

# Cinématique des fluides

## Notes de cours

mardi 17 octobre 2017

### I- Descriptions d'un fluide

#### 1. Passage de la description lagrangienne à la description eulérienne

##### Description lagrangienne *s'y retrouver*

la description utilisée en mécanique du point ou en mécanique du solide est la description lagrangienne. Il s'agit en mécanique des fluides de "suivre" au cours du temps une particule de fluide. En particulier, on peut s'intéresser à la vitesse  $\vec{V}$  de cette particule de fluide.

##### Description eulérienne *s'y retrouver*

on utilisera en mécanique des fluides la description eulérienne, qui consiste à connaître les champs (scalaires ou vectoriels) définis en chaque point  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  et à chaque instant  $t$ . Ainsi, on parlera de la vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t)$  qui coïncide, à l'instant  $t$  avec la vitesse  $\vec{V}$  de la particule de fluide qui se trouve à  $t$  en  $x, y, z$ .

##### Passage de la vision eulérienne à la vision lagrangienne *s'y retrouver*

soit  $g(x, y, z, t)$ , une grandeur intensive scalaire (ou vectorielle  $\vec{g}(x, y, z, t)$ ), définie en chaque point et à chaque instant.

On va suivre la particule de fluide qui se trouve initialement (à  $t$ ) en  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ . A un instant ultérieur  $t + dt$ , la particule de fluide se trouvera en  $\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \vec{V}.dt = \vec{r} + \vec{v}(x, y, z, t).dt$ .  $g$  aura, en suivant la particule de fluide, varié de  $g(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - g(\vec{r}, t)$ .

##### Dérivée particulière *définition*

On appellera "dérivée particulière" de  $g$  (et on notera  $\frac{Dg}{Dt}$ ) la grandeur :

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{g(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - g(\vec{r}, t)}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) g$$

##### Exemple de dérivée particulière : celle de la masse volumique *s'y retrouver*

on peut appliquer ces relations pour déterminer la dérivée particulière de la masse volumique  $\mu$  :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\mu)$$

### 1 Accélération d'une particule de fluide *théorème*

on peut exprimer l'accélération d'une particule de fluide :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v}$$

Le calcul de  $\overrightarrow{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v} - \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$  donne  $\Rightarrow$

L'accélération de la particule de fluide est :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

## 2. Visualisation des écoulements

### Trajectoire d'une particule de fluide *s'y retrouver*

pour visualiser le comportement cinématique d'un fluide (son écoulement), on peut par exemple tracer les trajectoires de quelques particules de fluide. Cela revient à se placer dans une vision lagrangienne.

Ces trajectoires dépendent *a priori* du choix de la particule de fluide, c'est à dire de ses conditions initiales  $X(t=0), Y(t=0), Z(t=0)$ .

### Ligne de courant *définition*

on définit une ligne de courant comme une ligne de champ de  $\vec{v}$ , c'est à dire la courbe passant par un point  $M_0$  qui a en chacun de ses points  $\vec{v}(t)$  comme tangente,  $t$  étant fixé. Cette courbe est orientée dans le sens de  $\vec{v}$ .

### Utilisation des lignes de courant *s'y retrouver*

On peut se faire une idée de l'écoulement en traçant un ensemble de lignes de courant. Il faut pour cela se donner un ensemble de points  $M_0$ .

### remarque

une ligne de courant peut varier dans le temps, et peut différer d'une trajectoire, même pour une particule de fluide initialement en  $M_0$ . C'est le cas en particulier avec la houle.

### Tube de courant *définition*

un tube de courant est un tube de champ de  $\vec{v}$ , c'est à dire la surface formée par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée  $C_0$  donnée.

### Ligne d'émission *s'y retrouver*

la représentation techniquement possible d'un écoulement est donnée par un ensemble de lignes d'émission. On fait par exemple couler des filets d'huile de lin dans de l'huile de vaseline.

Cette représentation visuelle est un ensemble *a priori* variable de trajectoires : on parle alors de lignes d'émission fluctuantes... Les choses se simplifient dans le cas d'un écoulement stationnaire ( $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ ), puisque les lignes d'émission sont alors non fluctuantes, et les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

|

### 3. Propriétés des écoulements



#### Condition aux limites sur la vitesse d'un fluide à l'infini à retenir

si l'on se place suffisamment loin (devant la taille caractéristique du problème), la vitesse est souvent connue. Elle peut être par exemple nulle (fluide immobile) ou bien encore avoir champ de vitesse homogène :

$$\vec{v}_\infty = v_0 \cdot \vec{u}_x$$



#### Condition aux limites sur la vitesse d'un fluide sur un obstacle ou sur une paroi à retenir

dans le référentiel où un obstacle est fixe, il ne peut y avoir de composante normale du fluide sur la paroi (si c'était le cas, le fluide entrerait ou sortirait de l'obstacle...)

Dans le cas où l'obstacle est fixe dans le référentiel d'étude :

$$\vec{v}_\perp(P, t) = \vec{0} \quad \forall t \text{ et } \forall P \in \text{surface de l'obstacle}$$

Si au contraire l'obstacle est en mouvement (notons sa vitesse  $\vec{w}$ ) dans le référentiel d'étude,

$$\vec{v}_\perp(P, t) = \vec{w}_\perp(P, t) \quad \forall t \text{ et } \forall P \in \text{surface de l'obstacle}$$



#### Lignes de courant au voisinage d'un solide schéma

La figure 1 représente un exemple de ligne de courant au voisinage d'un solide cylindrique. Au contact d'une paroi solide, la vitesse du fluide est nulle (on parle dans ce cas de "point d'arrêt") ou bien tangente à l'obstacle. L'obstacle est donc matérialisé par une ou plusieurs lignes de courant.

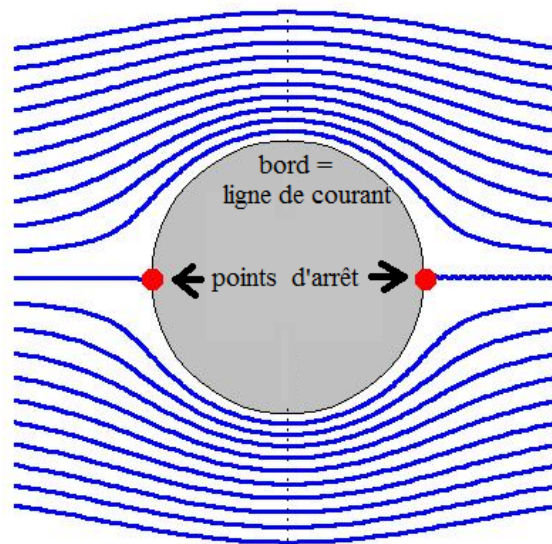


FIGURE 1 – Lignes de courant au voisinage d'un solide

**Ecoulements permanents ou stationnaires** *définition*

on parle d'écoulement permanent (ou stationnaire) lorsque les champs eulériens ne dépendent pas explicitement du temps  $t$ , et en particulier la vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

*remarque*

cela ne veut pas dire que, du point de vue lagrangien, les grandeurs sont invariables. En effet, la particule de fluide se déplaçant,

$$\frac{D}{Dt} \neq 0$$

sa vitesse en particulier peut varier...

Le caractère stationnaire dépend du référentiel.

**Ecoulements plans** *définition*

on dira qu'un écoulement est plan (dans le plan  $xOy$ ) si on a à la fois :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v}(x, y, t) \\ v_z(x, y, t) = 0 \quad \forall (x, y, t) \end{cases}$$

**II- Divergence du champ de vitesse****1. Divergence de la vitesse et débit volumique****2 Bilan massique local** *théorème*

habituellement, si l'on suit un système fermé, c'est à dire un ensemble de particules de fluide, la masse se conserve :

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial \mu}{\partial t} d^3\tau + \iint_{\Sigma} \mu \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} = 0$$

Notons que l'on peut avoir dans certains cas  $\frac{DM}{Dt} > 0$  (on parle dans ce cas de "source") ou bien  $\frac{DM}{Dt} < 0$  (on parle alors de "puits").

La relation d'Ostrogradsky nous permet de transformer le débit massique :  $\iint_{\Sigma} \mu \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\mu \vec{v}) d^3\tau$ .  
Aussi, le bilan intégral devient :

$$\frac{DM}{Dt} = \iiint_V \left[ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) \right] d^3\tau = 0$$

Comme la précédente relation est valable quel que soit le volume  $V$ , on trouve

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

En transformant le terme final  $\text{div}(\mu \vec{v}) = \mu \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mu)$ , on peut faire apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique dans le bilan local :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \text{div}(\vec{v}) = 0$$

⇒

La masse volumique  $\mu$  suit, dans un écoulement de vitesse  $\vec{v}$  :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{D\mu}{Dt} + \mu \text{div}(\vec{v}) = 0$$

## 2. Utilisation de la divergence de la vitesse



**Définition de la divergence grâce à la formule d'Ostrogradsky** *s'y retrouver*

On se souvient que la divergence est définie par la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) d^3\tau$$

pour un volume  $V$  délimité par une surface fermée  $\Sigma$ .



**Application de la formule d'Ostrogradsky** *schéma*

La figure 2 représente une surface fermée qui délimite un volume.

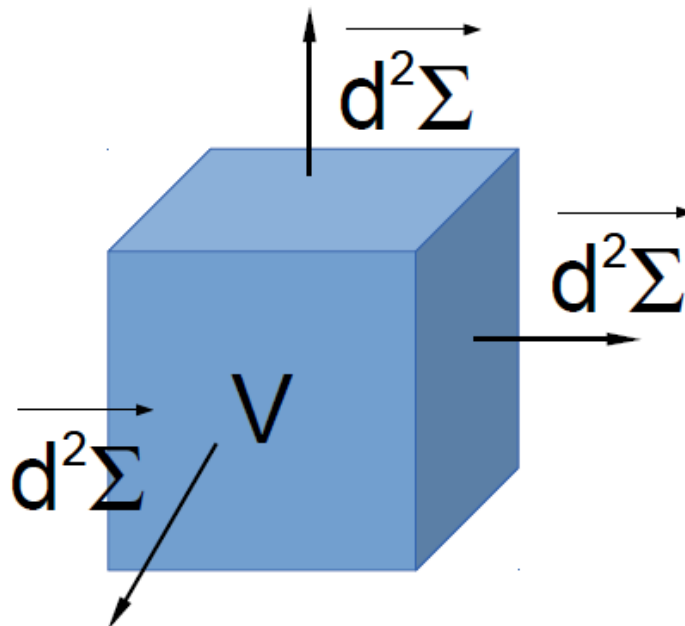


FIGURE 2 – Application de la formule d'Ostrogradsky



**3 Divergence du champ des vitesses dans le cas d'un solide** *exercice*

Montrer que  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  dans le cas d'un solide.

repreons le cas d'un solide. On peut maintenant calculer la divergence de sa vitesse.



**4 Variation du volume d'une particule de fluide et divergence de la vitesse** *théorème*

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$$

Or d'après le bilan massique local :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

donc  $\Rightarrow$

Le volume  $V$  d'une particule de fluide suit

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \operatorname{div}(\vec{v})$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'écoulement.



### Interprétation de la divergence de la vitesse *s'y retrouver*

- si  $\operatorname{div}(\vec{v}) > 0$ , le volume  $V$  augmente, il s'agit d'une détente ;
- si  $\operatorname{div}(\vec{v}) < 0$ , le volume  $V$  diminue, il s'agit d'une compression.



*remarque*

On peut avoir  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  (sauf en certains endroits de l'espace où la vitesse n'est pas définie), alors même que  $\oint \vec{v} \cdot d^2\Sigma \neq 0$ .



### 5 Divergence de l'écoulement d'un liquide *exercice*

Montrer qu'on a toujours  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  dans le cas de l'écoulement d'un liquide.

Comme le liquide est incompressible,  $\mu = \text{cste}$ , donc l'équation locale de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \cdot \vec{v}) = 0 + \mu \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

donc  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ .



### Evolution des particules de fluide lors d'une détente dans un gaz *animation*

Lors d'une détente d'un gaz dans une tuyère, les particules de fluide se dilatent.  
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).



### 6 Divergence de l'écoulement d'un gaz dans une tuyère *exercice*

On s'intéresse à une détente d'un gaz dans une tuyère de champ de vitesses :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \vec{u}_x$$

Calculer  $\operatorname{div}(\vec{v})$  pour ce champ de vitesse.

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{v_0}{a}$$



*remarque*

On peut avoir  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  (écoulement incompressible), alors même que le fluide est compressible (gaz).  
C'est le cas si la vitesse d'écoulement est faible devant la célérité du son.

**Evolution des particules de fluide lors d'un écoulement dans un dièdre droit**  
*animation*

Il y a déformation des particules de fluide lors de l'écoulement dans un dièdre droit.  
Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**Déformation des particules de fluide** *s'y retrouver*

les particules de fluide peuvent conserver un volume constant le long de leur trajectoire, alors même qu'elles se déforment.

**3. Ecoulements incompressibles****Ecoulements incompressibles** *définition*

on définit un écoulement incompressible par le fait que le volume, donc la masse volumique ( $\mu$ ) de chacune des particules de fluide sont conservés au cours de l'écoulement :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

partout dans le fluide.

*remarque*

Le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel.

**7 Débit volumique dans le cas d'un écoulement incompressible** *théorème*

En intégrant la précédente relation, on trouve d'après la formule d'Ostrogradsky :  $\iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) = \oiint \vec{v} \cdot d^2\vec{\Sigma} = 0$ .  $\Rightarrow$

La vitesse est à flux conservatif, le long d'un tube de courant : le débit volumique se conserve.

Donc plus les lignes de courant d'un écoulement incompressible sont resserrées, plus la vitesse est importante (en norme).

**Application de la formule d'Ostrogradsky avec un tube de courant** *schéma*

La figure 3 représente un tube de courant fermé par deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  orientées dans le même sens.

*remarque*

S'il semble assez naturel de considérer que pour les liquides, incompressibles,  $\mu = cste \Rightarrow \frac{D\mu}{Dt} = 0$ , tout écoulement est incompressible, certains écoulements de gaz (compressibles) peuvent être considérés comme incompressibles...

$$\left. \begin{array}{l} \text{fluide incompressible} \\ \text{(liquide : } \mu = cste \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{écoulement incompressible} \\ \frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

**III- Rotationnel du champ de vitesse****1. Utilisation du rotationnel de la vitesse**

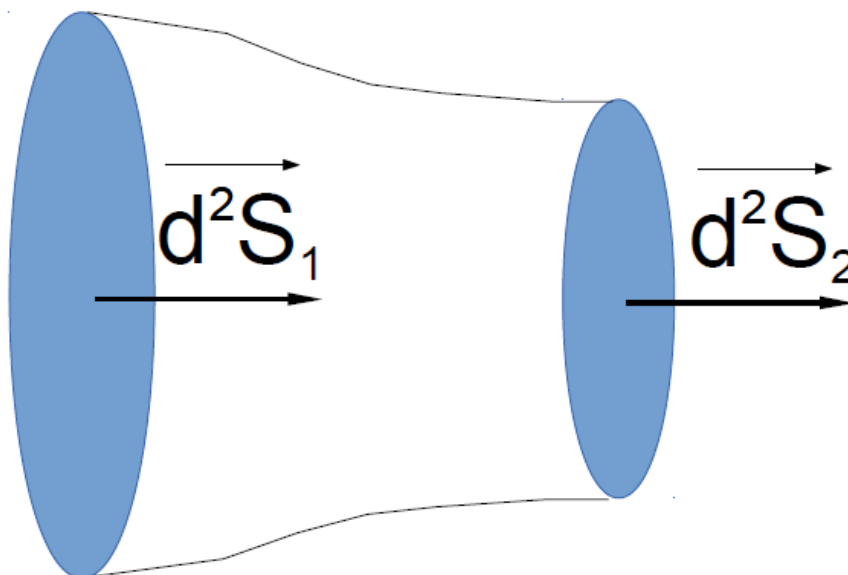


FIGURE 3 – Application de la formule d’Ostrogradsky avec un tube de courant

**✳ Définition du rotationnel grâce à la formule de Stokes** *s’y retrouver*

On se souvient que le rotationnel est défini par la formule de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d^2\vec{S}$$

pour une surface  $S$  délimitée par un contour fermé  $\mathcal{C}$  (formule de Stokes).

**🔪 8 Rotationnel de la vitesse dans le cas d’un solide** *exercice*

Montrer que pour un solide

$$\text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$$

les vitesses de deux points  $A$  et  $B$  sont reliées par :  $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ . On peut calculer le rotationnel d’un tel champ vectoriel, et on trouve ce qui était demandé.

**👁 Interprétation du rotationnel de la vitesse** *schéma*

La figure 4 représente un écoulement avec deux zones, l’une où le rotationnel est non nul, l’autre où il est nul. Localement, le champ des vitesses d’un fluide peut être semblable à celui d’un solide de vecteur rotation instantanée  $\vec{\Omega}$ .

Ainsi,  $\text{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$  donnera une indication sur la façon dont tournent les particules de fluide.

**📎 Vecteur tourbillon** *définition*

On nommera  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{v})$  "vecteur tourbillon".

**✳ Interprétation du vecteur tourbillon** *s’y retrouver*

Notons que  $\vec{\Omega}$  est un pseudo-vecteur, et que sa divergence, comme celle de tout rotationnel, est nulle. Il y a rotation du fluide (on parlera de "tourbillon") s’il existe un point de l’espace - au moins - où



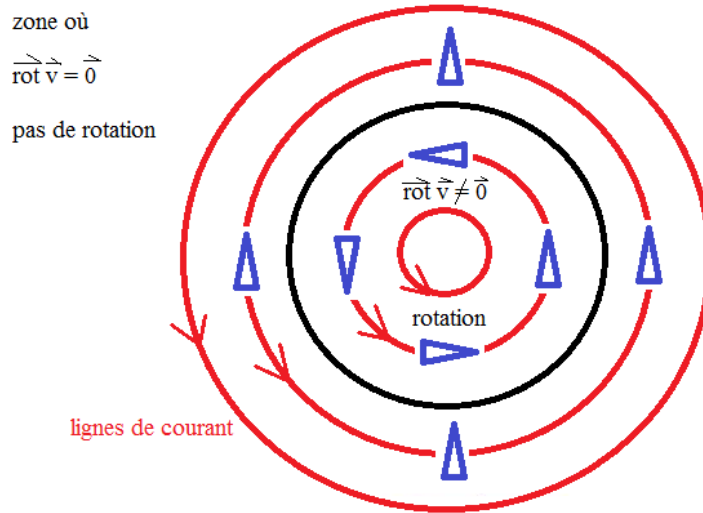


FIGURE 4 – Interprétation du rotationnel de la vitesse

•  $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$ .

**remarque**

On peut avoir  $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$  (sauf en certains endroits de l'espace où la vitesse n'est pas définie), alors même que  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ .

**remarque**

On peut avoir  $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$  partout avec des lignes de courant incurvées.

**Evolution des particules de fluide lors d'une tornade *animation***

Il y a rotation des particules de fluide à l'intérieur d'une tornade.  
 Vous pouvez retrouver une animation explicative sur le site [alain.lerille.free.fr](http://alain.lerille.free.fr).

**2. Ecoulements irrotationnels**

**Rotationnel d'un gradient *s'y retrouver***

$$\vec{rot}(\text{grad}(f)) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Le rotationnel d'un gradient est nul.

**Ecoulements potentiels ou irrotationnels ou non tourbillonnaires *définition***

un écoulement est irrotationnel (ou non tourbillonnaire) si, partout dans le fluide,

$$\vec{rot}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega} = \vec{0}$$

Le rotationnel de la vitesse étant nulle, on peut faire dériver celle-ci, *via* un gradient, d'un potentiel

$\phi :$ 

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

### Lignes de courant et surfaces iso-potentielles *s'y retrouver*

Les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces iso-potentielles ( $\phi = \text{cste}$ ).

Le champ des vitesses est donc à circulation conservative : les lignes de courant ne peuvent être fermées.

### Divergence d'un rotationnel *s'y retrouver*

$\text{div}(\text{rot}(\vec{A})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$  La divergence d'un rotationnel est nulle.

## 3. Ecoulements potentiels incompressibles

### 9 Ecoulements potentiels incompressibles *théorème*

on vient de voir qu'un écoulement irrotationnel (ou non tourbillonnaire) est potentiel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

où  $\phi$  est le potentiel des vitesses. Si on considère de plus que l'écoulement est incompressible,

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \Delta\phi = 0$$

donc  $\Rightarrow$

pour un écoulement irrotationnel incompressible, le potentiel  $\phi$  obéit à l'équation de Laplace :  $\Delta\phi = 0$ .

### Ecoulements potentiels, permanents, incompressibles et plans *s'y retrouver*

les écoulements permanents, plans, potentiels et incompressibles permettent de décrire efficacement un grand nombre d'écoulements réels. On pourra les caractériser par :

- le champ de vitesse  $\vec{v}$ ;
- le potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$ ;

On peut montrer que

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases}$$

La vitesse se déduit donc aisément du potentiel des vitesses  $\phi$ .

D'autre part, on a déjà vu que :  $\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0$  ( $\phi$  obéit à l'équation de Laplace).

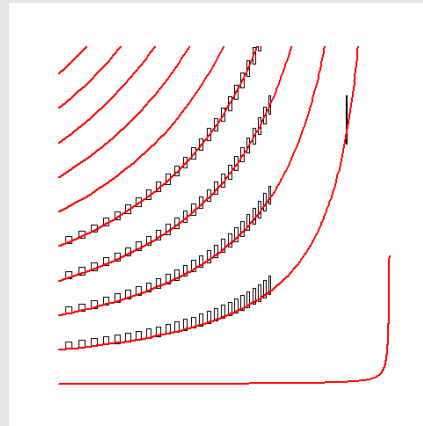
## 1) Modélisation de l'écoulement d'un fluide contre une paroi en dièdre droit

exercice

L'écoulement d'un fluide entre deux solides formant un angle droit (un "dièdre droit") a pour champ des vitesses, défini dans la région  $x < 0$  et  $y > 0$  :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Ci-contre sont représentées (en trait rouge) quelques lignes de courant, ainsi que l'évolution de particules de fluides (formes noires).



- 1) Déterminer l'équation des lignes de courant. Les conditions aux limites sont-elles bien vérifiées ?
- 2) Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement :
  - 2.a) incompressible ?
  - 2.b) irrotationnel ?
- 3) Si oui, déterminer le potentiel des vitesses.

### Correction :

- 1) On détermine les lignes de courant par  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ , qui donne :

$$x.y = cte$$

(il s'agit d'hyperboles). Les conditions aux limites sont bien vérifiées car  $x = 0$  et  $y = 0$  sont des lignes de courant : ce sont des bords solides.

- 2) Ecoulement :

- 2.a) incompressible car

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

(les particules de fluide gardent le même volume).

- 2.b) non tourbillonnaire ou irrotationnel car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

(les bords des particules de fluide restent bien parallèles à eux même : la particule ne tourne pas).

- 3) Comme  $\vec{\Omega}$  est nul, il existe un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \text{grad}(\phi)$ . Le potentiel des vitesses est

$$\phi = -\frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} + cste$$

### Eléments de correction :

Les lignes de courant sont des hyperboles.  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ,  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ . Le potentiel des vitesses est  $\phi = -\frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} + cste$ .

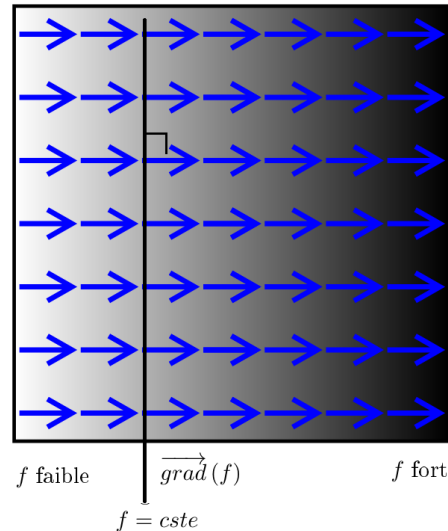
# Les techniques mathématiques à connaître

## Interprétation des opérateurs d'analyse vectorielle

### Gradient

le gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  de  $f$   
va vers les  $f$  croissants.

le gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  de  $f$   
est orthogonal aux surfaces iso- $f$ .



### Rotationnel

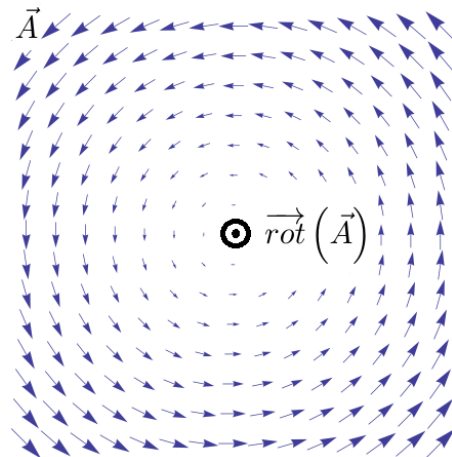
Les lignes de champ de  $\vec{A}$   
"tournent" autour de leur rotationnel  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$   
(dans le sens trigonométrique si  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$  vient vers nous,  
et dans le sens horaire si  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$  est dans l'autre sens).

Si  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ ,

les lignes de champ de  $\vec{A}$  sont fermées.

Si  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$ ,  $\exists f$  tel que  $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$

et les lignes de champ de  $\vec{A}$  sont ouvertes.



### Divergence

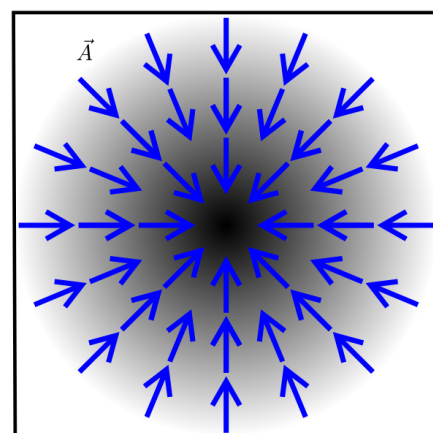
les lignes de champ de  $\vec{A}$   
divergent si  $\text{div}(\vec{A}) > 0$ ,

convergent si  $\text{div}(\vec{A}) < 0$ .

Si  $\text{div}(\vec{A}) = 0$ ,

le long d'un tube de champ d'un vecteur  $\vec{A}$ ,  
le flux de  $\vec{A}$  se conserve :

$$\iint_S \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \text{cste} \quad \forall S.$$



$$\text{div}(\vec{A}) < 0$$

# Technique à maîtriser

jeudi 19 octobre 2017

## I- Les capacités exigibles

### 1. Dérivée particulaire



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique.

Associer  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Connaître et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ . Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de  $\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right)$  et  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$ .

### 2. Divergence de la vitesse



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Utiliser l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique pour caractériser un écoulement incompressible. Savoir que le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel.

Utiliser  $\text{div} \vec{v} = 0$  pour un écoulement incompressible.

### 3. Rotationnel de la vitesse



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

Illustrer sur des exemples simples la signification qualitative du vecteur tourbillon.

Utiliser  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  pour un écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses.

Savoir que le caractère irrotationnel dépend du référentiel.

### 4. Pour aller plus loin



**ce qu'il faut savoir faire** *capacités*

La recherche de lignes de courants est traitée exclusivement à l'aide de logiciels d'intégration numérique.

Toute extension du programme vers les cours spécialisés doit être évitée : par exemple l'approche lagrangienne, la fonction de courant.

## II- Méthodes

### 1. Dérivée particulaire

### A) Calculs de dérivées particulières *méthode*

En eulérien :  $\frac{Dg}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \cdot g$ .

## 2. Divergence de la vitesse

### B) Divergence *méthode*

La divergence peut être calculée grâce son expression dans le repère adapté :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3} \left( \frac{\partial(\mu_2 \cdot \mu_3 \cdot v_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_3 \cdot \mu_1 \cdot v_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot v_3)}{\partial s_3} \right)$$

ou bien avec la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = \iiint \text{div}(\vec{v}) \cdot d^3\tau$$

## 3. Rotationnel de la vitesse

### C) Rotationnel *méthode*

Le rotationnel peut être calculé grâce son expression dans le repère adapté :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_2 \cdot \mu_3} \left[ \frac{\partial(\mu_3 \cdot v_3)}{\partial s_2} - \frac{\partial(\mu_2 \cdot v_2)}{\partial s_3} \right] \\ \frac{1}{\mu_3 \cdot \mu_1} \left[ \frac{\partial(\mu_1 \cdot v_1)}{\partial s_3} - \frac{\partial(\mu_3 \cdot v_3)}{\partial s_1} \right] \\ \frac{1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \left[ \frac{\partial(\mu_2 \cdot v_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 \cdot v_1)}{\partial s_2} \right] \end{pmatrix}$$

ou bien grâce au théorème de Stokes :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \cdot d^2\vec{S}$$

### D) Potentiel *méthode*

On détermine le potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$  grâce à l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \\ \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s_3} \end{pmatrix}$$

ou bien grâce à la circulation

$$\int_a^b \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \cdot d\vec{\ell} = \phi(b) - \phi(a)$$

On peut créer un écoulement par superposition d'écoulements : on somme les potentiels. Le gradient donne la vitesse et les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équi-potentiels.

## 4. Pour aller plus loin

### E) Détermination de lignes de courant *méthode*

On détermine l'équation d'une ligne de courant en écrivant le parallélisme entre la vitesse  $\vec{v}$  et le déplacement élémentaire  $\vec{d\ell}$  le long de cette ligne :  $\vec{v} \wedge \vec{d\ell} = \vec{0}$  ou bien  $\vec{d\ell} = k.\vec{v}$ .

### F) Détermination de trajectoires et de ligne d'émission *méthode*

On détermine une trajectoire d'une particule de fluide en écrivant les équations différentielles reliant la position de cette particule  $((X(t), Y(t), Z(t)))$  à la vitesse  $\vec{v}$  :

$$\frac{dX(t)}{dt} = v_x(X(t), Y(t), Z(t), t)$$

etc... Une ligne d'émission n'est rien d'autre qu'une trajectoire particulière (définie par des conditions initiales).

## III- Exercices

### 1. Dérivée particulière

#### 1.1) Accélération dans un dièdre droit

Soit un écoulement bidimensionnel dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x < 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

- 1) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.
  - 1.a) en passant par le formalisme lagrangien ;
  - 1.b) en passant par le formalisme eulérien.

- 1) On trouve pour l'accélération :

- 1.a) en passant par le formalisme lagrangien :

On trouve d'abord la position de la particule :  $X = X_0.e^{-k.t}$  et  $Y = Y_0.e^{k.t}$ . Ensuite, on dérive deux fois pour trouver :  $a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = k^2.X$  et  $a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = k^2.Y$ , soit :

$$\vec{a} = k^2.\vec{r}$$

- 1.b) en passant par le formalisme eulérien :

$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - k.x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k.y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = -k.x.(-k).\vec{u}_x + k.y.k.\vec{u}_y \text{ soit :}$$

$$\vec{a} = k^2.\vec{r}$$

#### 1.2) Accélération au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

- 1) Calculer l'accélération des particules de fluide :
  - 1.a) en passant par le formalisme lagrangien ;
  - 1.b) en passant par le formalisme eulérien.

1) L'accélération est déterminée

**1.a)** en passant par le formalisme lagrangien :

On dérive deux fois les positions pour trouver :  $a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = k^2 \cdot X$  et  $a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = k^2 \cdot Y$ , soit :

$$\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$$

**1.b)** en passant par le formalisme eulérien :

$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( k \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = k \cdot x \cdot (k) \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot k \cdot \vec{u}_y$  soit :

$$\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$$

### 1.3) Détermination d'un champ de vitesses et d'accélération

Soit un écoulement bidimensionnel défini en formalisme lagrangien par :

$$\begin{cases} X = X_0 \cdot (1 + b \cdot t) \\ Y = Y_0 \end{cases}$$

1) Déterminer :

**1.a)** la vitesse d'une particule de fluide en formalisme lagrangien ;

**1.b)** le champ de vitesse en formalisme eulérien.

2) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide :

**2.a)** en passant par le formalisme lagrangien ;

**2.b)** en passant par le formalisme eulérien.

1) On trouve pour la vitesse :

**1.a)** en passant par le formalisme lagrangien :

On dérive une fois pour trouver :  $v_x = \frac{dX}{dt} = X_0 \cdot b$  et  $v_y = 0$ , soit :

$$\vec{v} = X_0 \cdot b \cdot \vec{u}_x = \frac{X(t) \cdot b}{1 + b \cdot t} \cdot \vec{u}_x$$

**1.b)** dans le formalisme eulérien :

$$\vec{v} = \frac{x \cdot b}{1 + b \cdot t} \cdot \vec{u}_x$$

2) On trouve pour l'accélération :

**2.a)** en passant par le formalisme lagrangien :

On dérive deux fois pour trouver :  $a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = 0$  et  $a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = 0$ , soit :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

**2.b)** en passant par le formalisme eulérien :

$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x \cdot b}{1 + b \cdot t} \right) \cdot \vec{u}_x + \frac{x \cdot b}{1 + b \cdot t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x \cdot b}{1 + b \cdot t} \right) \cdot \vec{u}_x = -\frac{x \cdot b^2}{(1 + b \cdot t)^2} \cdot \vec{u}_x + \frac{x \cdot b^2}{(1 + b \cdot t)^2} \cdot \vec{u}_x$  soit :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

### 1.4) Accélération entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , tournant autour de leur axe commun ( $Oz$ ) aux vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left( A \cdot r + \frac{B}{r} \right) \cdot \vec{u}_\theta$$

1) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.



1) L'accélération d'une particule de fluide est donnée par :  $\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \vec{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ .

$$\text{Or } \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \left( A.r + \frac{B}{r} \right)^2 \right).$$

Et d'autre part,  $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = 2.A.\vec{u}_z$ . Donc, on trouve :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = - \left( A^2.r + \frac{B^2}{r^3} + \frac{2.A.B}{r} \right) .\vec{u}_r = - \frac{\left( A.r + \frac{B}{r} \right)^2}{r} .\vec{u}_r$$

qui est l'accélération d'une particule de fluide en rotation uniforme!

## 2. Divergence de la vitesse

### 2.5) Divergence de l'écoulement d'un gaz dans une tuyère

On s'intéresse à une détente d'un gaz dans une tuyère de champ de vitesses :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \left( 1 + \frac{x}{a} \right) .\vec{u}_x$$

Calculer  $\text{div}(\vec{v})$  pour ce champ de vitesse.

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{v_0}{a}.$$

### 2.6) Divergence d'un vortex

On s'intéresse à un vortex :  $\vec{v} = \frac{C}{2.\pi.r} \vec{u}_\theta$  pour tout  $r$  (c'est le cas limite de la tornade pour  $a \rightarrow 0$  et  $C = 2.\pi.a^2.\Omega$  non nul.)

Calculer la divergence de la vitesse.

$$\text{div}(\vec{v}) = c0.$$

### 2.7) Divergence d'un écoulement dans un dièdre droit

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible?

L'écoulement est incompressible, car

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

### 2.8) Divergence d'un écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , tournant autour de leur axe commun ( $Oz$ ) aux vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left( A.r + \frac{B}{r} \right) .\vec{u}_\theta$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible?

L'écoulement est incompressible, car

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

**2.9) Divergence d'un écoulement au dessus d'un plan oscillant**

L'écoulement entre un plan oscillant ( $y = 0$ ) et l'infini ( $y \rightarrow +\infty$ ) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = A.e^{-k.y} . \cos(\omega.t - k.y) . \vec{u}_x$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

- 1) L'écoulement est incompressible, car

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

**2.10) Divergence d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle**

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement incompressible ?

- L'écoulement est compressible, car

$$\text{div}(\vec{v}) = 2.k$$

**3. Rotationnel de la vitesse****3.11) Rotationnel d'une tornade**

On s'intéresse à une tornade :

$$\begin{cases} \vec{v} = r.\Omega.\vec{u}_\theta & \text{pour } r < a \\ \vec{v} = \frac{\Omega.a^2}{r}.\vec{u}_\theta & \text{pour } r > a \end{cases}$$

- 1) Calculer le rotationnel de la vitesse.
- 2) Calculer la circulation de  $\vec{v}$  le long d'un cercle  $C$  d'axe  $Oz$  de rayon  $r$  orienté dans le sens trigonométrique.

- 1) Si  $r < a$ ,  $\vec{\Omega} = \Omega.\vec{u}_z$ , mais si  $r > a$ ,  $\vec{\Omega} = \vec{0}$ .

- 2) Si  $r < a$ ,  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi.r^2.\Omega$  et si  $r > a$ ,  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi.a^2.\Omega$ .

**3.12) Rotationnel d'un vortex**

On s'intéresse à un vortex :  $\vec{v} = \frac{C}{2\pi.r}.\vec{u}_\theta$  pour tout  $r$  (c'est le cas limite de la tornade pour  $a \rightarrow 0$  et  $C = 2\pi.a^2.\Omega$  non nul.)

- 1) Calculer le rotationnel de la vitesse.
- 2) Calculer la circulation de  $\vec{v}$  le long d'un cercle  $C$  d'axe  $Oz$  de rayon  $r$  orienté dans le sens trigonométrique.

- 1) Partout, sauf en  $r = 0$  (où la vitesse n'est ps définie),  $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ .

- 2) Alors même que  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = C \neq 0$ .

**3.13) Rotationnel d'un écoulement dans un dièdre droit**

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est non tourbillonnaire ou irrotationnel car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Comme  $\vec{\Omega}$  est nul, il existe un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \vec{\text{grad}}(\phi)$ .

### 3.14) Rotationnel d'un écoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , tournant autour de leur axe commun ( $Oz$ ) aux vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \left( A.r + \frac{B}{r} \right) \cdot \vec{u}_\theta$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est tourbillonnaire, de vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = A \cdot \vec{u}_z$$

Comme  $\vec{\Omega}$  est non nul, il n'existe pas de potentiel des vitesses.

### 3.15) Rotationnel d'un écoulement au dessus d'un plan oscillant

L'écoulement entre un plan oscillant ( $y = 0$ ) et l'infini ( $y \rightarrow +\infty$ ) est donné par le champ eulérien des vitesses suivant :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = A \cdot e^{-k \cdot y} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot y) \cdot \vec{u}_x$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est tourbillonnaire, de vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{2} k \cdot A \cdot e^{-k \cdot y} \cdot (\cos(\omega \cdot t - k \cdot y) - \sin(\omega \cdot t - k \cdot y)) \cdot \vec{u}_z$$

Comme  $\vec{\Omega}$  est non nul, il n'existe pas de potentiel des vitesses.

### 3.16) Rotationnel d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k \cdot x \cdot \vec{u}_x + k \cdot y \cdot \vec{u}_y$$

Ce champ des vitesses correspond-il à un écoulement avec tourbillons ? Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

L'écoulement est non tourbillonnaire ou irrotationnel car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Comme  $\vec{\Omega}$  est nul, il existe un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\vec{v} = \vec{\text{grad}}(\phi)$ .

### 3.17) Potentiel des vitesses de l'écoulement d'un gaz dans une tuyère

On s'intéresse à une détente d'un gaz dans une tuyère de champ de vitesses :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \cdot \vec{u}_x$$

Déterminer le potentiel des vitesses.

$$\phi = v_0 \cdot \left(x + \frac{x^2}{2a}\right) + cste.$$

### 3.18) Potentiel des vitesses d'un écoulement dans un dièdre droit

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer le potentiel des vitesses.

$$\phi = -\frac{k x^2}{2} + \frac{k y^2}{2} + cste$$

### 3.19) Potentiel des vitesses d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer le potentiel des vitesses.

$$\phi = \frac{k}{2} \cdot (x^2 + y^2) + cste$$

### 3.20) Dipôle hydraulique

On s'intéresse à un puits ponctuel de débit  $D_v$  situé en  $P(-\frac{a}{2}, 0, 0)$  et une source de débit opposé  $-D_v$  située en  $S(+\frac{a}{2}, 0, 0)$ . et on se place en  $M$ , loin du puits et de la source (approximation dipolaire :  $OM \gg PS = a$ ).

1) Trouver dans ces conditions une approximation de  $PM$  et  $SM$ .

2) L'écoulement est non tourbillonnaire :  $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ . Déterminer le potentiel en superposant le potentiel d'une source et celui d'un puits :  $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{SM}{PM}\right)$ . On l'exprimera en fonction du moment dipolaire  $m = \frac{D_v}{2\pi} a$ .

3) Déterminer le champ de vitesse total en fonction de  $m$ .

$$1) PM \approx r \cdot \left(1 + \frac{a \cdot \cos \theta}{2 \cdot r}\right) \text{ et } SM \approx r \cdot \left(1 - \frac{a \cdot \cos \theta}{2 \cdot r}\right).$$

$$2) \text{ On trouve : } \phi(M) \approx -\frac{m \cdot \cos(\theta)}{r}.$$

$$3) \text{ Le champ de vitesse total est : } \vec{v} \approx \frac{m}{r^2} (\cos \theta \cdot \vec{u}_r + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta).$$

### 3.21) Une source proche d'un mur

Pour modéliser un écoulement dans le demi espace  $x < 0$ , au voisinage d'une source ponctuelle (en  $A(-a, 0, 0)$ ) proche d'un mur (le plan  $(yOz)$ ), il s'agit tout simplement de superposer deux sources ponctuelles de même débit volumique :

- la première, réelle, en  $A(-a, 0, 0)$ ,
- et la seconde, virtuelle, en  $A'(a, 0, 0)$ , symétrique de  $A$  par rapport au mur.

Déterminer le potentiel des vitesses en fonction de  $r_M$  et  $r'_M$  qui sont les distances du point  $M$  aux deux sources respectivement  $A$  et  $A'$  qui valent :

$$\begin{cases} r_M = \sqrt{(x_M + a)^2 + y_M^2} \\ r'_M = \sqrt{(x_M - a)^2 + y_M^2} \end{cases}$$

Le potentiel est  $\phi(M) = \frac{D_v}{2\pi} \ln\left(\frac{r_M \cdot r'_M}{r_0^2}\right)$  où  $r_0$  est une constante.

#### 4. Pour aller plus loin

##### 4.22) Lignes de courant d'un écoulement dans un dièdre droit

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer les lignes de courant.

On détermine les lignes de courant par  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ , qui donne :

$$x.y = cte$$

(il s'agit d'hyperboles).

##### 4.23) Lignes de courant d'une particule de fluide en chute libre

Soit un champ des vitesses, avec un axe ( $Oz$ ) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0.\vec{u}_x + (v_0 - g.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les lignes de courants.

Ce sont des courbes qui suivent  $\frac{dx}{u_0} = \frac{dz}{v_0 - g.t}$ , c'est à dire des droites de pente

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v_0 - g.t}{u_0}$$

(ces droites changent dans le temps : l'écoulement n'est pas permanent).

##### 4.24) Lignes de courant d'un écoulement plan au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer : les lignes de courant.

On détermine : les lignes de courant par  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ , qui donne :

$$x = cte.y$$

(il s'agit de droites passant par  $O$ , la source).

##### 4.25) Lignes de courant d'un écoulement dans un dièdre droit (2)

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y + a.\omega.\cos(\omega.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les lignes de courant.

On détermine les lignes de courant par  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ , qui donne :

$$\begin{cases} x.y = cte \\ z = \frac{a.\omega.\cos(\omega.t_0)}{k} \ln\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

à l'instant  $t_0$ .

**4.26) Lignes de courant d'un écoulement dans un évier**

On considère la superposition de deux champs : un puits en  $O$  et un vortex de centre  $O$ , de sorte que :

$$\vec{v} = \frac{-D_v}{2.\pi.r} \vec{u}_r + \frac{C}{2.\pi.r} \vec{u}_\theta \quad \forall r$$

Il s'agit d'un écoulement plan stationnaire dans un évier.  
Déterminer l'équation polaire des lignes de courant.

Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques qui suivent l'équation polaire  $r = r_0.e^{\frac{-D_v}{C}\theta}$ .

**4.27) Lignes de courant de la houle**

On peut modéliser la houle par un champ de vitesse uniforme qui dépend du temps :

$$\vec{v} = v_0.\vec{u}(t) \quad \text{avec} \quad \vec{u}(t) = \cos(\omega.t) \vec{u}_x + \sin(\omega.t) \vec{u}_y$$

Déterminer les lignes de courant, à l'instant  $t$ .

Les lignes de courant, à l'instant  $t$ , sont des droites parallèles à  $\vec{u}(t)$ .  
Les lignes de courant ne coïncident pas avec les trajectoires car l'écoulement n'est pas stationnaire.

**4.28) Trajectoires d'une particule de fluide dans un dièdre droit**

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer les trajectoires des particules de fluide.

On trouve d'abord la position de la particule :  $X = X_0.e^{-k.t}$  et  $Y = Y_0.e^{k.t}$ . On s'aperçoit que

$$X.Y = cte$$

(il s'agit d'hyperboles : les lignes de champ et les trajectoires sont identiques car l'écoulement est stationnaire).

**4.29) Trajectoires d'une particule de fluide en chute libre**

Soit un champ des vitesses, avec un axe ( $Oz$ ) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0.\vec{u}_x + (v_0 - g.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les trajectoires.

La trajectoire est donnée par  $\frac{dX}{dt} = u_0$  et  $\frac{dZ}{dt} = v_0 - g.t$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + u_0.t \\ Z(t) = Z_0 + v_0.t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

Les trajectoires sont des paraboles.

**4.30) Ligne d'émission d'une particule de fluide en chute libre**

Soit un champ des vitesses, avec un axe ( $Oz$ ) vertical et orienté vers le haut, défini par

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = u_0.\vec{u}_x + (v_0 - g.t).\vec{u}_z$$

Déterminer la ligne d'émission issue du point  $(0, 0)$ .

La trajectoire est donnée par  $\frac{dX}{dt} = u_0$  et  $\frac{dZ}{dt} = v_0 - g.t$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + u_0.t \\ Z(t) = Z_0 + v_0.t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

La ligne d'émission est la trajectoire suivie par la particule de fluide depuis le point  $(0, 0)$ , c'est à dire :

$$\begin{cases} X(t) = u_0.t \\ Z(t) = v_0.t - \frac{1}{2}g.t^2 \end{cases}$$

C'est une parabole. Cette ligne d'émission est non fluctuante : elle reste la même quelle que soit la date  $t$ .

#### 4.31) Trajectoires d'une particule de fluide au voisinage d'une source ponctuelle

Soit un écoulement dont le champ des vitesses est :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = +k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y$$

Déterminer les trajectoires des particules de fluide.

On détermine les trajectoires des particules de fluide : on trouve d'abord la position de la particule :  $X = X_0.e^{k.t}$  et  $Y = Y_0.e^{k.t}$ . On s'aperçoit que

$$X = \frac{X_0}{Y_0}Y$$

(il s'agit de droites passant par  $O$ , la source : les lignes de champ et les trajectoires sont identiques car l'écoulement est stationnaire).

#### 4.32) Trajectoires d'une particule de fluide dans un dièdre droit (2)

Soit un écoulement dans un dièdre droit dont le champ des vitesses, défini dans la région  $x > 0$  et  $y > 0$ , est

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = -k.x.\vec{u}_x + k.y.\vec{u}_y + a.\omega.\cos(\omega.t).\vec{u}_z$$

Déterminer les trajectoires des particules de fluide.

On trouve la position de la particule :  $X = X_0.e^{-k.t}$ ,  $Y = Y_0.e^{k.t}$  et  $Z = Z_0 + a.\sin(\omega.t)$  (les lignes de champ et les trajectoires ne sont pas identiques car l'écoulement n'est pas stationnaire).

#### 4.33) Trajectoires d'une particule de fluide dans le cas de la houle

On peut modéliser la houle par un champ de vitesse uniforme qui dépend du temps :

$$\vec{v} = v_0.\vec{u}(t) \text{ avec } \vec{u}(t) = \cos(\omega.t)\vec{u}_x + \sin(\omega.t)\vec{u}_y$$

Déterminer la trajectoire des particules de fluide.

Les trajectoires sont des cercles. Les lignes de courant ne coïncident pas avec les trajectoires car l'écoulement n'est pas stationnaire.

## 5. Techniques mathématiques - Interprétation des opérateurs d'analyse vectorielle

#### 5.34) Gradient de $f$ et surfaces iso- $f$

1) Montrer que les lignes de champ de  $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}f$  sont orthogonales aux surfaces équi- $f$ .

1) Soient  $M$  et  $M'$  infiniment proches dans une surface équi- $f$  :

$$f(M') = f(M) + df = f(M) \Rightarrow df = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$$

Comme c'est vrai  $\forall \overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{MM'}$ , aussi

$$\overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}f} \perp \overrightarrow{MM'}$$

(cqfd)

### 5.35) Lignes de champ d'un vecteur à rotationnel non nul

1) Montrer que si  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ , les lignes de champ de  $\vec{A}$  sont fermées, ouvertes sinon.

1) Si on avait  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$ , on pourrait écrire  $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}f}$  et les lignes de champ de  $\vec{A}$  iraient vers les potentiels  $f$  croissants, donc seraient ouvertes. Ici,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ , donc les lignes de champ de  $\vec{A}$  sont fermées.

### 5.36) Conservation du flux d'un vecteur à divergence nulle le long d'un tube de champ

1) Montrer que si  $\text{div}(\vec{A}) = 0$ , le long d'un tube de champ du vecteur  $\vec{A}$ , le flux de  $\vec{A}$  se conserve.

1) On se place le long d'un tube de champ de  $\vec{A}$  fermé par  $S_1$  et  $S_2$ , de surface latérale  $S_3$  et on applique la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau = 0 \Rightarrow - \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} + \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

Or

$$\iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

par construction du tube de champ de  $\vec{A}$ . Donc :

$$\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} = \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} \Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \text{cste} \forall S$$

### 5.37) Orientation d'un vecteur suivant le signe de sa divergence

1) Montrer que les lignes de champ de  $\vec{A}$  divergent si  $\text{div}(\vec{A}) > 0$ , et convergent si  $\text{div}(\vec{A}) < 0$ .

1) On applique la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d^3\tau$$

Si  $\text{div}(\vec{A}) > 0$ ,  $\vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} > 0$  donc le champ diverge,

et si  $\text{div}(\vec{A}) < 0$ ,  $\vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} < 0$  donc le champ converge.

### 5.38) Resserrement des lignes de champ d'un vecteur à divergence nulle et norme de ce vecteur

1) Montrer que si le vecteur  $\vec{A}$  est à divergence nulle, plus les lignes de champ de  $\vec{A}$  sont resserrées, plus  $\|\vec{A}\|$  est grande.



1) On se place le long d'un tube de champ de  $\vec{A}$  fermé par  $S_1$  et  $S_2$ , de surface latérale  $S_3$  et on applique la formule d'Ostrogradsky :

$$\oiint_{\sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) d^3\tau = 0 \Rightarrow - \iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} + \iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

Or

$$\iint_{S_3} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_3} = 0$$

par construction du tube de champ de  $\vec{A}$ . Donc :

$$\iint_{S_1} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} = \iint_{S_2} \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S_2} \Rightarrow \iint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{d^2S} = cste \quad \forall S$$

Si  $S_2 < S_1$  (c'est-à-dire si les lignes de champ se resserrent), alors, pour conserver le flux de  $\vec{A}$ , il faut que  $\|\vec{A}\|$  soit grande.

# Travaux dirigés

vendredi 20 octobre 2017

Cet exercice sera fait en demi-groupe lors de la séance de travaux dirigés.

## QUAND LES MATHS DONNENT DES AILES

par Quentin Agren

disponible à l'adresse <http://images.math.cnrs.fr/Quand-les-maths-donnent-des-ailes.html>

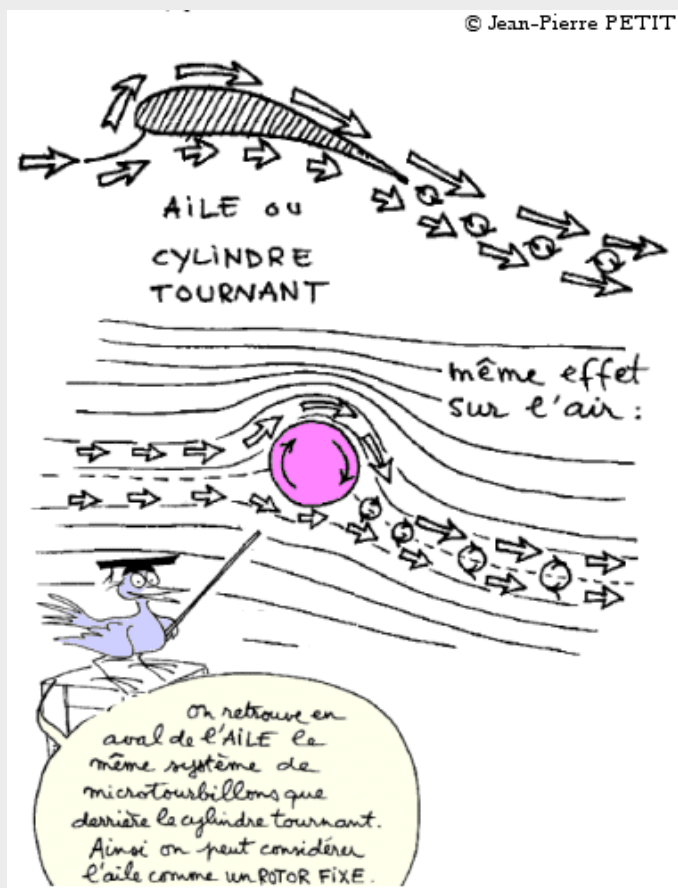
### modéliser une aile d'avion par un cylindre en rotation !

Parvenir à modéliser simplement l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion, voilà notre programme ! Une aile, un courant d'air sont des réalités complexes. Leurs représentations mathématiques, compromis entre l'idéalisation et la prise en compte de caractéristiques essentielles, seront les premières à nous occuper. Puis nous en viendrons à l'écoulement précis qui nous intéresse, celui ayant lieu autour de l'aile : comment le déterminer ? L'idée est la suivante : commencer par déterminer la forme d'un écoulement plus simple, celui autour d'un cylindre, puis déformer le cylindre en aile d'avion.

L'objet mathématique que l'on va utiliser pour modéliser l'écoulement s'appelle un champ de vecteurs. Choisissons un point, que l'on nommera P, dans la zone d'écoulement. Imaginons maintenant que l'on place au point P une petite girouette, munie d'un anémomètre. La girouette s'orientera naturellement dans le sens de l'écoulement d'air au point P, dont la vitesse sera indiquée par l'anémomètre. Nous allons résumer ces informations en attachant au point P une flèche, appelée vecteur vitesse, pointant dans le sens de l'écoulement (donné par l'orientation de la girouette) et dont la longueur sera proportionnelle à la vitesse de l'écoulement (donnée par l'anémomètre).

Bien sûr, pour des raisons de lisibilité, nous ne pouvons représenter qu'un nombre limité de vecteurs, mais il faut garder à l'esprit qu'à chaque

point du plan est accroché un vecteur, indiquant les caractéristiques essentielles de l'écoulement en ce lieu. C'est en plantant une flèche en chaque point de la région d'écoulement que l'on obtient un champ de vecteurs.



## Énoncé

### 1) Cylindre fixe

On s'intéresse à un écoulement plan autour d'un cylindre fixe centré en  $O$ , de rayon  $a$ . On superpose au champ de vitesse à l'infini exprimé en coordonnées cylindriques :  $\vec{v}_\infty = v_0 \cdot \vec{u}_x$ , un champ créé par un dipôle source-puits :  $\vec{v}_{\text{dipole}} = \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot (\cos \theta \cdot \vec{u}_r + \sin \theta \cdot \vec{u}_\theta)$ .

1.a) Vérifier que les conditions aux limites à l'infini sont satisfaites.

**1.b)** En choisissant la bonne valeur de  $p$  qui satisfait les conditions aux limites sur le cylindre, déterminer le champ de vitesse dans les coordonnées cylindriques.

**2)** Cylindre tournant

On va superposer au précédent champ de vitesse pour un cylindre fixe, un écoulement de type vortex :  $\vec{v}_{vortex} = \frac{C}{2\pi \cdot r} \vec{u}_\theta$ , de façon à prendre en compte la rotation du cylindre qui va avoir tendance à entraîner le fluide à son contact.

**2.a)** Exprimer  $C$  en fonction de la vitesse angulaire du cylindre  $\Omega$  et  $a$ .

**2.b)** Déterminer une condition sur  $\Omega$  pour qu'il existe des points d'arrêt sur le cylindre.

## Correction

1) Cylindre fixe.

1.a) Suffisamment loin du cylindre, le champ de vitesse est uniforme :

$$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x = v_\infty \text{ si } r \rightarrow \infty$$

1.b) D'autre part, le cylindre fixe impose les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_r = 0 \text{ si } r = a \text{ et } \forall \theta \in [0, 2\pi[$$

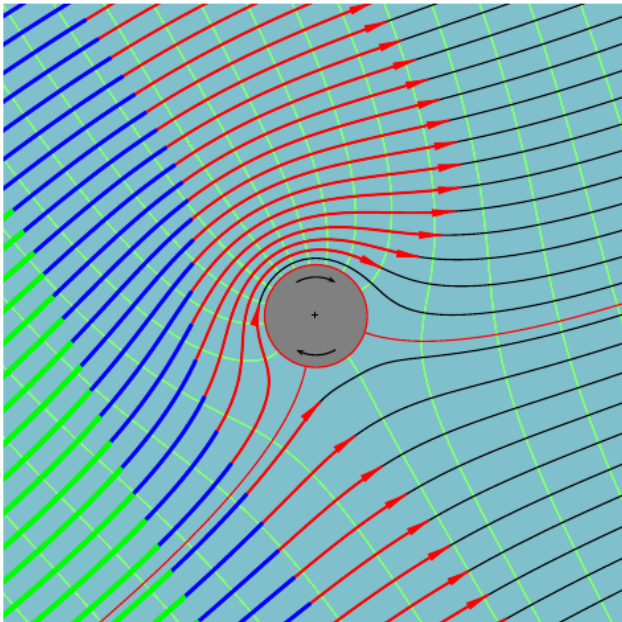
On trouve donc :

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{v}_{dipole} = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_r - v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_\theta$$

2) Cylindre tournant

2.a) De façon à prendre en compte la rotation du cylindre (dont la vitesse extérieure est  $\vec{v} = \Omega \cdot a \cdot \vec{u}_\theta$ ), il faut que  $\vec{v}_{vortex} = \frac{C}{2\pi \cdot a} \vec{u}_\theta = \Omega \cdot a \cdot \vec{u}_\theta$  donc  $C = 2\pi \cdot a^2 \cdot \Omega$ .

2.b) On cherche  $\vec{v}(r = a) = \vec{0}$ , soit  $v_0 \cdot \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{C}{2\pi \cdot r} = a \cdot \Omega$ . Soit  $\Omega \geq \frac{v_0}{a}$ .



# Devoir non surveillé

vendredi 20 octobre 2017

Le document est à lire, l'exercice est à rendre.

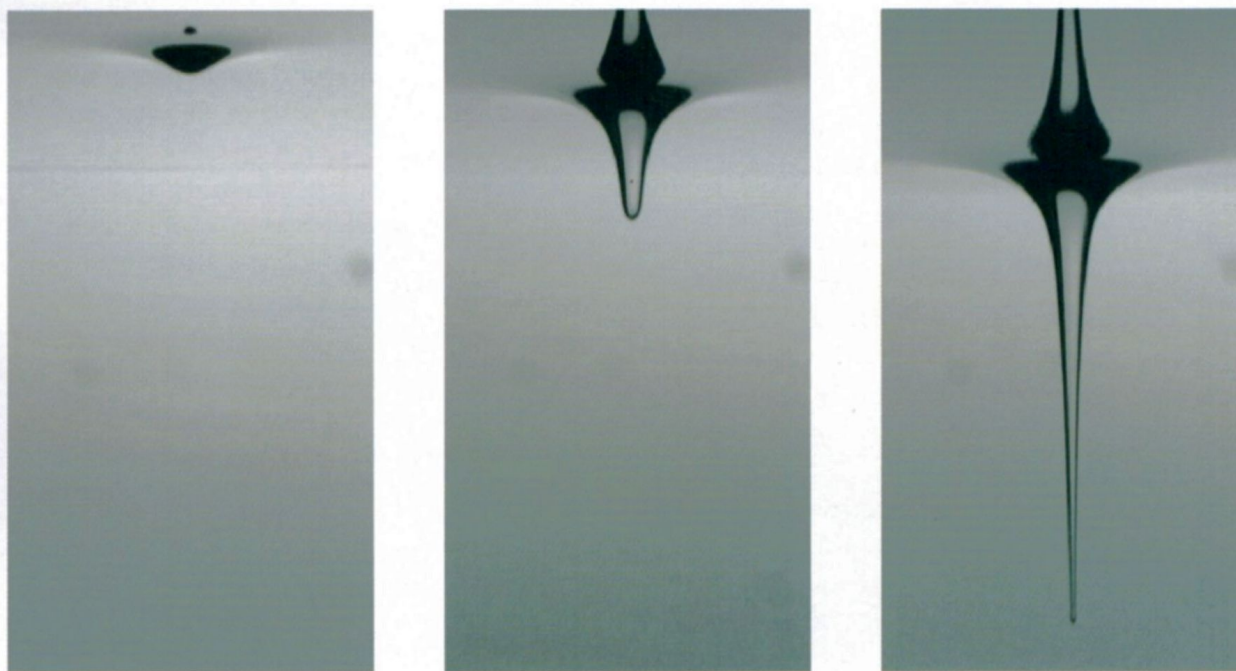
## Un cyclone dans votre baignoire

"Ce que disent les fluides" - 2nde éd. - de E. Guyon, J-P. Hulin et L. Petit  
Belin - Pour la Science

**C'est cette même structure avec une zone externe et un cœur qu'on rencontre dans les terribles tornades ou les trombes atmosphériques.**

La vidange d'une baignoire est l'occasion d'observations aussi stimulantes que celles qui ont accompagné le fameux bain d'Archimède.

Vidons l'eau contenue dans un récipient cylindrique à travers un trou central situé au fond : au fur et à mesure que le liquide proche de l'axe est évacué par le trou de vidange, il est remplacé par du liquide venant de l'extérieur. Il se forme alors un tourbillon - ou vortex - marqué par une dépression de la surface à l'aplomb du trou (Figure 1).



**1.** Vidange d'un récipient avec évacuation du liquide par un orifice situé sous le bord inférieur des images. La surface est parabolique dans le cœur du tourbillon près de l'axe, alors que la courbure est inversée dans la zone extérieure avec un profil hyperbolique. Dans cette expérience, le récipient tourne autour d'un axe vertical à des vitesses croissantes de gauche à droite [6, 12 et 18 tours par minute].

Quelques poussières en surface montrent que le liquide tourne autour de l'axe du tourbillon, et ce d'autant plus vite qu'il s'en approche sauf très près de ce dernier. Cela reflète la loi de la mécanique bien connue de conservation du moment cinétique : elle explique pourquoi un patineur sur glace tourne plus vite sur lui-même lorsqu'il ramène ses bras le long du corps.

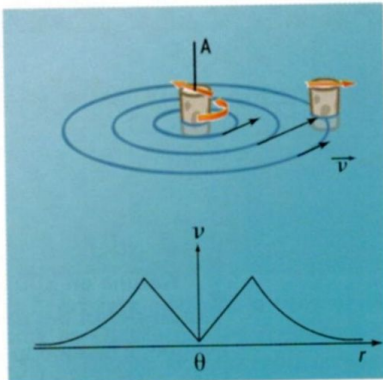
Curieusement, dans cette zone externe du tourbillon, les éléments de fluide ne tournent pas sur eux-mêmes : posons à la surface du liquide un bouchon qui tourne autour de l'axe du tourbillon, et sur le dessus duquel est tracée une flèche : cette dernière pointe toujours dans la même direction (Figure 2). On parle dans ce cas d'écoulement irrotationnel (sans rotation locale). En revanche, lorsque le liquide arrive très près de l'axe, le

bouchon tourne très vite sur lui-même : l'écoulement devient rotationnel. Le liquide tourne alors en bloc à vitesse angulaire  $\omega$  constante, comme le ferait un solide. Cette région est le cœur du tourbillon.

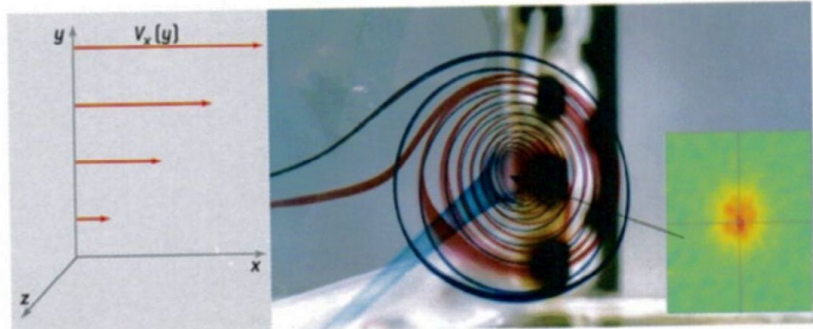
### Le phénomène en détail

Dans la zone externe, la vitesse décroît comme l'inverse de la distance  $r$  à l'axe, c'est-à-dire en  $1/r$  (Figure 2) : ainsi, la circulation  $C(r) = 2\pi r v(r)$  est-elle indépendante de  $r$ , et la rotation locale (mesurée par la vorticité  $\text{rot} \vec{v}$ ) est nulle (d'où le qualificatif d'écoulement irrotationnel). Dans le cœur, au contraire, la vitesse augmente linéairement avec la distance à l'axe ( $v = \omega r$ ) : la circulation augmente comme  $r^2$  et la rotation locale (la vorticité) est non nulle (l'écoulement est dit rotationnel).

Le profil de la surface résulte d'un équilibre entre le gradient de pression hydrostatique créé par la pente, et la force centrifuge ; tout comme dans un vélodrome aux virages relevés, plus la vitesse est grande, plus la pente doit être forte. Dans le cœur, le profil de la surface est concave et parabolique (la surface d'un liquide entraîné par la rotation d'un récipient à vitesse constante autour d'un axe vertical adopte d'ailleurs le même profil). Dans la zone externe, au contraire, la courbure est convexe car la vitesse diminue avec la distance : le profil est de type hyperbolique.



● 2. Champ de vitesse autour de l'axe A d'une ligne de tourbillon. La vitesse augmente linéairement avec la distance  $r$  à l'axe dans la région du cœur, puis décroît dans la zone extérieure. Une flèche sur un bouchon entraîné par l'écoulement (en orange) pointe toujours dans la même direction dans la zone extérieure. Au contraire, le bouchon tourne sur lui-même quand il est dans le cœur du tourbillon.



● 3. Une aspiration vers l'arrière dans la direction  $-z$  (l'arrière de la figure) fait apparaître un tourbillon dans l'écoulement de cisaillement  $V_x(y)$ . L'écoulement est visualisé par injection de colorants, entraînés à la fois par la rotation induite par le tourbillon et par l'écoulement d'aspiration. On détermine le champ de vitesse par vélocimétrie par imagerie de particules et on en déduit la vorticité  $\text{rot} \vec{v}$  dont le module est représenté dans l'insert en fausses couleurs. La vorticité est non nulle (domaines rouges et jaunes) uniquement dans le cœur.

Demandons-nous maintenant comment la courbure de la surface de l'eau apparaît lorsqu'on ouvre l'orifice de sortie. L'étirement du fluide par l'écoulement de vidange amplifie une rotation déjà existante (par suite de la conservation du moment cinétique), mais ne la crée pas. Souvent cette rotation sera amorcée accidentellement mais elle peut être induite en faisant tourner l'ensemble du dispositif (Figure 1), ou en réalisant l'expérience dans un écoulement de cisaillement (Figure 3) ; ce dernier type d'écoulement est en effet rotationnel dans toute la zone de cisaillement et présente donc une rotation locale.

Enfin, contrairement au sens de rotation des cyclones, celui des tourbillons de vidange ne dépend pas de l'hémisphère terrestre où on prend son bain ! La rotation que pourrait créer la force de Coriolis est en effet, à l'échelle d'une baignoire, faible devant celles dues à d'autres perturbations.

## Enoncé

### 1) Sens de rotation du tourbillon

**1.a)** Calculer un ordre de grandeur du nombre de Rossby  $Ro$  qui quantifie le rapport entre l'accélération convective et la force massique de Coriolis.

**1.b)** Justifier alors que "contrairement au sens de rotation des cyclones, celui des tourbillons de vidange ne dépend pas de l'hémisphère terrestre où on prend son bain".

### 2) Champ de vitesse

L'écoulement d'eau (liquide parfait incompressible) dans la baignoire est supposé permanent avec un axe de

symétrie de révolution vertical  $Oz$  et un champ de vitesse orthoradial invariant par rotation et translation selon  $Oz$ , on note donc  $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{e}_\theta$ . En dehors d'un cylindre d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$ , l'écoulement est irrotationnel; à l'intérieur de ce cylindre, le rotationnel du champ de vitesse est uniforme et parallèle à  $Oz$ , on note donc  $r \vec{\text{rot}} \vec{v} = 2 \cdot \Omega \cdot \vec{e}_z$ .

**2.a)** Pourquoi la circulation  $C(r) = 2\pi r v(r)$  est-elle indépendante de  $r$  si  $r > a$  ?

**2.b)** Trouver l'expression de  $v(r)$ .

**3)** Surface libre de l'eau

**3.a)** Calculer la force d'inertie d'entraînement à laquelle est soumise une masse ponctuelle  $m$  à la distance  $r$ . En déduire l'énergie potentielle dont dérive cette force d'inertie.

On admettra que l'altitude de la surface libre est proportionnelle à cette précédente énergie potentielle.

**3.b)** Déterminer l'expression de l'altitude  $z$  de la surface libre de l'eau en dehors du cylindre de rayon  $a$ . Le profil est-il "de type hyperbolique" ?

**3.c)** Déterminer l'expression de l'altitude  $z$  de la surface libre de l'eau à l'intérieur du cylindre de rayon  $a$ . Le profil est-il "concave et parabolique" ?

## Correction

### 1) Sens de rotation du tourbillon

**1.a)** Le nombre de Rossby  $Ro$  quantifie le rapport entre l'accélération convective  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  et la force massique de Coriolis  $-2\vec{\Omega}_{Terre} \wedge \vec{v}$ , donc

$$Ro \approx \frac{v^2/L}{2\Omega_{Terre} \cdot v} \approx \frac{vT_{Terre}}{L} \ll 1$$

car le fluide se déplacera pendant 24heures sur une dimension bien supérieure à celle de la baignoire ( $L$ ).

**1.b)** La force d'inertie de Coriolis est donc négligeable à l'échelle de la baignoire : "contrairement au sens de rotation des cyclones, celui des tourbillons de vidange ne dépend pas de l'hémisphère terrestre où on prend son bain".

### 2) Champ de vitesse

**3)** On calcule la circulation de la vitesse sur un cercle  $C$  d'axe  $Oz$  et de rayon  $r$  :  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint v(r) \cdot r d\theta = 2\pi \cdot r \cdot v(r)$  et le flux du rotationnel de la vitesse à travers le disque  $D$  de frontière  $C$ , soit, si  $r < a$  :  $\iint_D r \vec{\omega} \cdot d^2\vec{S} = 2\pi \cdot r^2 \cdot \Omega$  et si  $r > a$ , puisque le rotationnel est nul en dehors du disque de rayon  $a$  :  $\iint_D r \vec{\omega} \cdot d^2\vec{S} = 2\pi \cdot a^2 \cdot \Omega$ .

**3.a)** La circulation et le flux qu'on vient de calculer sont égaux de par le théorème de Stokes, donc :

$$\begin{cases} v(r) = r \cdot \Omega & \text{si } r < a \\ v(r) = \frac{a^2 \cdot \Omega}{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

La vitesse maximale est obtenue pour  $r = a$  et vaut alors  $v_{max} = a \cdot \Omega$ .

La courbe donnant  $\frac{v(r)}{v_{max}}$  en fonction de  $\frac{r}{a}$  est celle donnée figure 2. Noter la vitesse nulle en  $r = 0$  : il s'agit de l'«œil du cyclone».

### 4) Surface libre de l'eau

#### 4.a)

**4.b)** La force d'inertie d'entraînement à laquelle est soumise une masse ponctuelle  $m$  à la distance  $r$  est  $\vec{f}_e = -m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r$ , soit :

$$\begin{cases} \vec{f}_e = -m r \Omega^2 \vec{u}_r & \text{si } r < a \\ \vec{f}_e = -m \frac{a^4 \cdot \Omega^2}{r^3} \vec{u}_r & \text{si } r > a \end{cases}$$

La force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle  $E_{pe}$  par  $\vec{f}_e = -\frac{dE_{pe}}{dr} \vec{u}_r$ , soit :

$$\begin{cases} E_{pe} = \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 + A & \text{si } r < a \\ E_{pe} = -m \frac{a^4 \cdot \Omega^2}{2r^2} + B & \text{si } r > a \end{cases}$$

L'énergie potentielle dont dérive le poids est  $E_{pp} = m g z$ .

**4.c)** En dehors du cylindre de rayon  $a$ , cela donne

$$z = -\frac{1}{2g} \frac{a^4 \cdot \Omega^2}{r^2}$$

Le profil n'est pas "de type hyperbolique" : il décroît comme  $1/r^2$ .

**4.d)** A l'intérieur du cylindre de rayon  $a$  :

$$z = \frac{1}{2g} r^2 \Omega^2 - \frac{1}{g} a^2 \Omega^2$$

Le profil est donc bien "concave et parabolique".