Corrigé du DS commun de physique n°5 - Ondes mécaniques
de l'instrument à corde au nerf auditif

I- Onde sur une corde

1) Mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre

1.a)

/3 Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de longueur $\mathrm{d}\ell \approx \mathrm{d}x$, de masse $dm = \mu d\ell$, est soumis à :

- la tension en $x + \mathrm{d}x$ de la portion de fil située à droite : $\vec{T}(x + \mathrm{d}x, t)$;
- la tension en x de la portion de fil située à gauche : $-\vec{T}(x, t)$.

Le mouvement de la corde ayant lieu selon Oy, le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de corde s'écrit :

$$\mathrm{d}m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + \mathrm{d}x, t) - \vec{T}(x, t)$$

La projection sur Ox donne

$$0 = T(x + \mathrm{d}x, t) \cos\alpha(x + \mathrm{d}x, t) - T(x, t) \cos\alpha(x, t) \approx T(x + \mathrm{d}x, t) - T(x, t) \Rightarrow T(x, t) = T_0$$

à l'ordre 1 en $\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ puisque les angles sont petits. La projection sur Oy donne, en effectuant de même un développement limité à l'ordre 1 en $\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ puisque les angles sont petits :

$$\mu \, \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \sin\alpha(x + \mathrm{d}x, t) - T_0 \sin\alpha(x, t) \approx T_0 \left[\alpha(x + \mathrm{d}x, t) - \alpha(x, t)\right] = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \mathrm{d}x = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \mathrm{d}x$$

On trouve donc

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où $\boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$.

1.b)

/3 La forme générale des solutions de l'équation (1) est :

- toute superposition des fonctions $y(x, t) = f\,(x - c\,t) + g\,(x + c\,t)$;
- toute superposition d'OPPM : $y(x, t) = y_0 \cos\left(\omega\,t \pm k\,x + \varphi\right)$;
- toute superposition d'OPSM : $y(x, t) = y_0 \cos\left(\omega\,t + \varphi_1\right) \cos\left(k\,x + \varphi_2\right)$

où $k = \frac{\omega}{c}$.

1.c)

/1

- pour la corde de guitare : $c = \sqrt{\frac{103}{3 \times 10^{-3}}} = 3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1} \Rightarrow \boxed{c = 1,9 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$;
- pour la corde de piano : $c = \sqrt{\frac{850}{7800 \times \frac{\pi (1,2 \times 10^{-3})^2}{4}}} \Rightarrow \boxed{c = 3,1 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

2) Modes propres, fréquences propres

2.a)

/1 A cause des conditions aux limites, il faut prendre des ondes stationnaires, et pas progressives :

$$y(x, t) = y_0 \cos\left(\omega\,t + \varphi\right) \cos\left(k\,x + \psi\right)$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2\, y(x, t)$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2\, y(x, t)$

$(1) \Rightarrow \omega^2 = c^2\, k^2$, soit $\boxed{\omega = c\,k}$.

2.b)

/2 Les conditions aux limites imposent :

$$\forall t,\ y(0, t) = 0 \Rightarrow y(x, t) = y_0 \cos\left(\omega\,t + \varphi\right) \sin\left(k\,x\right)$$

et

$$\forall t,\ y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin\left(k\,L\right) = 0 \Leftrightarrow k\,L = n\pi \Leftrightarrow k = \frac{n\,\pi}{L}$$

où n est entier. Or, comme on a vu que $\omega = c\,k$, alors $\boxed{f_n = \frac{n\,c}{2\,L}}$ où n est entier sont les fréquences propres.
L'élongation correspondante, $\boxed{y(x,t) = y_0 \cos\left(\frac{n\,\pi\,c\,t}{L} + \varphi\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)}$ est le mode propre associé.

2.c)

/1 Un nœud de vibration est un point qui reste immobile :

$$\forall t,\; y(x,t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\,\pi\,x}{L} = p\,\pi \Leftrightarrow x = \frac{p}{n} L = \frac{p\lambda}{2}$$

où p est entier.
Un ventre de vibration est un point où l'amplitude de vibration est maximale :

$$\forall t \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{n\,\pi\,x}{L} = q\,\pi + \frac{\pi}{2} = (2\,q+1)\,\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2\,q+1)\,\frac{L}{2\,n} = (2\,q+1)\,\frac{\lambda}{4}$$

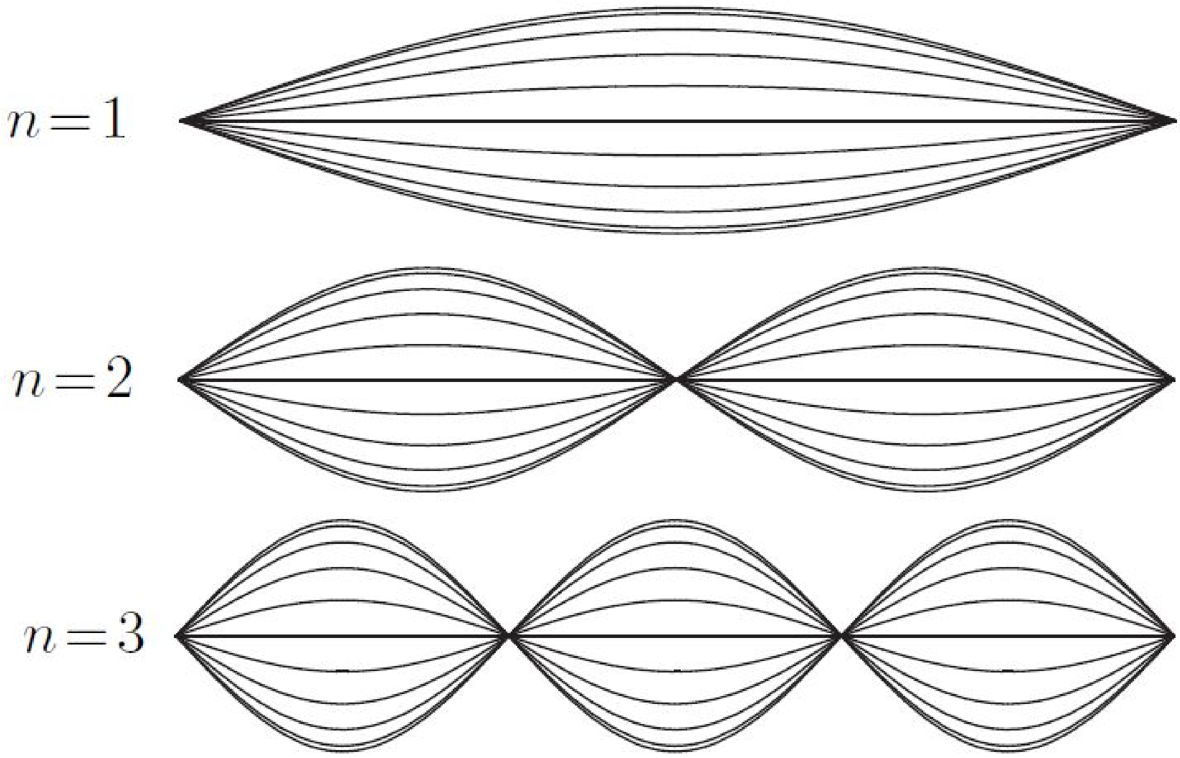
où q est entier.

$\boxed{\text{Deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs sont donc distants de } \frac{\lambda}{2}}$.

$\boxed{\text{Un nœud et un ventre consécutifs sont distants de } \frac{\lambda}{4}}$.

2.d)

/3 L'aspect de la corde est donné sur la figure suivante :



2.e)

/1 Une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde : $\boxed{\text{la corde de Melde}}$.

2.f)

/2 On impose donc $f_1 = 147$ Hz $= \frac{c}{2L}$. Aussi,

- pour la corde de guitare : $c = 1,9 \times 10^2$ m $\cdot$ s^{-1} $\Rightarrow$ $\boxed{L = 65 \text{ cm}}$;
- pour la corde de piano : $c = 3,1 \times 10^2$ m $\cdot$ s^{-1} $\Rightarrow$ $\boxed{L = 1,1 \text{ m}}$.

II- Ondes acoustiques

3) Equation de propagation d'ondes acoustiques dans l'air

3.a)

/1 L'approximation acoustique consiste à considérer :
- les perturbations dues à l'onde faibles devant les grandeurs d'équilibre,
- la vitesse des particules de fluide faible devant la célérité des ondes.

/1 Équation de continuité : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho\,\vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\,(\rho_0\,\vec{v}) = 0}$ linéarisée.

/1 Équation d'Euler (on néglige le poids) : $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\,(P) \Rightarrow \boxed{\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,(p)}$ linéarisée.

/1 Compressibilité du milieu : $\chi_s = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = +\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} \Rightarrow \boxed{\chi_s = +\frac{1}{\rho_0}\frac{\mu}{p}}$ linéarisée.

/1 La compressibilité dans l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial\left(\chi_s\,\rho_0\,p\right)}{\partial t} + div\,(\rho_0\,\vec{v}) = 0 \Rightarrow \chi_s\frac{\partial p}{\partial t} + div\,(\vec{v}) = 0$$

qu'on dérive par rapport au temps :

$$\chi_s\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\,(\vec{v})\right) = \chi_s\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + div\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = 0$$

En injectant l'équation d'Euler, on trouve :

$$\chi_s\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + div\left(-\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{grad}\,(p)\right) = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0\,\chi_s}\Delta\,p}$.

/1 On en déduit l'expression de la célérité $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_s}}}$ de ces ondes.

3.b)

/1 Dans le modèle du gaz parfait, $\chi_s = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}$ à S constante. Comme $P\,V^{\gamma} = cste$ (loi de Laplace pour une transformation isentropique), $\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} = -\frac{V}{\gamma\,P}$. Aussi $\chi_s = \frac{1}{\gamma\,P}$,qu'on réinjecte dans l'expression de la célérité : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_s}}$. Comme $\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{M\,n}{V} = \frac{M\,n\,P}{n\,R\,T}$ d'après la loi des gaz parfaits. Donc $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}}}$.

/1 Dans l'air à la température de 290 K, $\boxed{c = 3,4\times 10^{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

/1 La célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi_s}}$ des ondes acoustiques dans l'eau est plus grande car, si ρ_0 est plus grande dans l'eau, χ_s est beaucoup plus petite.

3.c)

/1 D'après la formule donnée :

$$div\,(p\,\vec{v}) = \vec{\nabla}\,(p\,\vec{v}) = p\,\vec{\nabla}\,(\vec{v}) + \vec{\nabla}\,(p)\ \vec{v} = p\,div\,(\vec{v}) + \overrightarrow{grad}\,(p)\cdot\vec{v}$$

Or la compressibilité dans l'équation de continuité donne :

$$\chi_s\frac{\partial p}{\partial t} + div\,(\vec{v}) = 0 \Rightarrow p\,div\,(\vec{v}) = -\chi_s\,p\,\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\chi_s}{2}\frac{\partial\left(p^2\right)}{\partial t}$$

et l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,(p) \Rightarrow \overrightarrow{grad}\,(p)\cdot\vec{v} = -\rho_0\,\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial\left(\vec{v}^2\right)}{\partial t}$$

En injectant les deux précédentes équations dans la première, on trouve bien $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0\,v^2 + \frac{1}{2}\chi_s\,p^2\right) + div\,(p\,\vec{v}) = 0$.

Interprétation :

/1 $\frac{1}{2}\rho_0\,v^2$ est l'énergie cinétique par unité de volume

/1 $\frac{1}{2}\chi_s\,p^2$ est l'énergie potentielle par unité de volume

/1 $div\,(p\,\vec{v})$ donne par définition de la divergence (Ostrogradsky) le flux de $p\,\vec{v}$ par unité de volume.

/1 Donc la signification physique de cette équation est simplement la $\boxed{\text{conservation de l'énergie}}$, $p\,\vec{v}$ étant le vecteur densité de courant de puissance acoustique.

4) Solution progressive de l'équation de propagation

4.a)

/1 L'impédance peut se réécrire

$$Z = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \frac{p_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t - k\,x)}}{\underline{v}_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t - k\,x)}} = \frac{p_0}{\underline{v}_0}$$

Or l'équation d'Euler linéarisée donne :

$$\rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,(p) \Rightarrow \rho_0\,j\,\omega\underline{v}_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t - k\,x)} = +j\,k\,p_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t - k\,x)} \Rightarrow \rho_0\,\omega\underline{v}_0 = k\,p_0 \Rightarrow Z = \frac{p_0}{\underline{v}_0} = \frac{\rho_0\,\omega}{k}$$

soit $\boxed{Z = \rho_0\, c}$: cette impédance ne dépend que des caractéristiques du fluide.

/1 Ainsi $\boxed{Z = 4,1 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$ pour l'air et $\boxed{Z = 1,5 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$ pour l'eau.

4.b)

/1 L'intensité I de cette onde est

$$I = < p\, v > = < p_0 \cos(\omega\, t - k\, x)\ v_0 \cos(\omega\, t - k\, x) > = \frac{p_0\, v_0}{2} = \frac{p_0^2}{2\, Z}$$

donc $\boxed{I = \frac{p_0^2}{2\,\rho_0\, c}}$.

4.c)

/1 Donc

$$p_0 = \sqrt{2\, I\, Z} \Rightarrow v_0 = \frac{p_0}{Z} = \sqrt{\frac{2\, I}{Z}}$$

/1 Au seuil d'audition : $I = I_0 = 10^{-12}$ W $\cdot$ m^{-2}, ce qui donne $\boxed{p_0 = 3 \times 10^{-5} \text{ Pa}}$ et $\boxed{v_0 = 7 \times 10^{-8} \text{ Pa}}$.

/1 Au seuil de la douleur $I = I_s = 1$ W $\cdot$ m^{-2}, ce qui donne $\boxed{p_0 = 3 \times 10 \text{ Pa}}$ et $\boxed{v_0 = 7 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

/1 Dans les deux cas, l'approximation acoustique est bien valide :

- les perturbations dues à l'onde faibles devant les grandeurs d'équilibre : $p_0 \ll P_0 = 10^5$ Pa ;
- la vitesse des particules de fluide faible devant la célérité des ondes : $v_0 \ll c = 343$ m $\cdot$ s^{-1}.

5) Le conduit auditif de l'oreille externe

5.a)

/1 En $x = 0$, le conduit auditif est en contact avec l'atmosphère, donc $P = P_0 \Rightarrow p(x = 0, \forall t) = 0$: il y a un nœud de vibration pour la surpression.

/1 En $x = \ell$, le conduit auditif est en contact avec un solide (le tympan), donc $v(x = \ell, \forall t) = 0$: il y a un nœud de vibration pour la vitesse.

5.b)

/1 Le conduit auditif correspond donc à un demi-fuseau (de longueur $\lambda/4$) plus un nombre entier de fuseaux (chacun de longueur $\lambda/2$). Aussi, il existe k entier naturel tel que

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}(1 + 2\, k) = \frac{c}{4\, f}(1 + 2\, k)$$

soit $\boxed{f = \frac{c}{4\,\ell}(1 + 2\, k)}$.

/1 AN : $k = 0 \Rightarrow \boxed{f = 2,8 \text{ kHz}}$, $k = 1 \Rightarrow \boxed{f = 8,5 \text{ kHz}}$, $k = 2 \Rightarrow \boxed{f = 14 \text{ kHz}}$, $k = 3 \Rightarrow \boxed{f = 20 \text{ kHz}}$ (au delà, on sort de la zone audible).

6) Si le contact entre milieu aérien et milieu liquide se fait sans intermédiaire.

6.a)

/1 A la traversée de l'interface, la pression doit être continue (donc la surpression), ainsi que le débit volumique (donc aussi la vitesse,puisque la section reste constante).

6.b)

/2 Onde incidente : $\underline{p}_i = \underline{p}_{0i}\, e^{j(\omega\, t - k\, x)}$ et $\underline{v}_i = \frac{\underline{p}_{0i}}{Z_1}\, e^{j(\omega\, t - k\, x)}$.

Onde réfléchie : $\underline{p}_r = \underline{r}\,\underline{p}_{0i}\, e^{j(\omega\, t + k\, x)}$ et $\underline{v}_r = \frac{\underline{r}\,\underline{p}_{0i}}{-Z_1}\, e^{j(\omega\, t + k\, x)}$.

Onde transmise : $\underline{p}_t = \underline{t}\,\underline{p}_{0i}\, e^{j(\omega\, t - k\, x)}$ et $\underline{v}_t = \frac{\underline{t}\,\underline{p}_{0i}}{Z_2}\, e^{j(\omega\, t - k\, x)}$.

Les conditions de continuité en $x = 0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{p}_{0i} + \underline{r}\,\underline{p}_{0i} = \underline{t}\,\underline{p}_{0i} \Rightarrow 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ \frac{\underline{p}_{0i}}{Z_1} + \frac{\underline{r}\,\underline{p}_{0i}}{-Z_1} = \frac{\underline{t}\,\underline{p}_{0i}}{Z_2} \Rightarrow \frac{1 - \underline{r}}{Z_1} = \frac{\underline{t}}{Z_2} \end{cases}$$

La résolution donne $2 = \underline{t}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)$, soit $\boxed{\underline{t} = \frac{2\, Z_2}{Z_1 + Z_2}}$ et $\boxed{\underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$.

6.c)

/1 Le coefficient de réflexion relatif à l'intensité sonore I est

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{< |p_r\, v_r| >}{< |p_i\, v_i| >} = \frac{< |r\, p_{0i} \cos(\omega\, t + k\, x)\ \frac{r\, p_{0i}}{-Z_1} \cos(\omega\, t + k\, x)\,| >}{< |p_{0i} \cos(\omega\, t - k\, x)\ \frac{p_{0i}}{Z_1} \cos(\omega\, t - k\, x)\,| >} = r^2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Aussi, on trouve $\boxed{R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2}$.

/1 La conservation de l'énergie impose $R+T=1$, soit $\boxed{T = 1 - \left(\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\right)^2 = \frac{4\,Z_2\,Z_1}{(Z_1+Z_2)^2}}$.

6.d)

/1 AN : $\boxed{T = 1{,}1 \times 10^{-3}}$.

/1 Comme $T = \frac{I_t}{I_i}$ la chute de niveau sonore correspondant au passage de l'air à l'eau est

$$L_t - L_i = 10\,\log\left(\frac{I_t}{I_0}\right) - 10\,\log\left(\frac{I_i}{I_0}\right) = 10\,\log\left(\frac{I_t}{I_i}\right) = 10\,\log(T) \approx 10\,\log\left(10^{-3}\right) = 10 \times (-3)$$

soit $\boxed{L_t - L_i = -30\text{ dB}}$ (ce qui est considérable !).

7) Avec les articulations des osselet.

7.a)

/1 Etude du système étrier de moment d'inertie quasi-nul dans le référentiel de l'oreille supposé galiléen. Bilan des forces :

- liaison pivot (parfait), de moment : $M_{Oz} = 0$,
- force exercée par le tympan, de moment : $M_{Oz} = +d_1\,p_t\,S_1$ (où p_t est la surpression sur le tympan),
- force exercée par la platine, de moment : $M_{Oz} = +d_2\,p_p\,S_2$ (où p_t est la surpression sur la platine).

Le théorème du moment cinétique projeté suivant Oz donne

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t} = 0 = +d_1\,p_t\,S_1 + d_2\,p_p\,S_2 \Rightarrow p_p = -\frac{d_1}{d_2}\frac{S_1}{S_2}p_t$$

aussi, l'amplification de pression théorique correspondant est $\boxed{|\frac{p_p}{p_t}| = 26}$.

7.b)

/1 Le gain pour le niveau d'intensité acoustique est

$$L_p - L_t = 10\,\log\left(\frac{p_p^2}{I_0}\right) - 10\,\log\left(\frac{p_t^2}{I_0}\right) = 20\,\log\left(\frac{p_p}{p_t}\right) = 20\,\log(26)$$

L'AN donne $\boxed{L_p - L_t = 28\text{ dB}}$.

/1 La chaine d'osselets permet de concentrer la puissance sonore dans l'oreille interne.

8) L'oreille interne

8.a)

/1 La compressibilité isentropique est

$$\chi_s = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \Rightarrow \mathrm{d}P = -\frac{\mathrm{d}V}{V_0\,\chi_s}$$

/1 Or la variation de volume est $\mathrm{d}V = s\,x(t)$.

/1 Donc

$$\mathrm{d}P = P_{int}(t) - P_0 = -\frac{s\,x(t)}{V_0\,\chi_s}$$

(cqfd).

8.b)

/1 Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la masse m de fluide dans le tube donne

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho_0\,s\,\ell\,\ddot{x} = s\,(P_{int}(t) - P_{ext}(t)) = s\left(P_0 - \frac{s\,x(t)}{V_0\,\chi_s} - P_0 - p_m\,\cos(\omega\,t)\right) = -s\frac{s\,x(t)}{V_0\,\chi_s} - s\,p_m\,\cos(\omega\,t)$$

soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{s\,x(t)}{V_0\,\chi_s\,\rho_0\,\ell} = -\frac{p_m}{\rho_0\,\ell}\,\cos(\omega\,t)}$.

/1 C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2\,x(t) = f(t)$ de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = c\sqrt{\frac{s}{V_0\,\ell}}}$ car la célérité des ondes acoustiques dans le fluide est $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s\,\rho_0}}$.

8.c)

/2 En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω : $f(t) = Re\,(f_0\,\exp\left[j\,(\omega\,t)\right])$ et $x(t) = Re\,(x_0\,\exp\left[j\,(\omega\,t + \varphi)\right])$. L'équation de l'oscillateur harmonique devient

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)x_0\,e^{j\,\varphi} = f_0 \Rightarrow x_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

/1 donc l'amplitude x_0 de $x(t)$ tend vers l'infini (il y a résonance) si $\omega = \omega_0$.

9)

/3 Pour que les hautes fréquences excitent la base de la membrane alors que les fréquences basses en excitent l'extrémité, il faut que ω_0 diminue depuis la base jusqu'à l'extrémité. Donc on peut imaginer toutes sortes de schémas :

- soit s diminue vers l'extrémité,
- soit V_0 augmente vers l'extrémité,
- soit ℓ augmente vers l'extrémité,
- soit toute combinaison de ces trois précédentes évolutions.

III- Ondes électriques

10) Modélisation électrique de l'axone myélinisé

10.a)

/1 Loi des mailles : $u(x,t) = u(x+\mathrm{d}x,t) + r_a\ \mathrm{d}x\, i(x,t) \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial u}{\partial x} = r_a\, i(x,t)}$.

/1 Loi des nœuds :

$$i(x,t) = g_m\ \mathrm{d}x\, u(x+\mathrm{d}x,t) + c_m\ \mathrm{d}x \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} + i(x+\mathrm{d}x,t) \approx g_m\ \mathrm{d}x\, u(x,t) + c_m\ \mathrm{d}x \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i(x+\mathrm{d}x,t)$$

au premier ordre, soit $\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = g_m\, u(x,t) + c_m \frac{\partial u}{\partial t}}$.

10.b)

/1 On dérive la première par rapport à x :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a \frac{\partial i}{\partial x} = -r_a \left[g_m\, u(x,t) + c_m \frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

Donc $u(x,t)$ vérifie $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a\, g_m\, u + r_a\, c_m \frac{\partial u}{\partial t}}$.

11) Simplification de l'équation

11.a)

/1 L'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie en (3) $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a\, c_m \frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow$ $\boxed{r_a\, g_m\, u \text{ est négligeable devant les autres termes}}$.

11.b)

/1 En remplaçant par la solution proposée, cela revient à

$$r_a\, g_m \ll |j\,\omega\, r_a\, c_m|$$

soit $\omega \gg \frac{g_m}{c_m} = \frac{0{,}3\times10^{-3}}{0{,}32\times10^{-6}} \approx 10^3\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, soit $\boxed{f \gg 100\ \mathrm{Hz}}$, ce qui est valable donc pour les médiums et les aigus.

12) Propagation de l'onde électrique le long d'un axone myélinisé

12.a)

/1 L'équation (3) décrit un phénomène de diffusion.

/1 Cf. diffusions moléculaire ou thermique, propagation électromagnétique dans les métaux, ondes de viscosité...

12.b)

/1 En remplaçant par la solution proposée, cela revient à

$$(-j\,k)^2 = j\,\omega\, r_a\, c_m$$

soit $\boxed{k^2 = -j\,\omega\, r_a\, c_m}$.

/1 En posant les parties réelle k_r et imaginaire k_i de $k = k_r + j\,k_i$, on trouve :

$$\left(k_r^2 - k_i^2\right) + 2j\,k_r\,k_i = j\,\omega\, r_a\, c_m$$

Donc $k_i = \pm k_r$ et $\pm 2\,k_r^2 = -\omega\, r_a\, c_m$. La solution $k_i = +k_r$ est donc impossible, donc

$$-k_i = k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega\, r_a\, c_m}{2}}$$

/1 Les solutions s'écrivent :

$$\underline{u}(x,t) = u_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t-k\,x)} = u_0\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t-k_r\,x-j\,k_i\,x)} = u_0\,\mathrm{e}^{k_i\,x}\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t-k_r\,x)}$$

soit $\underline{u}(x,t) = u_+\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x}\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t-\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x)} + u_-\,\mathrm{e}^{+\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x}\,\mathrm{e}^{j(\omega\,t+\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x)}$

et pour l'onde réelle : $\boxed{u(x,t) = u_+\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x}\,\cos\left(\omega\,t-\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x\right) + u_-\,\mathrm{e}^{+\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x}\,\cos\left(\omega\,t+\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x\right)}$.

12.c)

/1 La vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \pm\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}}$$

donc $\boxed{v_\varphi = \pm\sqrt{\frac{2\,\omega}{r_a\,c_m}}}$.

/1 qui n'est pas constante : le milieu est dispersif.

/1 La vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_r} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k_r}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{r_a\,c_m}{2}}\frac{1}{2\sqrt{\omega}}}$$

donc $\boxed{v_g = \pm 2\sqrt{\frac{2\,\omega}{r_a\,c_m}} = 2v_\varphi}$.

12.d)

/1 On voit que le milieu est absorbant au fait que l'amplitude est décroissante, car multipliée par

$$\mathrm{e}^{\mp\sqrt{\frac{\omega\,r_a\,c_m}{2}}x} = \mathrm{e}^{\mp\frac{x}{\delta}}$$

avec la distance caractéristique d'atténuation $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\,r_a\,c_m}}}$.

/1 Cette distance caractéristique d'atténuation est d'autant plus petite que la fréquence est grande (effet de peau).

Barème

/78 au total.