

① Dans le vide :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

(équations de Maxwell)

* pour trouver l'équation vérifiée par \vec{E} , on élimine \vec{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

* de même :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} \Rightarrow \Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

② $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$ \vec{u}_y a) c'est une onde plane (i.e les surfaces d'onde sont des plans) progressive, qui se propage dans le sens des x croissants ($k > 0$) et qui est polarisée selon \vec{u}_y

b) On injecte la forme de l'onde pour trouver la relation de dispersion :

$$(-jk)^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (j\omega)^2 \vec{E} \Rightarrow k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

* $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ (définition) * v_ϕ est indépendant de $\omega \Rightarrow$ le vide n'est pas un milieu dispersif.

$$= \frac{\omega}{\omega} c = \boxed{c = v_\phi}$$

c) L'équation de Faraday donne : $-jk \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{u}_z}{c} E_0 e^{j(\omega t - kx)} = \vec{B}$$

d) Cette onde n'est pas réalisable expérimentalement car elle est rigoureusement monochromatique, d'amplitude uniforme et d'extension spatiale infinie.

③ a) $n_e = \frac{\rho_{Cu} N_A}{M_{Cu}}$ AN : $n_e = \frac{8,92 \cdot 10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0,846 \cdot 10^{29} \text{ e}^- \cdot \text{m}^{-3} = n_e}$
 $\approx 10^{29} \text{ e}^- \cdot \text{m}^{-3}$

b) $n_e \gg n_1, n_2$

c) Pour un conducteur métallique (modèle de Drude), on tient compte d'une force de freinage due aux chocs des électrons avec des atomes du réseau cristallin. Dans le cas de l'ionosphère, le milieu est tellement peu dense qu'on peut négliger les interactions avec les édifices atomiques et moléculaires (chocs).

④ a) On utilise le point de vue d'Euler :

$$+n_e m_e \left(\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}_e \right) = -n_e e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} \right\| \approx \frac{v_e}{T} \text{ et } \left\| (\vec{v}_e \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}_e \right\| \approx \frac{v_e^2}{\lambda} \approx \frac{v_e^2}{v_\phi T} < \frac{v_e^2}{cT}$$

$$\text{donc } \frac{\left\| (\vec{v}_e \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}_e \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} \right\|} \approx \frac{v_e}{v_\phi} \ll \frac{v_e}{c} \ll 1$$

car les électrons sont non relativistes

De même $\|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{v_p} < \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ donc $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v}{c} < \frac{v}{c} \ll 1$

Donc $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E} \Rightarrow j\omega m_e \vec{v}_e = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = -\frac{e}{j\omega m_e} \vec{E}$

b) De la même façon $m_c \frac{\partial \vec{v}_c}{\partial t} = e\vec{E}$
 et $\vec{v}_c = \frac{e}{j\omega m_c} \vec{E}$

c) $\vec{J} = -n_0 e \vec{v}_e + n_0 e \vec{v}_c$
 $= \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} \vec{E} + \frac{n_0 e^2}{j\omega m_c} \vec{E}$
 $\vec{J} = \frac{n_0 e^2}{j\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c} \right) \vec{E}$

* comme $m_c \gg m_p \gg m_e \Rightarrow \vec{J} \approx \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} \vec{E}$

d) $\underline{\sigma}$ est définie par $\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E}$ donc $\underline{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}$
 $\underline{\sigma}$ est un imaginaire pur alors que σ est réel pour la conduction métallique

⑤ * La puissance volumique moyenne fournie par le champ aux électrons est $\mathcal{P}_v = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}\left(\frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} E_0^2\right) = 0 = \mathcal{P}_v$
 * ce résultat s'explique par l'absence de force dissipative.

⑥ * L'équation de Maxwell-Ampère devient :
 a) $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\frac{n_0 e^2}{j\omega m_e} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{B}$

* on élimine \vec{B} , avec les autres équations :

$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 $= \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

b) on injecte l'onde dans l'équation de propagation :

$(-j\vec{k})^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right) (j\omega)^2 \vec{E} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right)$

ie $k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

c) $\omega_p = e \sqrt{\frac{n_0}{m_e \epsilon_0}}$

AN: $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{10^{31}}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 6 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1} = \omega_p$
 pour $n_0 = n_1$

$\omega_p = 1,6 \cdot 10^{-9} \sqrt{\frac{10^{32}}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 6 \cdot 10^7 \text{ rads}^{-1} = \omega_p$
 pour $n_0 = n_2$

Rqe: n_1 et n_2 sont données avec ACS.

⑦ $\omega < \omega_p$ a) $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$, donc $k = \pm j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ imaginaire pure 3/16

donc $\vec{E} = \vec{u}_y E_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} = \vec{u}_y E_0 e^{j\omega t} e^{-j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} x} = \vec{u}_y E_0 e^{\frac{+\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{j\omega t}$
 Il s'agit d'une onde évanescente

* comme le plasma occupe tout le $\frac{1}{2}$ espace $x > 0$, la limite $x \rightarrow \infty$ (pas de divergence) impose $\vec{E} = \vec{u}_y E_0 e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow k = -j \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ et $n = \frac{k}{\omega/c}$

$\Rightarrow \underline{n} = -j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$

b) $\vec{E} = E_0 \vec{u}_y e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{j\omega t} \Rightarrow \vec{E}(M,t) = E_0 \vec{u}_y e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \cos \omega t$

$j\omega \vec{B} = j \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_x \wedge E \vec{u}_y = -j \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} E \vec{u}_z$
 $= + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} E_0 \vec{u}_z e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{u}_z$

$\vec{B} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \vec{u}_z E_0 e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \sin(\omega t)$

c) C'est une onde évanescente, elle est stationnaire. C'est le domaine réactif.

d) $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle = \vec{u}_x \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} e^{-2\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = \boxed{0 < \vec{\Pi} >}$

ce qui est attendu pour une onde stationnaire.

⑧ $\omega > \omega_p$

a) $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0$ donc $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ et $\underline{n} = \frac{k}{\omega/c} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \underline{n}$
 \underline{n} est réel.

b) $\vec{E} = \vec{u}_y E_0 e^{j(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x)}$ donc $\vec{E} = \vec{u}_y E_0 \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x)$

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y E_0 \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x)$
 $= \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \vec{u}_z \cos(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x) = \vec{B}$

c) C'est une onde plane progressive monochromatique. Il s'agit du domaine de transparence.

d) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = v_\varphi$

v_φ dépend de ω , donc le milieu est dispersif

e) * $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ or $\omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2$
 donc $k \omega \frac{d\omega}{dk} = k^2 c^2$ ie $v_g v_p = c^2$

finalement, $v_g = \frac{c^2}{v_p} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = v_g$

* v_g est la vitesse de propagation d'un paquet d'onde.

f) Pour $\omega \gg \omega_p$ $v_g = v_p = c$, le milieu est assimilable au vide

9) a) L'onde incidente est $\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_z \end{cases}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

L'onde réfléchie est $\begin{cases} \vec{E}_r = r_E E_0 e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = -\frac{r_E E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_z \end{cases}$

L'onde transmise est $\begin{cases} \vec{E}_t = t_E E_0 e^{j(\omega t - \underline{n}kz)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_t = \frac{\underline{n} t_E E_0}{c} e^{j(\omega t - \underline{n}kz)} \vec{u}_z \end{cases}$

D'où les équations, provenant des conditions aux limites:

$\begin{cases} 1 + r_E = t_E \\ 1 - r_E = \underline{n} t_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = (1 + \underline{n}) t_E \\ 1 + r_E = t_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_E = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \\ t_E = \frac{2}{1 + \underline{n}} \end{cases}$

b) $\omega < \omega_p$ (domaine réactif)

* $r_E = \frac{1 + j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{1 - j \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} = \left(\frac{\omega}{\omega_p} + j \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \right)^2 = e^{j\alpha}$
 avec $\alpha = 2 \cos^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)$

* pour $\omega \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$
 pour $\omega \rightarrow \omega_p$ $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$

* $\vec{E}_r = E_0 e^{j\alpha} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha) \vec{u}_y$

$\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} e^{j\alpha} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u}_z \Rightarrow \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz + \alpha) \vec{u}_z$

* L'onde réfléchie a donc la même amplitude que l'onde incidente et elle est déphasée de α en $z=0$ par rapport à l'onde incidente.

c) $\omega > \omega_p$ * $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ donc $r_E = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1} \right)^2$ 5/16

et $t_E = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = 2 \frac{\omega}{\omega_p} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1} \right)$

* r_E , t_E et n étant réels : $\vec{E}_r = r_E E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$; $\vec{E}_t = t_E E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$
 $\vec{B}_r = -\frac{r_E E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{u}_z$; $\vec{B}_t = \frac{t_E E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$

- * Rq1: les champs électriques de l'onde réfléchie et de l'onde transmise sont en phase avec l'onde incidente
 * Rq2 pour $\omega \gg \omega_p$ $r_E \rightarrow 0$ et $t_E \rightarrow 1$, l'onde est alors intégralement transmise.
 $n \rightarrow 1$

⑩ * L'équilibre de l'atmosphère à l'altitude z se traduit par :

$-\text{grad } p - \rho g \vec{u}_z = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et $\frac{dp}{dz} = -\rho g$
 ρ étant la masse volumique

* L'air est assimilé à un gaz parfait $\Rightarrow p = \frac{\rho}{M_a} RT$, d'où $\frac{dp}{dz} \frac{RT}{M_a} = -\rho g$

$\frac{dp}{dz} + \frac{M_a g}{RT} p = 0 \Rightarrow p = p(0) e^{-\frac{M_a g z}{RT}}$ pour l'atmosphère isotherme.

* la hauteur caractéristique est donc $H = \frac{RT}{M_a g}$ AN: $H \approx 8 \text{ km}$

* on remarque que l'altitude des couches les plus basses de l'ionosphère est au moins $10H$.

⑪ * On a trouvé $6 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1} < \omega_p < 6 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}$ en question 6. b)

ie $1 \text{ MHz} < f_p < 10 \text{ MHz}$

Donc pour $f \approx 99 \text{ kHz}$, l'ionosphère se trouve dans le domaine réactif et l'onde se réfléchit sur l'ionosphère.

* cette communication est possible pour $f < 10 \text{ MHz}$.

⑫ a) La communication par satellite est possible dans le domaine de transparence de l'ionosphère, c'est-à-dire pour $f > 10 \text{ MHz}$.

b) * Un satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel terrestre, donc sa période est $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ et sa trajectoire est dans le plan équatorial

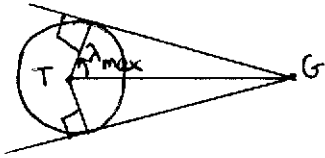
* D'après la 3^e loi de Kepler, l'altitude h vérifie :

$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2}{g R_T^2} = \frac{T^2}{R_T^3}$

Donc $R_T + h = \sqrt[3]{\frac{g R_T^2 T^2}{4\pi^2}}$ $h = \sqrt[3]{\frac{g R_T^2 T^2}{4\pi^2} - R_T}$ 6/16

AN: $R_T + h = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$ et $h = 3,6 \cdot 10^4 \text{ km}$

c) En principe, les latitudes joignables sont $|\lambda| < \lambda_{\max}$ tq



$\lambda_{\max} = \cos^{-1}\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$ AN: $\lambda_{\max} = 81^\circ$

Re: en pratique, $\lambda_{\max} \approx 70^\circ$

d) Plus la fréquence est élevée, plus le débit de transmission de données est élevé.

e) Pour $f = 10 \text{ GHz}$, $\frac{f_p}{f} < 10^{-3}$, donc $n = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \approx 1$, l'ionosphère est donc assimilable au vide. La durée minimale d'un aller-retour sol-satellite est obtenue sur une verticale; elle vaut:

$\tau \approx \frac{2h}{c} \approx \frac{2 \times 3,6 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \approx 0,24 \text{ s} = \tau$

13) $\vec{j} = \sigma_i \vec{E}$ $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_i}$ $\text{div } \vec{B} = 0$
 loi d'Ohm locale $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ } équations de Maxwell

14) on compare $\vec{j} = \sigma_i \vec{E}$ à $\vec{j}_D = \epsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\|\vec{j}_D\| \approx \epsilon_i \omega \|\vec{E}\|$ } donc $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \approx \frac{\epsilon_i \omega}{\sigma_i} \approx \frac{80 \times 9 \cdot 10^{-12} \times 10^3}{2} \approx 4 \cdot 10^{-7} \ll 1$
 et $\|\vec{j}\| = \sigma_i \|\vec{E}\|$

* $\epsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donc négligeable devant \vec{j} . L'équation de Maxwell-Ampère devient $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

15) $\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \sigma_i \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \sigma_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $= \text{grad}(\underbrace{\text{div } \vec{B}}_0) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \Rightarrow \Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

16) a) À l'aide du formulaire, on trouve:

$\Delta \vec{B} = \left(\Delta B_\theta - \frac{B_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta$ avec $\Delta B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2}$
 $= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r B'(r) \right) e^{i(\omega t - kz)} - k^2 B(r) e^{i(\omega t - kz)}$
 et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \underline{B}(r) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_\theta = \left[\frac{1}{r} \left(B'(r) + r B''(r) \right) - k^2 B(r) \right] e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_\theta$

D'où $\frac{1}{r} \left(B'(r) + r B''(r) \right) - k^2 B(r) - \frac{B(r)}{r^2} = i\omega \mu_0 \sigma_i B(r)$

ie $r^2 B''(r) + r B'(r) - (k^2 r^2 + 1) B(r) = 0$

$r^2 B''(r) + r B'(r) - (k^2 r^2 + 1) B(r) = 0$

b) $\mu_0 \sigma_i \omega \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \times 2 \times 10^3 \text{ m}^{-2} \simeq 8\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}$
 $k^2 \simeq \frac{4\pi^2}{(10^{-3})^2} \text{ m}^{-2} \simeq 4\pi^2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-2}$ } on trouve bien que $k^2 \gg \mu_0 \sigma_i \omega$

c) cela revient à négliger $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday, donc le phénomène d'induction pour le calcul de \underline{B} .

d) * L'équation s'écrit : $\kappa^2 \frac{d^2 \underline{B}}{dr^2} + \kappa \frac{d\underline{B}}{dr} - ((kr)^2 + 1) \underline{B} = 0$

Avec le changement de variable $x = kr$, $\kappa^2 \frac{d^2 \underline{B}}{dr^2} = x^2 \frac{d^2 \underline{B}}{dx^2}$ et $\kappa \frac{d\underline{B}}{dr} = x \frac{d\underline{B}}{dx}$,

on reconnaît l'équation $x^2 \frac{d^2 \underline{B}}{dx^2} + x \frac{d\underline{B}}{dx} - (x^2 + 1) \underline{B} = 0$ donnée dans le formulaire avec $n=1$.

* Les solutions sont de la forme :

$\underline{B}(r) = \begin{cases} B_{1I} I_1(kr) + B_{1K} K_1(kr) & \text{dans l'axoplasme} \end{cases}$

$\left. \begin{matrix} B_{1I}, B_{1K} \\ B_{2I}, B_{2K} \end{matrix} \right\}$ sont des constantes complexes

$\left. \begin{matrix} B_{2I} I_1(kr) + B_{2K} K_1(kr) & \text{dans le milieu extérieur} \end{matrix} \right\}$

* $K_1(kr)$ diverge qd $r \rightarrow 0 \Rightarrow B_{1K} = 0$

$I_1(kr)$ diverge qd $r \rightarrow +\infty \Rightarrow B_{2I} = 0$

* \underline{B} est continu en $r=a$ et $\underline{B}(a)$ est donné par le théorème d'Ampère appliqué sur un cercle de rayon a centré sur l'axe :

$\underline{B}(a) e^{i(\omega t - kz)} \times 2\pi a = \mu_0 i_0 e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow \underline{B}(a) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a}$

d'où $B_{1I} I_1(ka) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a}$

et $B_{2K} K_1(ka) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a}$

* Finalement :
$$\underline{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_0 I_1(kr)}{2\pi a I_1(ka)} & \text{pour } 0 \leq r \leq a \\ \frac{\mu_0 i_0 K_1(kr)}{2\pi a K_1(ka)} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

(17) a) pour $r > a$, le théorème d'Ampère donne le courant enlacé I_{enl} :

$2\pi r \underline{B}(r) e^{i(\omega t - kz)} = \mu_0 I_{enl}$ Donc $\underline{I}_{enl} = \frac{2\pi}{\mu_0} r \underline{B}(r) e^{i(\omega t - kz)}$

b) Pour $r > a$ $\kappa \underline{B}(r) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a K_1(ka)} \frac{1}{r} K_1(kr)$
 $\sim K_1(kr) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}$

$\sim \sqrt{\frac{\pi R r}{2}} e^{-kr} \rightarrow 0 \text{ qd } r \rightarrow \infty$

Donc $\underline{I}_{enl} \rightarrow 0 \text{ qd } r \rightarrow +\infty$

* $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_{\text{ext}} = i_a + i_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow i_{\text{ext}} = -i_a$
 courant total circulant dans le milieu extérieur

c) * on trouve \vec{j} à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) \vec{e}_z \right)$$

Donc $j_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\mu_0} (-ik) B_\theta = \frac{ik}{\mu_0} B_\theta e^{i(\omega t - kz)} = j_r$

*
$$j_r = \begin{cases} \frac{ik i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_1(kr) e^{i(\omega t - kz)} & \text{pour } 0 \leq r \leq a \\ \frac{ik i_0}{2\pi a K_1(ka)} K_1(kr) e^{i(\omega t - kz)} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

*
$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) e^{i(\omega t - kz)}$$

 pour $0 \leq r \leq a$
$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\mu_0 i_0 I_1(kr)}{2\pi a I_1(ka)} \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$= \frac{k i_0}{2\pi a I_1(ka)} \underbrace{\frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} (kr I_1(kr))}_I e^{i(\omega t - kz)}$$

 $I_0(kr)$ d'après le formulaire

pour $r \geq a$
$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\mu_0 i_0 K_1(kr)}{2\pi a K_1(ka)} \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$= \frac{k i_0}{2\pi a K_1(ka)} \underbrace{\frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} (kr K_1(kr))}_{-K_0(kr)} e^{i(\omega t - kz)}$$

 $-K_0(kr)$ (cf formulaire)

Donc

$$j_z = \begin{cases} \frac{k i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} & \text{pour } 0 \leq r \leq a \\ -\frac{k i_0}{2\pi a K_1(ka)} K_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

d) $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$; dans l'axoplasme :

$$E_r = \frac{1}{\sigma_1} j_r = \frac{1}{\sigma_1} \frac{ik i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_1(kr) e^{i(\omega t - kz)} = E_r$$

 $\frac{dI_0}{d(kr)} = \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} (I_0(kr))$ $0 \leq r < a$

Donc
$$\underline{E}_r = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{i i_0}{\sigma_1 2\pi a I_1(ka)} I_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \right)$$

*
$$\underline{E}_z = \frac{1}{\sigma_1} \dot{A}_z = \frac{1}{\sigma_1} \frac{k i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} = \underline{E}_z \quad 0 \leq r < a$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \frac{k i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_0(kr) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{i(\omega t - kz)}}{-ik} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{i i_0}{2\pi a \sigma_1 I_1(ka)} I_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \right)$$

* finalement
$$\vec{E} = -\text{grad } \psi \quad \text{avec} \quad \psi(r, z, t) = -\frac{i i_0}{2\pi a \sigma_1 I_1(ka)} I_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \quad 0 \leq r < a$$

* de même dans le milieu extérieure :

$$\underline{E}_r = \frac{1}{\sigma_2} \dot{A}_r = \frac{1}{\sigma_2} \frac{i k i_0}{2\pi a k_1(ka)} K_1(kr) e^{i(\omega t - kz)} = \underline{E}_r \quad r > a$$

$$= \frac{1}{\sigma_2} \frac{i k i_0}{2\pi a k_1(ka)} \left(-\frac{dK_0(kr)}{dr} \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} \left(+\frac{i i_0}{2\pi a \sigma_2 k_1(ka)} K_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \right)$$

et
$$\underline{E}_z = \frac{1}{\sigma_2} \dot{A}_z = -\frac{k i_0}{2\pi a \sigma_2 k_1(ka)} K_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} = \underline{E}_z \quad r > a$$

$$= -\frac{k i_0}{2\pi a \sigma_2 k_1(ka)} K_0(kr) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{i(\omega t - kz)}}{-ik} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{i i_0}{2\pi a \sigma_2 k_1(ka)} K_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \right)$$

* finalement
$$\vec{E} = -\text{grad } \psi \quad \text{avec} \quad \psi(r, z, t) = \frac{i i_0}{2\pi a \sigma_2 k_1(ka)} K_0(kr) e^{i(\omega t - kz)} \quad r > a$$

(18) a) $v(z,t) = \psi(a^-, z, t) - \psi(a^+, z, t)$

donc $\frac{\partial v}{\partial z}(z,t) = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial z}(a^-, z, t)}_{-E_z(a^-, z, t)} - \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial z}(a^+, z, t)}_{-E_z(a^+, z, t)}$

Donc $\frac{\partial v}{\partial z} = E_{z_2}(a, z, t) - E_{z_1}(a, z, t)$

b) $E_{z_1}(a, z, t) = \frac{k i_0}{2\pi a \sigma_1 I_1(ka)} I_0(ka) e^{i(\omega t - kz)} = \frac{k I_0(ka)}{2\pi a \sigma_1 I_1(ka)} i(z,t) = Z_1 i(z,t)$

et $E_{z_2}(a, z, t) = \frac{-k K_0(ka)}{2\pi a \sigma_2 K_1(ka)} i_0 e^{i(\omega t - kz)} = \frac{-k K_0(ka)}{\pi a \sigma_2 K_1(ka)} i(z,t) = Z_2 i(z,t)$

Donc $Z_1 = \frac{k I_0(ka)}{2\pi a \sigma_1 I_1(ka)}$ et $Z_2 = \frac{k K_0(ka)}{2\pi a \sigma_2 K_1(ka)}$

c) * $ka = \frac{2\pi}{\lambda} a \approx \frac{2\pi}{10^{-3}} \times 5 \cdot 10^{-6} \approx 0,01\pi \approx 0,03$, donc $I_0(ka) \approx 1$ d'après le formulaire

et $I_1(ka) \approx \frac{ka}{2}$; $K_0(ka) \approx -\ln(ka)$ et $K_1(ka) \approx \frac{1}{ka}$

* finalement :

$Z_1 \approx \frac{k}{2\pi a \sigma_1 \frac{ka}{2}} \approx \frac{1}{\pi a^2 \sigma_1} = Z_1$ et $Z_2 = \frac{-k \ln(ka)}{2\pi a \sigma_2 \frac{1}{ka}} \approx \frac{-k^2 \ln(ka)}{2\pi \sigma_2} = Z_2$

* $\frac{Z_2}{Z_1} \approx \frac{-k^2 \ln(ka) \pi a^2 \sigma_1}{2\pi \sigma_2} = - (ka)^2 \ln(ka) \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} \approx - (0,03)^2 \ln(0,03) \frac{2}{4} \approx 10^{-3} \Rightarrow Z_2 \ll Z_1$

* $Z_1 = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_1} = \frac{1}{\pi (5 \cdot 10^{-6})^2 \times 2} = 6 \cdot 10^9 \Omega m^{-1} = Z_1$

d) $\frac{\partial v}{\partial z} = -Z_2 i(z,t) - Z_1 i(z,t) \approx -Z_1 i(z,t)$ en négligeant Z_2 devant Z_1

donc $r_a = Z_1 = \frac{1}{\pi a^2 \sigma_1}$

e) le résultat précédent est indépendant de la fréquence ou de la longueur d'onde ; il reste valable tant que les approximations faites sont valables ($\epsilon_i \omega \ll \sigma_i$; $k^2 \gg \mu_0 \sigma_i \omega$ et $ka \ll 1$) pour toutes les fréquences du spectre du signal, car les équations sont linéaires.

19) $\vec{j}_D = Ze \vec{j}_{diff} = Ze \left(-D \frac{dn}{dz} \right) \vec{e}_z = \boxed{-Ze D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z = \vec{j}_D}$

20) $\vec{j}_E = Zen \vec{v}_{lim} = Zen \frac{DZe}{k_B T} \vec{E} = \boxed{n \frac{D(Ze)^2}{k_B T} \vec{E} = \vec{j}_E}$

21a) A l'équilibre, il n'y a pas de courant total $\Rightarrow \vec{j}_D + \vec{j}_E = \vec{0}$

$-Ze D \frac{dn}{dz} + n \frac{D(Ze)^2}{k_B T} E = 0$ en posant $\vec{E} = E \vec{e}_z$

$E = -\frac{d\psi}{dz}$ par définition du potentiel ψ

donc $-D \frac{dn}{dz} - n \frac{DZe}{k_B T} \frac{d\psi}{dz} = 0$

$\frac{1}{n} \frac{dn}{dz} + \frac{Ze}{k_B T} \frac{d\psi}{dz} = 0$

on intègre cette équation en $x=0$ et $x=\delta$:

$\ln \frac{n(\delta)}{n(0)} + \frac{Ze}{k_B T} (\psi(\delta) - \psi(0)) = 0$

$n(\delta) = n_{ext}$ $\psi(\delta) = \psi_{ext}$
 $n(0) = n_{int}$ $\psi(0) = \psi_{int}$ $\Rightarrow \ln \left(\frac{n_{ext}}{n_{int}} \right) + \frac{Ze}{k_B T} (\psi_{ext} - \psi_{int})_{eq} = 0.$

D'où $V_i = \frac{k_B T}{Ze} \ln \left(\frac{n_{ext}}{n_{int}} \right)$

b) $V_{Na^+} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298 \times \ln 10}{1,6 \cdot 10^{-19}} = \boxed{0,06 V = V_{Na^+}}$

$V_{K^+} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298 \times \ln(0,04)}{1,6 \times 10^{-19}} = \boxed{-0,08 V = V_{K^+}}$

22) Soit \vec{j}_{Pi} le vecteur densité de courant de particules de type (i).

a) L'équation de conservation pour un type d'ion donné donne :

$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{Pi} = 0$ $\frac{\partial n_i}{\partial t} = 0$ en régime stationnaire
 $\vec{j}_{Pi} = j_{Pi} \vec{e}_z$ $\Rightarrow \text{div} \vec{j}_{Pi} = \frac{\partial j_{Pi}}{\partial z} = 0 \Rightarrow j_{Pi}$ est indépendant de z

$\vec{j}_i = Ze \vec{j}_{Pi} \Rightarrow j_i = Ze j_{Pi}$ est indépendant de z .

b) On procède comme à la question 21 :

$-Ze D_i \frac{dn_i}{dz} + n_i \frac{D_i(Ze)^2}{k_B T} E = j_i$ indépendant de z
 et $E = -\frac{d\psi}{dz}$

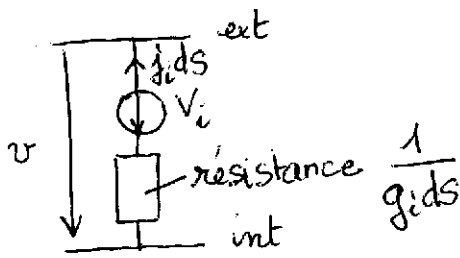
$$-z_i e D_i \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dx} - \frac{D_i (z_i e)^2}{k_B T} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{n_i} j_i \quad \text{que l'on intègre entre } 0 \text{ et } \delta :$$

$$-z_i e D_i \ln \frac{n_{ext}}{n_{int}} + \frac{D_i (z_i e)^2}{k_B T} \psi = j_i \int_0^\delta \frac{dx}{n_i(x)}$$

D'où
$$j_i = \frac{D_i (z_i e)^2}{k_B T} \left(\psi - \frac{k_B T}{z_i e} \ln \frac{n_{ext}}{n_{int}} \right) = \frac{d_i}{\int_0^\delta \frac{dx}{n_i(x)}} (\psi - V_i)$$

⇒
$$j_i = g_i (\psi - V_i) \quad \text{avec } g_i = \frac{d_i}{\int_0^\delta \frac{dx}{n_i(x)}} \quad \text{et } \alpha_i = \frac{D_i (z_i e)^2}{k_B T}$$

c) Pour le système {membrane, ion}, le schéma électrique équivalent est donc, pour une surface dS d'interface :



car
$$\psi = V_i + \frac{1}{g_i dS} \underbrace{j_i dS}_{\text{intensité de courant électrique}}$$

$g_i dS$ est la conductance de l'interface de surface dS

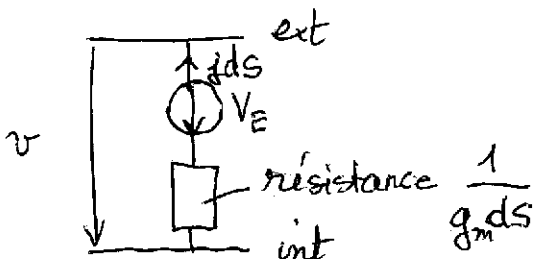
g_i est la conductance surfacique relative à l'ion de type i .

d)
$$j = \sum_{i=1}^N g_i (\psi - V_i) = \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) \left(\psi - \frac{\sum_{i=1}^N g_i V_i}{\sum_{i=1}^N g_i} \right)$$

$j = 0$ (équilibre) pour $\psi = V_E = \frac{\sum_{i=1}^N g_i V_i}{\sum_{i=1}^N g_i}$ potentiel à l'équilibre

$j = g_m (\psi - V_E)$

La membrane est donc équivalente à :



$g_m dS$ est la conductance totale de la membrane pour une surface dS d'interface

g_m est la conductance surfacique totale de la membrane

e) $V_E = \frac{g_{Na^+} V_{Na^+} + g_{K^+} V_{K^+}}{g_{Na^+} + g_{K^+}}$ les courants ioniques se compensent ($j=0$), on compare les conductances

$V_E (g_{Na^+} + g_{K^+}) = g_{Na^+} V_{Na^+} + g_{K^+} V_{K^+}$

$g_{Na^+} (V_E - V_{Na^+}) = g_{K^+} (V_{K^+} - V_E) \Rightarrow \frac{g_{Na^+}}{g_{K^+}} = \frac{V_{K^+} - V_E}{V_E - V_{Na^+}}$

$\frac{AN}{g_{K^+}} \frac{g_{Na^+}}{g_{K^+}} = \frac{-80 + 70}{-70 - 60} = \frac{10}{150} < 0,1$

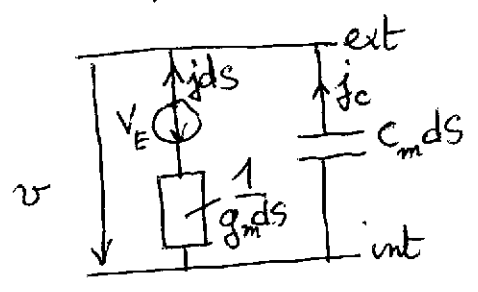
\Rightarrow les ions K^+ jouent un rôle prépondérant dans la conduction de la membrane.

23) a) * La capacité d'un condensateur plan de surface d'armatures S est

$C_m S = \frac{\epsilon_m S}{\delta}$ δ est la distance entre les armatures $\Rightarrow C_m = \frac{\epsilon_m}{\delta}$

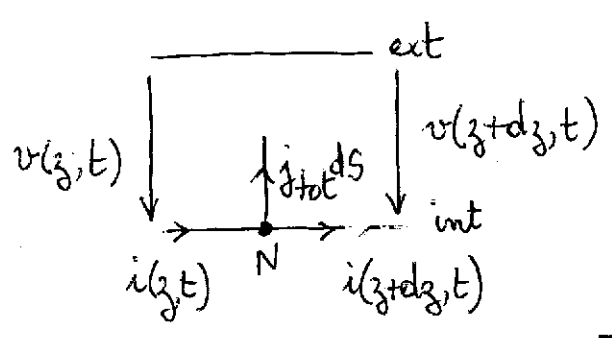
* $j_c dS = C_m dS \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow j_c = C_m \frac{\partial v}{\partial t}$

* pour l'ensemble {membrane, ions} le schéma équivalent est donc, pour une surface dS de membrane :



b) $C_m = \frac{8 \epsilon_0}{\delta} = \frac{8 \times 8,85 \cdot 10^{-12}}{7 \cdot 10^{-9}} = 10^{-2} \text{ F} \cdot \text{m}^{-2} = C_m$

24) on utilise le schéma précédent : $j_{tot} = j + j_c$



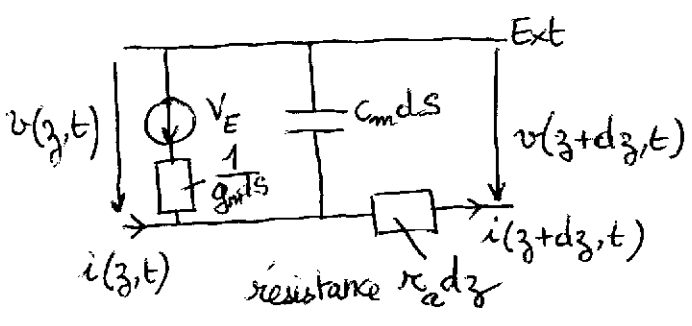
et $dS = 2\pi dz$
le bilan de charge est la loi de noeud au noeud N :

$i(z,t) = i(z+dz,t) + j_{tot} dS$

$-\frac{\partial i}{\partial z} dz = j_{tot} 2\pi dz$

donc $2\pi j_{tot} = -\frac{\partial i}{\partial z}$

25) On complète le schéma en tenant compte des résultats de la 1^{ère} partie : $\frac{\partial v}{\partial z} = -r_a i$ donne $v(z,t) = v(z+dz,t) + dz r_a i(z+dz,t)$



26)
$$\begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial z} = 2\pi a g_m (v - V_E) + 2\pi a c_m \frac{\partial v}{\partial t} & (\text{cf } 24) \\ -\frac{\partial v}{\partial z} = r_a i & (\text{cf } 18) \end{cases}$$

on élimine i entre ces 2 équations :

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = r_a \frac{\partial i}{\partial z} = -r_a 2\pi a g_m (v - V_E) - r_a 2\pi a c_m \frac{\partial v}{\partial t}$$

Donc
$$\frac{1}{r_a 2\pi a g_m} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{c_m}{g_m} \frac{\partial v}{\partial t} - (v - V_E) = 0$$

c'est bien la forme proposée avec
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi a r_a g_m}} \text{ et } \tau = \frac{c_m}{g_m}$$

27) a) * si v est indépendant du temps

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (v - V_E) = 0 \Rightarrow v = V_E + A_1 e^{\frac{z}{\lambda}} + A_2 e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

* si v est indépendant de z

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} + (v - V_E) = 0 \Rightarrow v = V_E + A_3 e^{-t/\tau}$$

b) λ est alors la longueur caractéristique de l'atténuation, et τ le temps de relaxation.

AN.
$$\lambda = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m et } \tau = 1 \text{ ms}$$

28) * On tient compte des effets capacitifs :

$$j = \begin{cases} g_m (v - V_E) + c_m \frac{\partial v}{\partial t} & \text{pour } v - V_E < V_1 \\ g (v - V_E - V_2) + c_m \frac{\partial v}{\partial t} & \text{pour } v - V_E > V_1 \end{cases} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial i}{\partial z}$$

en fonction de V :

$$j = \begin{cases} g_m V + c_m \frac{\partial V}{\partial t} & \text{pour } V < V_1 \\ g(V - V_2) + c_m \frac{\partial V}{\partial t} & \text{pour } V > V_1 \end{cases} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial i}{\partial z}$$

et $\frac{\partial V}{\partial z} = -\kappa_a i \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa_a} \frac{\partial V}{\partial z}$

Finalemment :

$$\begin{cases} g_m V + c_m \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2\pi a \kappa_a} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \text{pour } V < V_1 \\ g(V - V_2) + c_m \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2\pi a \kappa_a} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & \text{pour } V > V_1 \end{cases}$$

ie

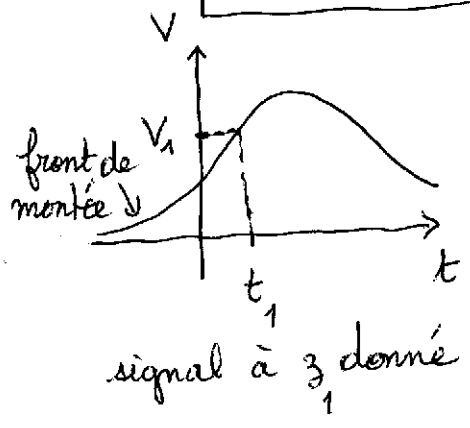
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - 2\pi a \kappa_a c_m \frac{\partial V}{\partial t} - 2\pi a \kappa_a g_m V = 0 & \text{pour } V < V_1 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - 2\pi a \kappa_a c_m \frac{\partial V}{\partial t} - 2\pi a \kappa_a g(V - V_2) = 0 & \text{pour } V > V_1 \end{cases}$$

(29) $s = z - ut$ donc $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{ds} \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{dV}{ds}$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = -u \frac{dV}{ds}$
 $V(s) = V(z - ut)$
 $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 V}{ds^2}$

a)

$$\begin{cases} \frac{d^2 V}{ds^2} + 2\pi a \kappa_a c_m u \frac{dV}{ds} - 2\pi a \kappa_a g_m V = 0 & \text{pour } V < V_1 \quad (1) \\ \frac{d^2 V}{ds^2} + 2\pi a \kappa_a c_m u \frac{dV}{ds} - 2\pi a \kappa_a g(V - V_2) = 0 & \text{pour } V > V_1 \quad (2) \end{cases}$$

(Note: g_m is negligible in equation 1)



$V < V_1$ pour $t < t_1$ $s = z_1 - ut > z_1 - ut_1$
 on peut choisir l'origine des temps et/ou de Oz pour que V_1 soit atteint en $z=0$ pour $t_1=0$
 alors $V < V_1$ pour $s > 0$
 $V > V_1$ pour $s < 0$

b) * (1) donne $\frac{dV}{ds} = A e^{-2\pi a \kappa_a c_m u s}$

$\Rightarrow V(s) = A_1 e^{-2\pi a \kappa_a c_m u s} + B_1$ si $V < V_1$ (ie $s > 0$)

C'est la forme annoncée avec $\gamma_1 = 2\pi a \kappa_a c_m u$

* (2) donne

$V(s) = A_2 e^{\gamma_2 s} + A'_2 e^{\gamma'_2 s} + B_2$ ($s < 0$) divergente

γ_2 et γ'_2 étant les solutions de $\gamma^2 + 2\pi a \kappa_a c_m u \gamma - 2\pi a \kappa_a g = 0$
 les solutions sont de signes contraires, on choisit la solution positive γ_2 , sinon $V(s)$ diverge pour $s \rightarrow -\infty$

$\gamma_2 = -\pi a \kappa_a c_m u + \sqrt{(\pi a \kappa_a c_m u)^2 + 2\pi a \kappa_a g}$

$B_2 = V_2$

(solution indépendante de s)

* $s \rightarrow +\infty$ $V \rightarrow 0$ donc $B_1 = 0$

* $V(0) = V_1 \Rightarrow A_1 = V_1$

$= A_2 + V_2 \Rightarrow A_2 = V_1 - V_2$

* Finalement

$V(s) = \begin{cases} V_1 e^{-\gamma_1 s} & \text{pour } s > 0 \\ (V_1 - V_2) e^{\gamma_2 s} + V_2 & \text{pour } s < 0 \end{cases}$

(30) $i(s) = -\frac{1}{\kappa_a} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa_a} \frac{dV}{ds}$

La continuité en $s=0$ impose $-\gamma_1 V_1 = \gamma_2 (V_1 - V_2)$

ie $(V_2 - V_1) \gamma_2 = V_1 \gamma_1$

(31) $(V_2 - V_1) \left(-\pi a \kappa_a c_m u + \sqrt{(\pi a \kappa_a c_m u)^2 + 2\pi a \kappa_a g} \right) = V_1 2\pi a \kappa_a c_m u$

$(V_2 - V_1) \sqrt{(\pi a \kappa_a c_m u)^2 + 2\pi a \kappa_a g} = (V_1 + V_2) \pi a \kappa_a c_m u$

$(V_2 - V_1)^2 ((\pi a \kappa_a c_m u)^2 + 2\pi a \kappa_a g) = (V_1 + V_2)^2 (\pi a \kappa_a c_m u)^2$

$g (V_2 - V_1)^2 = 2 V_1 V_2 (\pi a \kappa_a c_m^2) u^2 \Rightarrow u^2 = \frac{g}{2\pi a \kappa_a c_m^2} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2}$

$u^2 = \frac{g a \sigma_1}{2 c_m^2} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2}$

$\Rightarrow u$ est proportionnelle à \sqrt{a}

(32) $u = 7 \text{ m s}^{-1}$

pour $a = 0,2 \text{ mm}$, $u = 40 \text{ m s}^{-1}$