistance thermique *théorème*

$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = \frac{T_B - T_A}{x_B - x_A} \vec{u}_x$ et $\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x = \kappa \frac{T_A - T_B}{L_{AB}} S$. Ainsi, on a bien \Rightarrow
La différence de température aux bornes d'un cylindre de coefficient de conductivité thermique κ , de section S et de longueur L_{AB} est (en convention récepteur) :

$$T_A - T_B = R_{th} \phi_{th} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{L_{AB}}{\kappa S}$$

R_{th} s'exprime en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$.

4 Conducteur ohmique en régime permanent : *exercice*

On s'intéresse à un fil électrique de section constante S , de conductivité électrique γ , de longueur $L_{AB} = x_B - x_A$, parcouru par un courant électrique $I = \iint_S \vec{j} \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x$ dans le sens de \vec{u}_x , subissant une différence de potentiel $U = V_A - V_B$ en régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

La loi d'Ohm au niveau local donne la densité volumique de courant : $\vec{j} = -\gamma \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V)$.

▷ En déduire la loi d'Ohm au niveau global $U = V_A - V_B = R I$.

▷ $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{dV}{dx} \vec{u}_x = \frac{V_B - V_A}{x_B - x_A} \vec{u}_x = -\frac{U}{L_{AB}} \vec{u}_x$ et $I = \iint_S \vec{j} \cdot d^2S \cdot \vec{u}_x = \gamma \frac{U}{L_{AB}} S$. Ainsi, on a bien $U = R I$, avec la résistance électrique $R = \frac{L_{AB}}{\gamma S}$.

Analogie entre électricité, diffusion thermique et des particules *tableau*

Le tableau 3 présente une analogie pour trois domaines de la physique en régime permanent :

- l'électricité des conducteurs ohmiques
- la conduction thermique
- la diffusion des particules

1) Modélisation électrique d'une paroi *exercice*

On s'intéresse à une pièce à la température T_{int} , l'extérieur étant à $T_{ext} < T_{int}$. Pour modéliser les échanges par convection, pour l'air calme à la température T_a , on utilisera la loi de Newton :

$$\|\vec{j}_{th}\| = h |T(x, t) - T_a|$$

On prendra $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

1) La paroi qui sépare la pièce de l'extérieur est formée d'un mur de section $S = 5 \text{ m}^2$, de conductivité thermique $\kappa_m = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_m = 25 \text{ cm}$, percé d'une fenêtre en verre de section $S = 5 \text{ m}^2$, de conductivité thermique $\kappa_v = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_v = 2,0 \text{ mm}$.

- Modéliser la résistance thermique R_{th} de la paroi par une association de résistances.
- Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.
- Calculer alors R_{th} .

2) On installe des doubles vitrage composés de deux verres de section S_v , de conductivité thermique κ_v et d'épaisseur $e_a = 2,0$ mm, entre lesquels se trouve de l'air de conductivité thermique $\kappa_a = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

2.a) Modéliser la résistance thermique R'_{th} de la nouvelle paroi par une association de résistances.

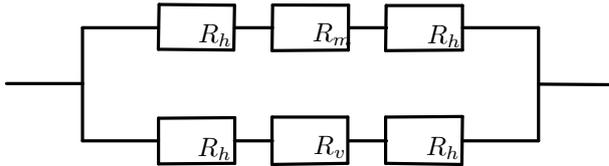
2.b) Calculer les valeurs de chacune de ces résistances.

2.c) Pourquoi fait-on des économies d'énergie grâce au double vitrage?

Correction :

1)

1.a)



1.b) Comme $R = \frac{\Delta T}{\phi_{th}}$ soit pour la convection $R = \frac{\Delta T}{j_{th} S}$ et pour la conduction $R = \frac{e}{\kappa S}$.

Pour la convection : $R_h = \frac{1}{h S} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

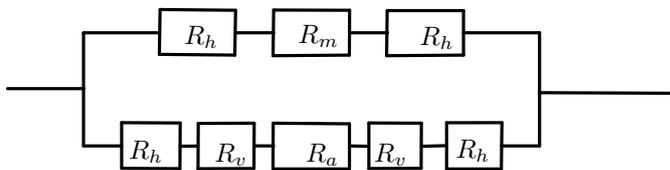
Pour le mur par conduction : $R_m = \frac{e_m}{\kappa_m S} = 2,3 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Pour le verre par conduction : $R_v = \frac{e_v}{\kappa_v S} = 3,3 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

1.c) Comme R_v est négligeable, et $R_h \approx R_m$, $\frac{1}{R_{th}} \approx \frac{1}{2R_h} + \frac{1}{3R_h} = \frac{5}{6R_h}$ donc $R_{th} \approx \frac{6R_h}{5} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

2)

2.a)



2.b) Idem avant avec

Pour l'air par conduction : $R_a = \frac{e_a}{\kappa_a S} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

2.c) Comme R_v est négligeable, et $R_h \approx R_m$, $\frac{1}{R'_{th}} \approx \frac{1}{2R_h + R_a} + \frac{1}{3R_h}$ donc $R'_{th} = 2,9 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, soit 20% de plus que R_{th} . **Eléments de correction :**

$R_{th} = 2,4 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ et $R'_{th} = 2,9 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Les techniques mathématiques à connaître

Calcul des opérateurs divergence et laplacien scalaire

Définition de la divergence :

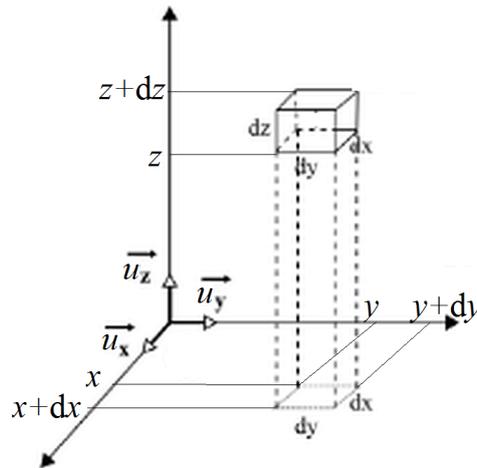
$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau$ pour un volume V délimité par une surface fermée Σ (formule d'Ostrogradsky).

Calcul dans le repère cartésien :

pour un volume élémentaire $dx dy dz$,

$$\text{div}(\vec{A}) dx dy dz = \phi(\vec{A})$$

Si on prend un parallélépipède rectangle entre x et $x + dx$, y et $y + dy$ et z et $z + dz$



$$\begin{aligned} \phi(\vec{A}) = & -A_x(x, y, z) dy dz + A_x(x + dx, y, z) dy dz \\ & -A_y(x, y, z) dx dz + A_y(x, y + dy, z) dx dz \\ & -A_z(x, y, z) dx dy + A_z(x, y, z + dz) dx dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{A}) = + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy$$

donc $\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Expressions avec l'opérateur nabla : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ et $\Delta f = \nabla^2 f = \text{div}[\vec{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$

avec l'opérateur nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

en coordonnées cartésiennes seulement!!!

Expressions dans un repère quelconque :

dans n'importe quel repère, on peut écrire en utilisant

| Coordonnées | \vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{u}_3 | s_1 | s_2 | s_3 | μ_1 | μ_2 | μ_3 |
|--------------|-------------|------------------|-------------------|-------|----------|-----------|---------|---------|-----------------|
| cartésiennes | \vec{u}_x | \vec{u}_y | \vec{u}_z | x | y | z | 1 | 1 | 1 |
| cylindriques | \vec{u}_r | \vec{u}_θ | \vec{u}_z | r | θ | z | 1 | r | 1 |
| sphériques | \vec{u}_r | \vec{u}_θ | \vec{u}_φ | r | θ | φ | 1 | r | $r \sin \theta$ |

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left(\frac{\partial(\mu_2 \mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \mu_1 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \mu_2 A_3)}{\partial s_3} \right)$$

$$\text{et } \Delta f = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$$

Technique à maîtriser

jeudi 21 septembre 2017

I- Les capacités exigibles

1. Etablissement de l'équation de diffusion thermique



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Distinguer qualitativement les trois types de transfert thermiques : conduction, convection et rayonnement.

Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur \vec{j}_Q .

Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes.

Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.

Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.

Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne.

Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne.

Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie.

2. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique.

Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne.

Utiliser des associations de résistances thermiques.

Utiliser la relation de Newton $\delta Q = h(T_s - T_a)dSdt$ fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide.

3. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime quelconque



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.

4. Le rayonnement et l'effet de serre



ce qu'il faut savoir faire *capacités*

Utiliser les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan pour expliquer qualitativement l'effet de serre.

II- Méthodes

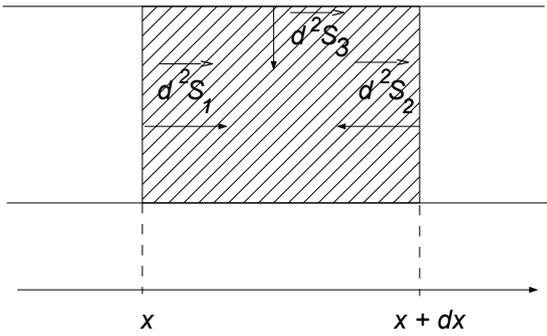
1. Etablissement de l'équation de diffusion thermique

A) Etablissement de l'équation de diffusion thermique *méthode*

Il s'agit de faire un bilan d'énergie : l'énergie interne $U = \iiint u d^3\tau$ du système défini (qui vérifie les symétries du problème) varie pendant dt de $dU = +\delta W + P_{th}dt$, où δW est le travail et la puissance thermique P_{th} est égale au flux de \vec{j}_{th} à travers les parois du système orientées vers l'intérieur. On utilise la loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -\kappa \cdot \overrightarrow{grad}T$ et on écrit la différentielle de l'énergie interne en fonction de T et V : $dU =$

$\iiint c \frac{\partial T}{\partial t} dt d^3\tau.$

En cartésien, il faut prendre comme système un élément de volume compris entre x et $x + dx$ et bien penser à orienter les vecteurs surface vers l'intérieur du système.



2. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent

B) Utilisation des conditions aux limites *méthode*

En régime permanent, la solution de l'équation de diffusion thermique en cartésien est une fonction affine et le flux thermique est constant si le milieu est homogène.

- à l'interface entre deux milieux qui suivent la loi de diffusion thermique il y a continuité de la température et du flux thermique;
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et un fluide, il faut utiliser la continuité du flux thermique (qui est donné par la loi de Newton);
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et un thermostat, il faut utiliser la continuité de la température (qui est celle du thermostat);
- à l'interface entre le milieu qui suit la loi de diffusion thermique et une paroi atherme, il faut utiliser la continuité du flux thermique (qui est nul).

C) Utilisation de la loi d'Ohm pour la diffusion en régime permanent *méthode*

Un milieu homogène de conductivité κ , de longueur ℓ et de section S présente une résistance thermique $R_{th} = \frac{\ell}{\kappa \cdot S}$. Si ce milieu est suivi d'un autre, les résistances thermiques s'ajoutent (résistances en série), s'il est à côté d'un autre, les inverses des résistances s'ajoutent (résistances en parallèle).

En régime permanent, si un milieu 1 de température T_1 est séparé d'un milieu 2 de température T_2 par une résistance thermique R_{th} , la loi d'Ohm stipule que $T_2 - T_1 = R_{th} \cdot \Phi_{th}$, où Φ_{th} est le flux thermique qui passe dans la résistance orienté depuis 2 vers 1 (convention récepteur).

3. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime quelconque

D) Ordre de grandeur et diffusion *méthode*

L'équation de diffusion fait apparaître un temps caractéristique τ pour un système de taille caractéristique L :

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{L^2}$$

4. Le rayonnement et l'effet de serre

III- Exercices

1. Etablissement de l'équation de diffusion thermique

1.1) Diffusion thermique à trois dimensions sans travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à trois dimension, de capacité thermique massique c_V , de masse volumique μ , de conductivité thermique κ , en absence de travaux ?

Premier principe pour le volume V

$$dU = \iiint_V \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d^3\tau \cdot dt$$

s'il n'y a pas de travaux

$$dU = \delta Q = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{\Sigma} \cdot dt = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_{th}) \cdot d^3\tau \cdot dt$$

Au niveau local, la loi de conservation des particules s'écrit donc :

$$\mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th})$$

Si le système est homogène, la conductivité κ ne dépend pas de la position on a :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) = \text{div}(\kappa \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)) = \kappa \cdot \nabla^2 T = \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène sans travail est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \cdot \Delta T \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu \cdot c_V}$$

1.2) Diffusion thermique à trois dimensions avec travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à trois dimension, de capacité thermique massique c_V , de masse volumique μ , de conductivité thermique κ , avec travaux ?

Premier principe pour le volume V

$$dU = \iiint_V \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} d^3\tau \cdot dt$$

dans le cas général :

$$dU = \delta Q + \delta W = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{\Sigma} \cdot dt + \iiint_V \mu \cdot p \cdot d^3\tau \cdot dt = \iiint_V [-\text{div}(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p_m] \cdot d^3\tau \cdot dt$$

Au niveau local, la loi de conservation des particules s'écrit donc :

$$\mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p_m$$

Si le système est homogène, κ ne dépend pas de la position on a :

$$\operatorname{div}(\vec{j}_{th}) + \mu \cdot p = \operatorname{div}(\kappa \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) + \mu \cdot p_m = \kappa \cdot \nabla^2 T + \mu \cdot p_m = \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de diffusion thermique à trois dimensions dans un milieu homogène, dont la puissance massique est p_m est

$$\kappa \cdot \Delta T + \mu \cdot p_m = \mu \cdot c_V \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.3) Diffusion thermique à une dimension sans travail

Quelle est l'équation suivie par la température dans un milieu homogène à une dimension x , de capacité thermique massique c_V , de masse volumique μ , de conductivité thermique κ , en absence de travaux ?

On va faire un bilan pour un cylindre de section S entre les abscisses x et $x + dx$.

En x , le flux thermique est $\phi_{th}(x, t) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\kappa \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$.

En $x + dx$, le flux thermique est $\phi_{th}(x + dx, t) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = -\kappa \cdot S \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$.

Le premier principe s'écrit $dU = (S \cdot dx) \cdot \mu \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta Q$

avec $\delta Q = +\phi_{th}(x, t) \cdot dt - \phi_{th}(x + dx, t) \cdot dt = -\frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} dx \cdot dt = \kappa \cdot S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \cdot dt$.

Dans un milieu homogène à une dimension x , de capacité thermique massique c_V , de masse volumique μ , de conductivité thermique κ , en absence de travaux,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D_{th} \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D_{th} = \frac{\kappa}{\mu \cdot c_V}$$

1.4) Une sphère qui se refroidit

On s'intéresse à une sphère de rayon R , de masse volumique μ , de capacité massique c et de conductivité thermique κ . La température ne dépend que de la date t et du rayon r dans les coordonnées sphériques.

1) Dédurre l'équation différentielle suivie par la température d'un bilan énergétique pour une écorce de rayon $r \in [r; r + dr]$.

2) Retrouver cette équation grâce à l'expression du laplacien en sphérique.

1) Le premier principe donne $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = +\phi_{th}(r) - \phi_{th}(r + dr)$ en orientant le flux vers les r croissants.

Comme $\phi_{th}(r) = -4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r$,

$\phi_{th}(r + dr) = -4 \cdot \pi \cdot (r + dr)^2 \cdot \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r+dr} = -4 \cdot \pi \cdot r^2 \left(1 + 2\frac{dr}{r}\right) \cdot \kappa \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r \cdot dr\right]$,

soit au premier ordre $\phi_{th}(r + dr) = -\phi_{th}(r) - 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \cdot \kappa \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r\right]$,

D'autre part, $\frac{dU}{dt} = \mu \cdot c \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$.

on trouve $\mu \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_r + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r\right]$.

$\triangleright \Delta f = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\mu_2 \cdot \mu_3}{\mu_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\frac{\mu_3 \cdot \mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s_3} \left(\frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{\mu_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial s_3} \right) \right]$

soit $\Delta T(r) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \sin \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial r}) \right] = \frac{1}{r^2} \left[2 \cdot r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right]$ ce qui redonne bien la même équation de diffusion.

1.5) Conduction thermique entre deux sphères concentriques

On considère un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O , de rayons a et b ($a < b$), de conductivité thermique κ , de capacité thermique massique c et de masse volumique μ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 (pour $r = a$) et T_2 (pour $r = b$) et on suppose $T_1 > T_2$.

1) En utilisant un formulaire, écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température T en un point M , à l'instant t .

2) Déterminer, en régime permanent :

- 2.a) la température $T(r)$ en tout point M du matériau ;
 2.b) la puissance thermique P_t transférée entre les deux sphères de rayons a et b ;
 2.c) la résistance thermique R_t , de ce conducteur.

1) A partir de la diffusion thermique, en connaissant le laplacien en sphérique :

$$\kappa \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \mu \cdot c \cdot r^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

2) En régime permanent : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

2.a) d'où $r^2 \cdot \frac{dT}{dr} = cste$ qui nous permet d'en déduire : $T(r) = \frac{A}{r} + B$. Les conditions aux limites fixent A et B et on trouve :

$$T(r) = \frac{a \cdot b}{r} \frac{T_1 - T_2}{b - a} - \frac{a \cdot T_1 - b \cdot T_2}{b - a}$$

2.b) la puissance est $P_t = 4\pi \cdot r^2 \cdot j_t(r, t) = -4\pi \cdot r^2 \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$. On trouve donc :

$$P_t = 4\pi \cdot \kappa \frac{a \cdot b}{b - a} (T_1 - T_2)$$

2.c) la résistance thermique R_t est définie par : $(T_1 - T_2) = R_t \cdot P_t$, donc :

$$R_t = \frac{1}{4\pi \cdot \kappa} \frac{b - a}{a \cdot b}$$

1.6) Exemple d'un fil électrique cylindrique :

On s'intéresse à un fil électrique cylindrique, de rayon r_1 , de résistance linéique R_l , entouré par une gaine d'isolant, de rayon extérieur r_2 et de conductivité thermique κ . On se place en régime permanent, la température ne dépendant que du rayon r .

1) Faire un bilan énergétique pour un cylindre de longueur ℓ , de rayon $r \in [r_1; r_2]$, faisant apparaître ϕ_{th} , le flux thermique, et I , l'intensité dans le fil.

2) En déduire l'équation différentielle suivie par la température.

1) Le premier principe donne $\frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}$,
 avec $\frac{\delta W}{dt} = U \cdot I = R_l \cdot \ell \cdot I^2$

et $\frac{\delta Q}{dt} = \phi_{th}$

Soit $\phi_{th} + R_l \cdot \ell \cdot I^2 = \frac{dU}{dt} = 0$.

2) Comme $\phi_{th} = -\oint \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{\Sigma} = -2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot j_{th,r} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r}$,
 on trouve $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial r} + R_l \cdot I^2 = 0$.

2. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime permanent

2.7) Isolant

Une couche d'isolant d'épaisseur $d = 10\text{cm}$ et de conductivité thermique $\kappa = 40\text{mW} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a une face (repérée par $x = 0$) maintenue à la température $\theta_1 = 100^\circ\text{C}$. L'autre face (repérée par $x = d$) est refroidie par convection par un courant d'air à $\theta_a = 25^\circ\text{C}$ qui doit maintenir sa température à la valeur $\theta_2 = 30^\circ\text{C}$ (en régime permanent).

1) Calculer quelle doit être la valeur du coefficient h défini dans la loi de Newton.

2) Quel paramètre peut-on adapter simplement pour obtenir cette valeur ?

1) En régime permanent, la répartition de température s'écrit $\theta(x) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{d} x + \theta_1$.

La densité volumique de flux thermique qui traverse le mur (par conduction) vaut : $j_{th,x} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa \frac{\theta_2 - \theta_1}{d}$.

Or sur la face $x = d$ du mur : $j_{th_x} = h(\theta_2 - \theta_a)$. Conclusion :

$$h = \frac{\kappa \theta_1 - \theta_2}{d \theta_2 - \theta_a} = 5,6 W.m^{-2}.K^{-1}$$

2) En augmentant la ventilation, on augmente la masse d'air qui vient, par unité et temps, au contact du solide, ce qui augmente, toutes autres choses étant égales, la puissance thermique évacuée par l'air.

2.8) Refroidissement d'un composant électronique

Un composant électronique de conductivité thermique $\kappa = 4,0 \cdot 10^{-2} W.m^{-1}.K^{-1}$ a deux faces 1 et 2 séparées par l'épaisseur $d = 2,0 cm$. Un ventilateur refroidit la surface 1 grâce à un courant d'air à la température $\theta_a = 20^\circ C$ tandis que l'autre face (2) est maintenue (du fait de son utilisation) à la température $\theta_2 = 50^\circ C$. En régime permanent, la température de 1 doit avoir la valeur $\theta_1 = 30^\circ C$.

- 1) Calculer quelle doit être la valeur du coefficient h défini dans la loi de Newton.
- 2) Sur quel paramètre peut-on jouer simplement pour obtenir cette valeur ?

1) $h = \frac{\kappa \theta_2 - \theta_1}{d \theta_1 - \theta_a} = 4,0 W.m^{-2}.K^{-1}$.

2) On peut jouer simplement sur le débit d'air pour obtenir cette valeur !

2.9) Intérêt d'un double-vitrage

On s'intéresse à une pièce à la température T_{int} , l'extérieur étant à $T_{ext} < T_{int}$. La paroi qui sépare la pièce de l'extérieur est formée d'un mur de section S_m , de conductivité thermique κ_m et d'épaisseur e_m , percé d'une fenêtre en verre de section $S_v \sim S_m$, de conductivité thermique $\kappa_v \gg \kappa_m$ et d'épaisseur $e_v \ll e_m$.

1) Exprimer la résistance thermique R_{th} de la paroi. Montrer qu'elle est à peu près celle de la fenêtre.

On installe des doubles vitrage composés de deux verres de section S_v , de conductivité thermique κ_v et d'épaisseur e_v , entre lesquels se trouve de l'air de conductivité thermique $\kappa_a \ll \kappa_v$ et d'épaisseur $e_a \sim e_v$.

2) Exprimer la nouvelle résistance thermique R'_{th} de la paroi.

3) Pourquoi fait-on des économies d'énergie grâce au double vitrage ?

1) On met en parallèle deux résistances : $R_{th}(m) = \frac{e_m}{\kappa_m \cdot S_m}$ et $R_{th}(v) = \frac{e_v}{\kappa_v \cdot S_v}$, soit $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th}(m)} + \frac{1}{R_{th}(v)}$. Comme $R_{th}(m) \gg R_{th}(v)$, $R_{th} \approx R_{th}(v)$.

2) On met maintenant trois résistances en série : $R'_{th} = R_{th}(v) + R_{th}(a) + R_{th}(v)$. Comme $R_{th}(a) = \frac{e_a}{\kappa_a \cdot S_v} \gg R_{th}(v)$, $R'_{th} \approx R_{th}(a)$.

3) $R'_{th} \gg R_{th}$, donc $\phi'_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R'_{th}} \ll \phi_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}}$: le flux thermique est plus faible avec le double vitrage. Ainsi, on a besoin de moins chauffer la pièce.

2.10) Etude d'un double-vitrage

On s'intéresse à une baie vitrée de surface $S = 4,0 m^2$ qui délimite un intérieur où règne une température $T_i = 20^\circ C$ d'un extérieur où règne une température $T_e = 5^\circ C$. On suppose que les fuites thermiques n'ont lieu que par conduction, à travers cette baie vitrée.

1) La baie vitrée est constituée d'un verre (de conductivité thermique $\kappa = 1,2 W.m^{-1}.K^{-1}$) d'épaisseur $e = 3,0 mm$.

1.a) Calculer la résistance thermique R_{th} présentée par la baie vitrée.

1.b) En déduire la puissance thermique P_{th} perdue.

2) La baie vitrée est maintenant un double-vitrage, constitué d'une épaisseur $e = 3,0 mm$ d'air de conductivité thermique $\kappa' = 26 mW.m^{-1}.K^{-1}$ compris entre deux verres (de conductivité thermique $\kappa = 1,2 W.m^{-1}.K^{-1}$) d'épaisseur $e = 3,0 mm$.

2.a) Calculer la nouvelle résistance thermique R'_{th} présentée par la baie vitrée.

2.b) En déduire la puissance thermique P'_{th} perdue.

1) Baie vitrée constituée d'un verre unique :

1.a) $R_{th} = \frac{e}{\kappa \cdot S} = 0,63 mK.W^{-1}$.

1.b) $P_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R_{th}} = -24 kW$.

2) Double-vitrage :

- 2.a) $R'_{th} = 2.R_{th} + \frac{e}{\kappa'.S} \approx \frac{e}{\kappa'.S} = 30mK.W^{-1}$.
 2.b) $P'_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R'_{th}} = -0,45kW$.

2.11) Pertes thermiques à travers un pan de mur

On s'intéresse à un pan de muraille de surface totale $S_t = 7,5m^2$ composé d'un mur de brique d'épaisseur $e_b = 40cm$, de conductivité thermique $\kappa_b = 0,70W.m^{-1}.K^{-1}$ et d'une fenêtre de surface $S_f = 0,5m^2$ en verre $\kappa_v = 1,2W.m^{-1}.K^{-1}$ d'épaisseur $e_v = 3mm$ qui délimite un intérieur où règne une température $T_i = 20^\circ C$ d'un extérieur où règne une température $T_e = 5^\circ C$. On suppose que les fuites thermiques n'ont lieu que par conduction, à travers cette muraille.

- 1) Calculer la résistance thermique :
 1.a) R_v présentée par la fenêtre de verre ;
 1.b) R_b présentée par le mur de brique ;
 1.c) R_t présentée par le mur en totalité.
 2) En déduire la puissance thermique P_{th} perdue.

- 1) Résistance thermique :
 1.a) $R_v = \frac{e_v}{\kappa_v.S_v} = 5,0mK.W^{-1}$ pour la fenêtre de verre ;
 1.b) $R_b = \frac{e_b}{\kappa_b.(S_t - S_v)} = 82mK.W^{-1}$ pour le mur de brique ;
 1.c) Association en parallèle de résistances : $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_b}$, soit pour le mur en totalité :

$$R_t = \frac{R_v.R_b}{R_v + R_b} \approx R_v = 4,7mK.W^{-1}$$

- 2) $P_{th} = \frac{(T_e - T_i)}{R_t} = -3,2kW$.

2.12) La sensation de chaud ou de froid

Tout l'exercice est à une dimension : x et les transferts thermiques sont purement conductifs. On s'intéresse à deux cylindres (1 en $x \in [-L, 0]$ et 2 en $x \in [0, +L]$), de mêmes longueurs L , de masses volumiques respectives μ_1 et μ_2 , de capacités calorifiques massiques respectives c_1 et c_2 , de conductivités thermiques respectives κ_1 et κ_2 , thermostatés à leurs extrémités ($T(-L, t) = T_1$ et $T(+L, t) = T_2$), en contact en $x = 0$.

- 1) Thermodynamique :
 1.a) Rappeler l'équation de diffusion thermique.
 1.b) Donner l'expression de la température en régime permanent. Exprimer en particulier T_0 , la température en $x = 0$.

- 2) Application à la sensation de chaud et de froid :

On suppose que le cylindre 2 est une main, et $T_2 = 37^\circ C$. L'autre cylindre est un objet touché par la main. On imagine que la sensation de chaud ou de froid ressentie par la main est reliée à la température au point de contact $x = 0$.

- 2.a) Discuter cette modélisation.

2.b) Contact avec du bois : $\kappa_1 \ll \kappa_2$. Ce bout de bois semble-t-il chaud ou froid, si le bout de bois est à $T_1 = 20^\circ C$? Et si $T_1 = 60^\circ C$?

- 2.c) Contact avec un métal : mêmes questions, mais cette fois, $\kappa_1 \gg \kappa_2$.

- 1) Thermodynamique
 1.a) Equation de diffusion thermique :

$$\mu.c. \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \kappa. \Delta T(\vec{r}, t)$$

- 1.b) En régime permanent, la température est affine dans les deux cylindres :

$$\begin{cases} T(x \in [-L; 0]) = a_1.x + b_1 \\ T(x \in [0; +L]) = a_2.x + b_2 \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver 4 équations données par les conditions aux limites, pour déterminer les 4 inconnues (a_1, a_2, b_1 et b_2).

Les cylindres sont en contact en $x = 0$, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} T(0^-) = T_2(0^+) \\ \kappa_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^-} = \kappa_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^+} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 = T_0 \\ \kappa_1 \cdot a_1 = \kappa_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

où T_0 est la température en $x = 0$.

Les extrémités des deux cylindres sont en contact avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2 :

$$\left. \begin{array}{l} T(-L) = T_1 \\ T(+L) = T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -L \cdot a_1 + b_1 = T_1 \\ +L \cdot a_2 + b_2 = T_2 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{\kappa_2(T_1 - T_2)}{L \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)} \\ a_2 = -\frac{\kappa_1(T_1 - T_2)}{L \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)} \end{cases}$$

et

$$T_0 = \frac{T_1 \cdot \kappa_1 + \kappa_2 \cdot T_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$$

2) Application

2.a) La sensation de chaud ou de froid ressentie par la main est complexe (mesure de température, mesure différentielle de température, mesure de transfert thermique...). Et pourquoi les deux cylindres auraient la même longueur ?

2.b) Contact avec du bois :

$$\kappa_1 \ll \kappa_2 \Rightarrow T_0 \approx T_2$$

Que le bois soit chaud ou froid, c'est la main qui impose sa propre température au contact.

2.c) Contact avec un métal :

$$\kappa_2 \ll \kappa_1 \Rightarrow T_0 \approx T_1$$

Que le métal soit chaud ou froid, c'est lui qui impose sa propre température au contact. Si $T_1 = 20^\circ C$, il semble froid (plus froid que la main!). Et si $T_1 = 60^\circ C$, il semble chaud.

2.13) Transfert par conduction et (ir)réversibilité

Afin de modéliser un échangeur thermique, on considère une barre de section S et de longueur L , de conductivité thermique κ (on négligera les autres modes de transfert thermique) qui a, en régime permanent, ses deux extrémités aux températures T_1 (en x_1) et T_2 (en $x_2 > x_1$).

1) Exprimer le flux thermique ϕ qui se propage suivant \vec{u}_x .

2) Faire un bilan d'entropie pendant dt : donner

2.a) la variation d'entropie dS ;

2.b) l'entropie échangée δS_e ;

2.c) l'entropie créée δS_c .

3) Interprétation :

3.a) Le précédent résultat est-il conforme au second principe ?

3.b) Comment faire pour rendre le processus réversible ? Qu'est-ce que cela impose pour ϕ ?

3.c) Montrer que, pour minimiser les irréversibilités tout en conservant un flux non nul, il faut que

$$T_1 - T_2 = \delta T \ll T_1.$$

1) $\phi = \frac{T_1 - T_2}{L} \kappa \cdot S.$

2) Bilan d'entropie pendant dt :

2.a) $dS = 0$ car $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;

2.b) $\delta S_e = \left(\frac{\Phi_{th} \cdot dt}{T_1} - \frac{\Phi_{th} \cdot dt}{T_2} \right) = -\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 \cdot T_2} \frac{\kappa \cdot S}{L} dt$;

2.c) $\delta S_c = -\delta S_e = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 \cdot T_2} \frac{\kappa \cdot S}{L} dt.$

3) Interprétation :

3.a) $\delta S_c \geq 0.$

3.b) $T_1 = T_2 \Rightarrow \delta S_c = 0$, mais aussi $\phi = 0.$

3.c) $\phi = \frac{\delta T}{L} \kappa \cdot S$ est un infinitésimal du premier ordre ;

et $\delta S_c \approx \left(\frac{\delta T}{T_1} \right)^2 \frac{\kappa \cdot S}{L} dt$ est un infinitésimal du second ordre.

3. Solution de l'équation de diffusion thermique en régime quelconque

3.14) Durée d'un régime transitoire de diffusion thermique le long d'une barre

1) Calculer l'ordre de grandeur Δt de la durée d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier homogène, de longueur L , de section droite circulaire de rayon a , de masse m , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique κ lors d'une diffusion thermique.

2) Applications numériques :

2.a) $a = 1,0\text{cm}$, $m = 1,24\text{kg}$, $c = 0,46\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $L = 0,50\text{m}$ et $\kappa = 82\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

2.b) même matériau de longueur double.

1) L'équation de diffusion $\kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$ où $\mu = \frac{m}{\pi \cdot a^2 \cdot L}$ nous donne : $\frac{\kappa}{L^2} \approx \frac{\mu \cdot c}{\Delta t}$. Aussi :

$$\Delta t \approx \frac{\mu \cdot c \cdot L^2}{\kappa} = \frac{m}{\pi \cdot a^2 \cdot L} \frac{c \cdot L^2}{\kappa}$$

2) Applications numériques :

2.a) $\Delta t \approx 10^3\text{s}$, soit 3 heures ;

2.b) $\Delta t' = 4 \cdot \Delta t$, soit 12 heures.

3.15) Diffusion d'un pic de température

Soit une tige isolée et homogène, de section S constante, et suffisamment longue pour que le problème des conditions aux limites ne se pose pas. À l'instant initial, la répartition température est une fonction gaussienne de x :

$$T(x, t = 0) = T_0 + \theta \cdot e^{-\left(\frac{x}{l_0}\right)^2}$$

1) Vérifier que $T(x, t) = T_0 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{4 \cdot D \cdot t}{l_0^2} + 1}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t + l_0^2}}$ est solution de l'équation de diffusion.

2) Etudier $T(x, t)$ à t fixé :

2.a) Que vaut son maximum $T_{max}(t)$?

2.b) Possède-t-elle des propriétés de parité ?

2.c) Donner l'allure de $T(x, t)$.

On définit la largeur $l(t)$ à l'instant t du pic de température par la largeur de l'ensemble des positions x telles que $T(x, t) - T_0 > \frac{T_{max}(t) - T_0}{e}$.

3) Définir et calculer $l(t)$, la largeur à l'instant t du pic de température.

1) On vérifie que

$$\kappa \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu \cdot c \frac{\partial T}{\partial t}$$

pour peu que $D = \frac{\kappa}{\mu \cdot c}$

2) Etude de $T(x, t)$ à t fixé :

2.a) $T_{max} = T_0 + \frac{\theta}{\sqrt{\frac{4 \cdot D \cdot t}{l_0^2} + 1}}$?

2.b) $T(x, t)$ est paire.

2.c) L'allure de $T(x, t)$ est une courbe en cloche (gaussienne).

3) $T(x = \pm \frac{l(t)}{2}, t) - T_0 = \frac{T_{max}(t) - T_0}{e}$, d'où $e^{-\frac{l^2}{16 \cdot D \cdot t + 4l_0^2}} = e^{-1} \Leftrightarrow l(t)^2 = 16 \cdot D \cdot t + 4l_0^2$, soit :

$$l(t) = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot D \cdot t + l_0^2}$$

3.16) Etude d'une cave enterrée

On modélise la terre entre le sol et le plafond d'une cave enterrée par un milieu solide homogène de masse volumique μ , de conduction thermique κ et de capacité calorifique massique c .

Toutes les variables ne dépendent que du temps t et de z la profondeur.

1) Ré-écrire l'équation de diffusion thermique sous la forme : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. Que vaut D ? Application numérique dans le cas de la pierre calcaire : $\mu = 2320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c = 810 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ $\kappa = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On s'intéresse à des solutions de type : $T_\omega \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}$ où T_ω et ω sont des réels positifs.

2) Trouver la relation de dispersion, c'est à dire une équation du type : $\omega = f(k)$.

3) Montrer que $T(z, t) = T_\omega \cdot e^{-\frac{z}{\Delta z}} \cos[\omega \cdot (t - \Delta t)]$. On exprimera numériquement pour une épaisseur $z = 1,0 \text{ m}$ et une fluctuation diurne ($\omega = \frac{2 \cdot \pi}{24 \text{ h}}$) :

3.a) Δt ;

3.b) Δz ;

3.c) et $e^{-\frac{z}{\Delta z}}$. Conclusion.

1) Question de cours :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

avec $D = \frac{\kappa}{\mu \cdot c} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_\omega \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}) &= D \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} (T_\omega \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}) \Leftrightarrow \\ T_\omega \cdot j \omega \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)} &= D \cdot T_\omega \cdot (-j \cdot k)^2 \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)} \end{aligned}$$

soit :

$$\omega = j \cdot D \cdot k^2$$

3) Il faut résoudre cette équation de dispersion : $k^2 = -j \frac{\omega}{D}$

2 Il existe a priori deux racines :

$$k = \pm (e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

Or

$$(e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - j}{\sqrt{2}}$$

1 Ainsi, k est complexe, et a une partie réelle et une partie imaginaire :

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} (1 - j)$$

1 Remplaçons dans :

$$\text{Re} (T_\omega \cdot e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}) = \text{Re} (T_\omega \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z} \cdot e^{j(\omega \cdot t \pm \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z)})$$

2 Il existe donc deux solutions possibles :

$$\begin{cases} T_\omega \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z) \\ T_\omega \cdot e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot D}} \cdot z) \end{cases}$$

1 La première est amortie au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le sol (z augmentant); alors que la seconde augmente, tendant vers l'infini.

1 La seconde solution est donc absurde du point de vue physique si le milieu est infini.

NB : ce problème est strictement analogue à l'effet Kelvin (ou effet de peau) pour la conduction électrique en régime variable dans un conducteur ohmique.

1 Ainsi, la solution est :

$$T_\omega \cdot e^{-\frac{z}{\Delta z}} \cdot \cos(\omega \cdot (t - \Delta t(z)))$$

avec :

3.a)

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot D \cdot \omega}} \cdot z = 75 \cdot 10^3 \text{ s} = 21 \text{ h}$$

3.b)

$$\Delta z = \sqrt{\frac{2 \cdot D}{\omega}} = 18 \text{ cm}$$

3.c)

$$e^{-\frac{z}{\Delta z}} = 0,42\%$$

Conclusion : les fluctuations de température diurnes sont totalement amorties dans la cave.

4. Le rayonnement et l'effet de serre

4.17) Température de la Terre grâce au rayonnement solaire

1) Température du Soleil :

Sachant que le rayonnement solaire a son maximum d'intensité dans le jaune, à $\lambda_{\max} = 580\text{nm}$, quelle est sa température extérieure ?

2) Flux solaire :

Donner alors l'émittance totale du Soleil, M . Le rayon du Soleil étant $R_S = 6,96 \cdot 10^8\text{m}$, quel est le flux thermique total ϕ_{tot} rayonné par celui-ci ?

3) Flux sur Terre :

La lumière mettant 8 minutes pour parcourir la distance Terre-Soleil, en déduire le flux surfacique incident φ_0 sur Terre.

4) Température de la Terre :

En supposant que la Terre se comporte comme un corps noir, quelle devrait-être sa température T_T ?

1) Température du Soleil :

Loi de Wien : $\lambda_{\max} \cdot T_S \approx 3000\mu\text{m} \cdot \text{K}$, sa température extérieure est :

$$T_S = 5,17 \cdot 10^3 \text{K}$$

(à peu près 5000°C)

2) Flux solaire :

L'émittance totale d'un corps noir est donnée par la loi de Stephan Boltzmann : $M = \sigma \cdot T_S^4$ avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, soit $M = 4,5 \cdot 10^7 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Le flux thermique total rayonné par le Soleil est :

$$\phi_{tot} = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot M \Rightarrow \phi_{tot} = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 = 2,74 \cdot 10^{26} \text{W}$$

3) Flux sur Terre :

Soit une sphère de centre, le centre du Soleil, et de rayon 8 minutes lumière ($d = 1,4 \cdot 10^{11}\text{m}$), la distance Soleil-Terre, creusée d'une autre sphère concentrique, de rayon R_S .

$$4\pi \cdot R_S^2 \cdot M = 4\pi d^2 \cdot \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 M,$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 = 1,1 \cdot 10^3 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

4) Température de la Terre :

La Terre présente au rayonnement solaire un disque de rayon R_T (son rayon).

Elle absorbe (pas d'atmosphère) :

$$\phi_{abs}(Terre) = \varphi_0 \cdot \pi \cdot R_T^2 = \left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \cdot \pi \cdot R_T^2$$

elle émet (c'est une sphère) :

$$\phi_{emis}(Terre) = M_T \cdot 4\pi \cdot R_T^2$$

où $M_T = \sigma \cdot T_T^4$.

$$\left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \cdot \pi \cdot R_T^2 = \sigma \cdot T_T^4 \cdot 4\pi \cdot R_T^2 \Rightarrow$$

$$T_T = \sqrt{\frac{R_S}{2d}} T_S = 2,7 \cdot 10^2 \text{K}$$

soit autour de 0°C , au lieu de 12°C .

On s'attendait à un peu plus (en fait, il y a l'effet de serre).

4.18) Effet de serre

1) Modélisation sans l'effet de serre :

Imaginons de la terre (à la température T_1) qui émet φ_1 (principalement dans l'infrarouge). Elle est éclairée par le soleil (elle reçoit un flux surfacique incident φ_0 , principalement dans le visible). La terre absorbe tout ce flux.

Faire un bilan de rayonnement. En déduire une relation entre T_1 et φ_0 .

2) Modèle simple de l'effet de serre :

Imaginons une serre, composée de deux systèmes : de la terre (à la température T_2) couverte par une vitre V en verre (à la température T_V). Ces deux objets sont à des températures telles qu'ils émettent (respectivement φ_2 et φ_V) principalement dans l'infrarouge.

La vitre est éclairée par le soleil (elle reçoit un flux surfacique incident φ_0 , principalement dans le visible). Le verre absorbe une partie a du rayonnement solaire (principalement dans l'UV : on ne bronze pas derrière une vitre!), en réfléchit une faible partie r , et en transmet la plus grande partie : $t = 1 - a - r$. La terre absorbe tout ce qui est transmis et émis par la vitre. La vitre absorbe tout le rayonnement infrarouge émis par la terre : elle est opaque à ces longueurs d'onde.

En supposant que ces deux corps suivent les lois du corps noir, déterminer la température d'équilibre T_2 de la terre, en fonction de T_1 , a et t .

3) Applications numériques :

3.a) La température moyenne de la terre est de 12°C (285K). Pour une vraie serre : $a \approx 10\%$, $r \approx 8\%$ et $t \approx 82\%$. La serre permet-elle d'élever sensiblement la température de la terre ?

3.b) On supposera que l'atmosphère ($a \approx 19\%$, $r \approx 30\%$ et $t \approx 51\%$) joue le rôle de la vitre dans l'exemple précédent, principalement grâce aux gaz à effet de serre (CO_2 , CH_4 , etc.). Quelle serait la température de la Terre sans l'atmosphère ?

1) Sans vitre :

Système : terre. Elle absorbe $\varphi_{abs}(terre) = \varphi_0$ et émet $\varphi_{emis}(terre) = \varphi_1 = \sigma.T_1^4$.

L'équilibre thermique impose :

$$\varphi_0 = \sigma.T_1^4$$

2) Modèle simple de l'effet de serre :

Système : vitre. Elle absorbe $\varphi_{abs}(vitre) = a.\varphi_0 + \varphi_2$ et émet $\varphi_{emis}(vitre) = \varphi_V = \sigma.T_V^4$

Système : terre. Elle absorbe $\varphi_{abs}(terre) = t.\varphi_0 + \frac{\varphi_V}{2}$ car la moitié du rayonnement émis par la vitre l'est vers la terre (et l'autre vers le ciel) et émet $\varphi_{emis}(terre) = \varphi_2 = \sigma.T_2^4$.

Il y a deux équilibres :

$$\begin{cases} a.\varphi_0 + \sigma.T_2^4 = \sigma.T_V^4 \\ t.\varphi_0 + \frac{\sigma.T_V^4}{2} = \sigma.T_2^4 \end{cases}$$

En éliminant la température de la vitre, on trouve :

$$2.t.\varphi_0 + a.\varphi_0 + \sigma.T_2^4 = 2.\sigma.T_2^4 \Rightarrow (2.t + a).\sigma.T_1^4 = \sigma.T_2^4$$

soit :

$$T_2 = (2.t + a)^{\frac{1}{4}} . T_1$$

3) Applications numériques**3.a) Vraie serre :**

$$T_1 = 285\text{K} \Rightarrow T_2 = 326\text{K} = 53^\circ\text{C}$$

3.b) Terre : avec l'atmosphère, $T_2 = 285\text{K}$. Sans l'atmosphère, la température de la terre serait :

$$T_1 = 272\text{K} = -1^\circ\text{C}$$

5. Techniques mathématiques - Calcul de l'opérateur divergence**5.19) Calcul d'une divergence en coordonnées cartésiennes**

1) Donner l'expression de $\text{div} \vec{A}$ pour $\vec{A}(x, y, z) = \frac{2x}{y} \vec{u}_x - \frac{x^2}{y^2} \vec{u}_y + \vec{u}_z$.

1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{2x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

d'où $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}$.

5.20) Calcul d'une divergence en coordonnées cylindriques

1) Donner l'expression de $\operatorname{div} \vec{A}$ pour $\vec{A}(r, \theta, z) = -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$.

1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{-4 \cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) = -\frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r A_z) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0$$

d'où $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{-4 \cos \theta}{r^3} - \frac{\cos \theta}{r^3} \right) = -\frac{5 \cos \theta}{r^4}$.

5.21) Calcul d'une divergence en coordonnées sphériques

1) Donner l'expression de $\operatorname{div} \vec{A}$ pour $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^3} \vec{u}_\theta + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta r^3} \vec{u}_\varphi$.

1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r} \right) = +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin^2 \theta \sin \varphi}{r^2} \right) = -2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} A_\varphi \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{r^2 \tan \theta} \right) = -\frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta}$$

d'où

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(+\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} \right) - \frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta} = \frac{1}{r^4 \sin \theta} \left(2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \sin \varphi \tan \theta \right)$$

5.22) Calcul d'une autre divergence en coordonnées sphériques

1) Donner l'expression de $\operatorname{div} \vec{A}$ pour $\vec{A} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$.

1) On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(+\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \right) = -\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(+\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) = +2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} A_\varphi \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(-\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) = 0$$

5.23) Calcul d'un flux de vecteur à partir de sa divergence

1) On donne $\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, \varphi) = 3$. Calculer $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2 \vec{\Sigma}$ pour une sphère de rayon R de centre O , l'origine du repère.

1) On utilise la formule d'Ostrgradsky :

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2 \vec{\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) d^3 \tau$$

On prendra comme volume V , la sphère de rayon R de centre O , l'origine du repère. Aussi,

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d^2 \vec{\Sigma} = \iiint_V 3 d^3 \tau = 4 \pi R^3$$

6. Techniques mathématiques - Calcul de l'opérateur laplacien scalaire**6.24) Calcul d'un laplacien en coordonnées cartésiennes**

1) Donner l'expression de Δf pour $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$.

1) On calcule les dérivées partielles de $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

d'où $\Delta f = \frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}$.

6.25) Calcul d'un laplacien en coordonnées cylindriques

1) Donner l'expression de Δf pour $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$.

1) On calcule les dérivées partielles de $f(r, \theta, z) = \frac{\cos \theta}{r^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{-4 \cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = -\frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0$$

d'où $\Delta f = \frac{1}{r} \left(\frac{-4 \cos \theta}{r^3} - \frac{\cos \theta}{r^3} \right) = -\frac{5 \cos \theta}{r^4}$.

6.26) Calcul d'un laplacien en coordonnées sphériques1) Donner l'expression de Δf pour $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$.1) On calcule les dérivées partielles de $f(r, \theta, \varphi) = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta \sin \varphi}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r} \right) = +\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin^2 \theta \sin \varphi}{r^2} \right) = -2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{r^2 \tan \theta} \right) = -\frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta}$$

d'où

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(+\frac{2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta \sin \varphi}{r^2} \right) - \frac{\sin \varphi}{r^2 \tan \theta} = \frac{1}{r^4 \sin \theta} \left(2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \right)$$

6.27) Calcul d'un autre laplacien en coordonnées sphériques1) Donner l'expression de Δf pour $f(r, \theta, \varphi) = \frac{-\cos \theta}{r^2}$.1) On calcule les dérivées partielles de $f(r, \theta, \varphi) = \frac{-\cos \theta}{r^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = +\frac{2 \cos \theta}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(+\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \right) = -\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = +\frac{\sin \theta}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(+\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) = +2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = 0$$

d'où

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(-\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \right) = 0$$

Travaux dirigés

vendredi 22 septembre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

Le projet "icedream"

Extraits de la page web disponible à l'adresse "www.3ds.com/fr/icedream/"
firme Dassault

Remorquer un iceberg pour avoir de l'eau douce

Le projet icedream est l'idée de l'ingénieur français Georges Mougin qui développe et affine son concept révolutionnaire depuis plus de 40 ans : remorquer des icebergs et les exploiter pour produire de l'eau douce!

Les fondamentaux du projet pilote sont donc les suivants : un iceberg d'environ 10 millions de tonnes, un remorqueur qui met 140 jours à relier Terre-Neuve et les Iles Canaries.

Données :

Puissance thermique P_{th} échangée par un système à la température T en contact sur une surface S avec un fluide à la température T_{fluide} dans le modèle conducto-convectif de Newton :

$$P_{th} = h (T_{fluide} - T) S$$

avec

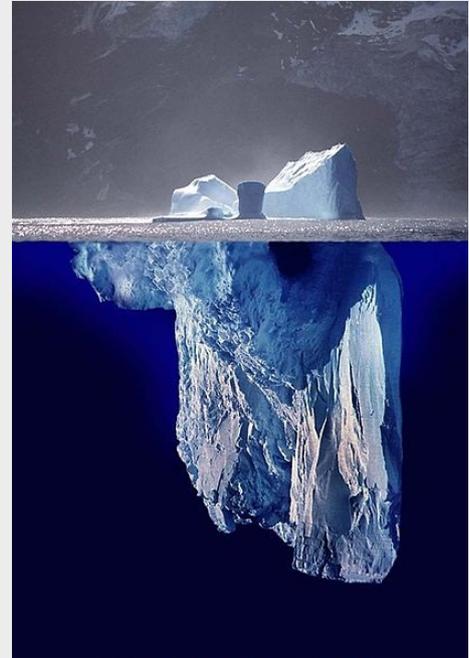
— le coefficient de transfert thermique de l'air :

$$h \approx 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

— le coefficient de transfert thermique de l'eau :

$$h \approx 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Enthalpie de fusion de la glace : $L_{fus} = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$



photomontage (Uwe Kils).

Enoncé

1) Estimer la proportion de l'iceberg qui fond par jour.

Correction

On peut, par exemple, prendre un iceberg sphérique de rayon R tel que

$$\mu \frac{4}{3} \pi R^3 = m = 10^{10} \text{ kg}$$

avec $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (la majeure partie est immergée), soit $R \approx \left(\frac{3 \times 10^{10}}{4\pi \times 10^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 134 \text{ m}$.

On considère que les échanges thermiques se font avec l'eau de mer à $T \approx 10^\circ\text{C} = 283 \text{ K}$ car h est beaucoup plus important avec l'eau.

La surface d'échange est donc :

$$S \approx 4\pi R^2$$

En supposant que cette surface d'échange ne change pas (alors que le glaçon fond...) un bilan énergétique donne :

$$\Delta m L_{fus} = h (T_{fluide} - T) S \Delta t$$

soit

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3 h (T_{fluide} - T) 4\pi R^2 \Delta t}{4\mu\pi R^3 L_{fus}} = \frac{3 h (T_{fluide} - T) \Delta t}{\mu R L_{fus}} = \frac{3 \times 10^2 \times 10 \times 86400}{10^3 \times 134 \times 333 \times 10^3} = 0,5\%$$

Lors du trajet de 140 jours, une bonne partie de l'iceberg aura donc disparu, mais on peut espérer en conserver : on peut estimer grossièrement la quantité restant à $(1 - 5 \times 10^{-3})^{140} \approx 50\%$.

Devoir non surveillé

vendredi 22 septembre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

Ni chaud ni froid

Etienne Guyon

Matière et matériaux - Belin.

Face à une température extérieure variable, notre organisme est capable, dans certaines limites, de réguler la température du corps autour de 37 °C. Le port de vêtements adaptés facilite cette régulation, mais quelle matière choisir et pourquoi ? Voyons les mécanismes en jeu lors du transfert de chaleur.

Chaud ou froid ? C'est subjectif !

Notre sensation de chaud ou de froid est relative, comme le montre une expérience simple : placez simultanément la main droite dans de l'eau chaude, et l'autre dans de l'eau froide. Après quelques minutes, plongez vos deux mains dans un même récipient d'eau tiède. Pendant quelques secondes, vous sentirez du froid au niveau de la main droite et du chaud dans l'autre. L'explication tient dans l'existence de thermorécepteurs sensibles au froid localisés dans l'épiderme, et d'autres sensibles au chaud, situés dans le derme. Ils répondent à des variations soudaines de température en modifiant brutalement, et pendant un bref laps de temps, la fréquence des signaux électriques envoyés au cerveau. Si la sensibilité initiale atteint le centième de degré, leur activité diminue par la suite avec le temps et notre corps s'en accommode tant qu'il ne s'agit pas d'une température extrême (au-delà de 45 °C, des récepteurs sensibles à la douleur sont stimulés ; au-dessous de 10 °C, le froid anesthésie les thermorécepteurs).

La régulation de la température dépend d'un thermostat interne situé dans l'hypothalamus, à la base du cerveau. Trop chaud ? Des mécanismes de perte de chaleur se déclenchent : accélération du rythme cardiaque et de la respiration, dilatation des vaisseaux sanguins proches de la peau (pour évacuer la chaleur produite dans les parties profondes du corps) et production de sueur (ce qui conduit à diminuer la température par évaporation). Trop froid ? Des mécanismes libérant de la chaleur ou limitant son transfert sont activés, en premier lieu des contractions musculaires, volontaires (faire un peu d'exercice) ou non (frissonner). Par ces mouvements, le corps dégage au mieux une puissance mécanique de 1000W, convertie à 80% en chaleur. Quant au frisson thermique, il dissipe une puissance inférieure à 400W. Pour comparaison, un homme adulte au repos peut dissiper une centaine de watts, convertis en chaleur par convection. Un autre phénomène se met en place lorsque l'on a froid : il s'agit d'un ralentissement du débit sanguin vers la périphérie, permettant de conserver de la chaleur dans les parties centrales et vitales du corps.

Quel que soit le mécanisme mobilisé, une couche isolante de graisse et de poils confère une meilleure tolérance au froid. Cette caractéristique est cependant limitée chez les humains, qui doivent porter des vêtements pour maintenir leur température cutanée relativement constante, autour de 30 °C, quand la température extérieure en est éloignée.

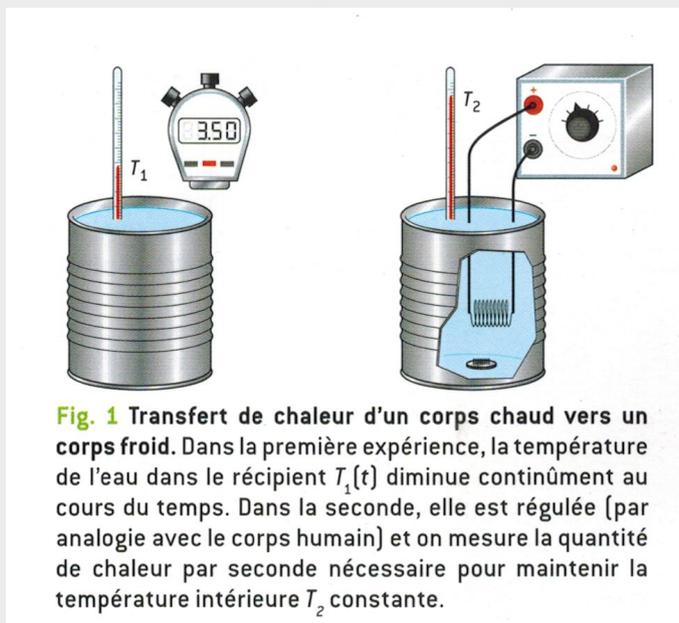


Fig. 1 Transfert de chaleur d'un corps chaud vers un corps froid. Dans la première expérience, la température de l'eau dans le récipient $T_1(t)$ diminue continûment au cours du temps. Dans la seconde, elle est régulée (par analogie avec le corps humain) et on mesure la quantité de chaleur par seconde nécessaire pour maintenir la température intérieure T_2 constante.

Chaleur et matériaux, quels paramètres en jeu ?

Venons-en aux matériaux qui conduisent la chaleur en commençant là encore par une expérience corporelle. En posant la main sur une plaque de bois à la température ambiante nous avons une sensation de chaud, alors que nous sentirons du froid si nous la posons sur une plaque de marbre à la même température. De nouveau, il s'agit d'une sensation très temporaire; mais un nouveau facteur intervient, qui dépend lui de la nature du matériau. De la chaleur passe de notre main vers le solide et ce d'autant plus vite qu'une certaine caractéristique du solide, sa diffusivité thermique, est élevée. Elle est plus grande pour du marbre ou un métal, qui sont plus compacts que le bois. Cette propriété est différente du paramètre conductivité thermique, qui lui est relié mais qui s'applique lorsque la température ne varie pas dans le temps. Pour sentir la différence, mettons notre main dans un gant de laine.

Nous avons une sensation instantanée, qui est la même si ce gant est porté seul ou se trouve à l'intérieur d'une moufle. En revanche, si nous sortons par grand froid, au bout de quelques minutes notre main sera plus sensible au froid dans le premier cas que dans le second, car la chaleur diffusera moins rapidement en présence de la moufle.

Une expérience simple va nous permettre de comprendre plus précisément la différence entre les deux paramètres thermiques (Fig. 1). Plaçons un récipient cylindrique contenant de l'eau à une température initiale de 37°C , dans une pièce où la température de l'air est fixe (disons 20°C). Prenons par exemple une boîte de conserve métallique vide dont on aura enlevé le couvercle. La température de l'eau diminue au cours du temps tant qu'elle n'a pas atteint la température de la pièce : c'est le phénomène de diffusion thermique. La chaleur (forme d'énergie qui se mesure en joules) est transférée du corps chaud (le récipient) vers le corps froid (l'extérieur). A l'inverse, si nous maintenons avec un thermostat la température fixe, la quantité de chaleur qui passe du chaud au froid par unité de temps (une puissance) - qui est aussi celle qu'il faut fournir pour maintenir la température fixe - reste constante au cours du temps et permet de définir la conduction thermique de la boîte. Entourer la boîte d'une couche de tissus diminue la conduction thermique. On pourra mesurer cette caractéristique sur différents tissus de même épaisseur et comparer.

Pionniers de la thermique

En 1807, le physicien français Joseph Fourier (1768-1830) soumet à l'Académie des sciences un mémoire sur la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides. Il y exprime la relation de proportionnalité liant le flux de chaleur et la différence de température qui lui a donné naissance, le coefficient de proportionnalité étant la conduction thermique. Ce texte sera très contesté par Pierre-Simon Laplace, rapporteur de l'article, alors qu'il avait pourtant été son maître à l'École normale supérieure. Il faudra attendre 1822 pour que les résultats de Fourier, devenu entre-temps préfet de Grenoble, soient publiés en un imposant volume, la *Théorie analytique de la chaleur*. Ces travaux auront alors un impact considérable dans de nombreux domaines : les développements mathématiques liés à la diffusion, les travaux de Laplace sur les probabilités et, plus d'un demi-siècle plus tard, le mouvement brownien avec Albert Einstein. De nos jours, ces modèles inspirent des problèmes aussi variés que la conduction électrique dans les solides, l'osmose ou même les fluctuations boursières. L'utilisation des fonctions trigonométriques, qui n'avait pas plu à Laplace dans ce premier article, est à l'origine des innombrables références à Fourier : il s'agit en effet du nom le plus cité de toute la littérature scientifique. Celui de James Prescott Joule (1818-1889) reste également lié à la notion de chaleur. Ce physicien anglais, qui doit ses notions de thermique à son père brasseur, établit en 1840 la correspondance entre différentes formes d'énergies : on se réchauffe les mains (gain d'énergie thermique) en les frottant l'une contre l'autre (consommation d'énergie mécanique).



Fig. 2 Portrait du physicien Joseph Fourier. En 1822, ce savant français a publié un ouvrage au retentissement considérable en physique et en mathématiques, la *Théorie analytique de la chaleur*. Son premier article dans le domaine, la *Théorie de propagation de la chaleur dans les solides*, avait été rejeté lors de sa présentation à l'Académie des sciences en 1807.

Quels matériaux pour tenir chaud ?

Bien couverts, il est temps de parler chiffons - excusez - vêtements. Chemise de soie ou doudoune? Tous les vêtements ne sont pas équivalents du point de vue thermique : c'est d'abord une question de matériaux! Classons des échantillons de textiles (laine, lin, coton, etc.) selon l'impression plus ou moins chaude qu'ils procurent lorsqu'on les touche (Fig. 3). Les échantillons sont tous placés dans le même environnement et se trouvent donc à température ambiante. Quantifions l'expérience en évaluant la conductivité thermique (et non la diffusivité qui lui est proportionnelle). On détermine le flux thermique Q dans chaque cas : il s'agit de la quantité d'énergie qui passe à travers une surface donnée (ici le tissu) par unité de temps en régime permanent. Contrairement à l'idée qu'ont souvent les jeunes enfants, la laine ne produit pas de chaleur mais c'est un matériau qui aide à tenir chaud. Elle conduit moins la chaleur que bien d'autres matériaux. Naturellement, ce résultat dépend de l'épaisseur du tissu : pour avoir plus chaud, il suffit... de superposer plusieurs couches!

Quel rôle donner à l'air ?

Lorsque l'air est en mouvement, la convection thermique de la chaleur est beaucoup plus efficace pour transporter de l'énergie que la simple conduction thermique. Ce phénomène ne joue pas en notre faveur en hiver : il n'est pas suffisant d'avoir un bon manteau, encore faut-il bien le fermer en sortant, surtout s'il faut traverser la Seine en empruntant le pont des Arts par exemple! Le moindre coup de vent (fripon) se traduit alors par une importante déperdition de chaleur. Pourtant, l'air est un excellent isolant thermique lorsqu'il est au repos! Pensez au double vitrage : le film d'air coincé entre les deux vitres isole efficacement. Un vêtement étanche, même s'il n'est pas serré, empêche toute circulation de l'air avec l'extérieur. Dans nos vêtements chauds, la présence d'air au repos est très utile. Ce dernier est piégé entre des poils, des plumes ou des petites fibres, comme dans une doudoune, une couette bien gonflée ou nos gros pulls en laine, ou encore comme dans le pelage conséquent des mammifères affrontant des températures extrêmes. L'air est ainsi un paramètre déterminant de l'isolation thermique.

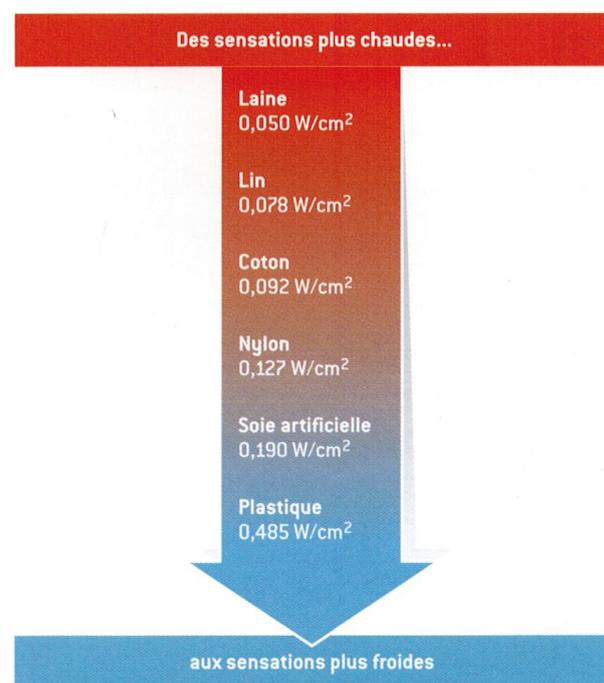


Fig. 3 Plus le flux thermique à travers un tissu, exprimé en watts (des joules/s) par unité de surface, est élevé, plus la sensation de froid est forte. Tous les textiles avaient la même épaisseur et étaient soumis à la même différence de température.

Enoncé

1) Equation de diffusion de la chaleur :

On s'intéresse à un milieu solide homogène de conduction thermique κ , de capacité calorifique massique c . La variable t est le temps.

1.a) Montrer que la température dans ce milieu suit une équation de diffusion, du type : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \Delta T$. On donnera la diffusivité D .

1.b) Réécrire l'équation dans le cas où tout se passe suivant une dimension (Oz).

2) Modélisation des expériences du document.

On s'intéresse à deux cylindres (1 en $x \in [-L_1, 0]$ et 2 en $x \in [0, +L_2]$), de longueurs respectives L_1 et L_2 , de même section S , de masses volumiques respectives μ_1 et μ_2 , de capacités calorifiques massiques respectives c_1 et c_2 , de conductivités thermiques respectives κ_1 et κ_2 .

2.a) Donner l'expression de la température en régime permanent dans les cas suivants :

- Les extrémités des deux cylindres sont en contact avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2 .

- L'extrémité du cylindre 1 est en contact avec un thermostat de température T_1 et l'extrémité du cylindre 2 est atherme.
- Les extrémités des deux cylindres sont athermes.

2.b) Expliquer pourquoi certains échantillons de textile ou certaines matières semblent plus chaud que d'autres au toucher.

Correction

1) Equation de diffusion de la chaleur :

1.a)

/1 Soit un système S hors équilibre, indéformable, compris dans un volume V , délimité par la surface fermée Σ .

/1 L'énergie interne varie de dU pendant dt , avec :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot d^3\tau = \iiint_V \mu \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot d^3\tau$$

(où u est l'énergie interne massique; c , la capacité calorifique massique; et μ , la masse volumique du milieu).

/1 Il n'y a pas de travail et les seuls échanges thermiques se font par conduction à travers Σ , donc :

$$\frac{dU}{dt} = \phi_{th} = - \oint \vec{j}_{th} \cdot d^2\Sigma = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_{th}) \cdot d^3\tau$$

/1 Au niveau local, le bilan d'énergie s'écrit donc : $\mu \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{th})$.

/1 La loi de Fourier donne :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) = -\kappa \cdot \text{div}(\vec{\text{grad}}(T)) = -\kappa \cdot \nabla^2 T = -\kappa \cdot \Delta T$$

/1 comme la conductivité thermique κ est homogène.

/1 D'où l'équation de diffusion thermique : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \Delta T$ avec $D = \frac{\kappa}{\mu \cdot c}$.

1.b)

/1 A une dimension (Oz), on trouve :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

2) Modélisation des expériences du document.

2.a) Lois de température

On est en régime permanent, donc la température est affine dans les deux cylindres :

$$\begin{cases} T(x \in [-L_1; 0]) = a_1 \cdot x + b_1 \\ T(x \in [0; +L_2]) = a_2 \cdot x + b_2 \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver 4 équations données par les conditions aux limites, pour déterminer les 4 inconnues (a_1 , a_2 , b_1 et b_2).

Dans les trois questions, les cylindres sont en contact en $x = 0$, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} T(0^-) = T_2(0^+) \\ \kappa_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^-} = \kappa_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0^+} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ \kappa_1 \cdot a_1 = \kappa_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Si les extrémités des deux cylindres sont en contact avec des thermostats de températures respectives T_1 et T_2 :

$$\left. \begin{array}{l} T(-L_1) = T_1 \\ T(+L_2) = T_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -L_1 \cdot a_1 + b_1 = T_1 \\ +L_2 \cdot a_2 + b_2 = T_2 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{\kappa_2(T_1 - T_2)}{L_2\kappa_1 + \kappa_2 L_1} \\ a_2 = -\frac{\kappa_1(T_1 - T_2)}{L_2\kappa_1 + \kappa_2 L_1} \\ b_1 = \frac{\kappa_2 L_1 T_2 + T_1 L_2 \kappa_1}{L_2\kappa_1 + \kappa_2 L_1} \\ b_2 = \frac{\kappa_2 L_1 T_2 + T_1 L_2 \kappa_1}{L_2\kappa_1 + \kappa_2 L_1} \end{cases}$$

et la température vaut :

$$\begin{cases} T(x \in [-L_1; 0]) = \frac{-\kappa_2(T_1 - T_2) \cdot x + (\kappa_2 \cdot L_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot L_2 \cdot \kappa_1)}{L_2 \cdot \kappa_1 + \kappa_2 \cdot L_1} \\ T(x \in [0; +L_2]) = \frac{-\kappa_1 \cdot (T_1 - T_2) \cdot x + (\kappa_2 \cdot L_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot L_2 \cdot \kappa_1)}{L_2 \cdot \kappa_1 + \kappa_2 \cdot L_1} \end{cases}$$

Si l'extrémité du cylindre 1 est en contact avec un thermostat de température T_1 et l'extrémité du cylindre 2 est atherme :

$$\left. \begin{array}{l} T(-L_1) = T_1 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{L_2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -L_1 \cdot a_1 + b_1 = T_1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ b_1 = T_1 \\ b_2 = T_1 \end{cases}$$

et la température vaut :

$$T(x \in [-L_1; +L_2]) = T_1$$

Si les extrémités des deux cylindres sont athermes :

$$\left. \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{-L_1} = 0 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{L_2} = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ b_1 = T_0 \\ b_2 = T_0 \end{cases}$$

où T_0 est une température qui sera fixée par les conditions initiales :

$$\begin{cases} T(x \in [-L_1; 0[, t = 0) = T_{1_i} \\ T(x \in [0; +L_2[, t = 0) = T_{2_i} \end{cases}$$

Comme le système $1 \cup 2$ est isolé :

$$dH_1 + dH_2 = 0 \Rightarrow L_1 \cdot \mu_1 \cdot c_1 (T_0 - T_{1_i}) + L_2 \cdot \mu_2 \cdot c_2 (T_0 - T_{2_i}) = 0$$

ainsi, la température vaut :

$$T(x \in [-L_1; +L_2]) = T_0 = \frac{L_1 \cdot \mu_1 \cdot c_1 \cdot T_{1_i} + L_2 \cdot \mu_2 \cdot c_2 \cdot T_{2_i}}{L_1 \cdot \mu_1 \cdot c_1 + L_2 \cdot \mu_2 \cdot c_2}$$

2.b) On voit que, dans le premier cas, la température au contact est imposée par le cylindre qui présente la conductivité thermique la plus grande. Pour certains matériaux (laine, bois...), c'est la main qui impose sa température; pour d'autres matériaux (marbre...), c'est l'objet qui impose sa température (qui semble plus froide alors).