

La terre, la mer et un peu de vent....

Problème 1 : Subduction et rebond post glaciaire

A Equilibre d'une plaque tectonique

1) a) Les forces appliquées à une particule de fluide de volume $d\tau$ sont : son poids : $d\vec{F}_{poids} = -\rho g d\tau \vec{u}_z$,

la force de frottement $d\vec{F}_{frott} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \vec{u}_x$ et la résultante des forces de pression $d\vec{F}_{pression} = -\overline{grad}P d\tau \vec{u}_z$

On écrit l'équation de Navier Stokes $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{grad}) \vec{v} \right) = -\overline{grad}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$

En régime permanent : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, avec $\vec{v} = v(z) \vec{u}_x$: $(\vec{v} \cdot \overline{grad}) \vec{v} = \left(v_x(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) (v_x(z) \vec{u}_x) = \vec{0}$

$\overline{grad}P = \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z$ (le gradient horizontal de pression est nul) et $\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} \vec{u}_x$

Il reste : $-\frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z - \rho g \vec{u}_z + \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \vec{u}_x = \vec{0}$ soit en projection : $-\frac{dP}{dz} - \rho g = 0$ et $\eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = 0$

b) La vitesse s'intègre en $v(z) = az + b$

La condition d'adhérence impose : $v(-h_A) = 0$ et $v(0) = v_0$ On en déduit : $v(z) = v_0 \left(1 + \frac{z}{h_A} \right)$

et la contrainte de cisaillement $\vec{\tau} = -\eta \frac{dv}{dz} \vec{u}_x$ s'exerçant sur la plaque soit $\vec{\tau} = -\eta \frac{v_0}{h_A} \vec{u}_x$

2) Par définition, $D_v = \iint \vec{v} d\vec{S} = \int_{-h_A}^0 v_0 \left(1 + \frac{z}{h_A} \right) dz \int_0^l dy + \int_0^{h_L} v_0 dz \int_0^l dy$ soit $D_v = v_0 \left(\frac{h_A}{2} + h_L \right) l$

asthénosphère lithosphère

3) On suppose l'existence d'un gradient de pression horizontal, soit $\frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x = k \vec{u}_x$ constant.

On a : $-\frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{u}_z - \rho g \vec{u}_z + \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \vec{u}_x = \vec{0}$ et en projection : $-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0$ et $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = 0$

On intègre $\eta \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{\partial P}{\partial x} = k$ en $v(z) = \frac{k}{2\eta} z^2 + cz + d$

Les mêmes conditions d'adhérence : $v(-h_A) = 0$ et $v(0) = v_0$ conduisent à $v(z) = \frac{k}{2\eta} z^2 + \left(\frac{kh_A}{2\eta} + \frac{v_0}{h_A} \right) z + v_0$

Le débit volumique est : $D_v = \iint \vec{v} d\vec{S} = \int_{-h_A}^0 \left(\frac{k}{2\eta} z^2 + \left(\frac{kh_A}{2\eta} + \frac{v_0}{h_A} \right) z + v_0 \right) l dz + \int_0^{h_L} v_0 l dz$

soit $D_v = \frac{k}{2\eta} \frac{h_A^3}{3} l - \left(\frac{k}{2\eta} h_A + \frac{v_0}{h_A} \right) \frac{h_A^2}{2} l + v_0 (h_A + h_L) l$.

La valeur de k qui annule D_v est donnée par :

$k \left(\frac{h_A^3}{6\eta} - \frac{h_A^3}{4\eta} \right) = -v_0 (h_A + h_L) + \frac{v_0 h_A}{2}$ soit $k = 12\eta \frac{v_0}{h_A^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_L}{h_A} \right)$ Finalement $\frac{\partial P}{\partial x} = 12\eta \frac{v_0}{h_A^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_L}{h_A} \right)$

On précise le profil de vitesse : en posant $A = 6 \left(\frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right)$, $k = \frac{2\eta v_0 A}{h_A^2}$ et $v(z) = v_0 \left(\frac{A}{h_A^2} z^2 + \frac{A+1}{h_A} z + 1 \right)$

4) La vitesse s'annule à la profondeur z_0 solution de $\frac{A}{h_A^2} z^2 + \frac{A+1}{h_A} z + 1 = 0$

$$\text{soit en } z = \frac{-\frac{A+1}{h_A} \pm \sqrt{\left(\frac{A+1}{h_A}\right)^2 - 4 \frac{A}{h_A^2}}}{2 \frac{A}{h_A^2}} = \frac{-\frac{A+1}{h_A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{(A+1)^2}} \right)}{2 \frac{A}{h_A^2}} = -h_A \frac{A+1}{2A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{(A+1)^2}} \right)$$

$$\text{On a : } \sqrt{1 - \frac{4A}{(A+1)^2}} = \sqrt{\frac{(A+1)^2 - 4A}{(A+1)^2}} = \sqrt{\frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}} = \frac{A-1}{A+1}$$

Il reste $z = -h_A \frac{A+1}{2A} \left(1 \pm \frac{A-1}{A+1} \right) = -\frac{h_A}{2A} \left((A+1) \pm (A-1) \right)$ soit $z = -h_A$ (forcément) ou $z = -\frac{h_A}{A}$

La vitesse s'annule en $z = -\frac{h_A}{A}$ Ce point est bien dans l'asthénosphère

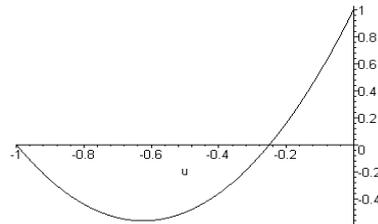
La vitesse s'annule en deux points de l'asthénosphère; il existe donc bien un point où la norme de la vitesse est maximale.

La vitesse de retour maximale est donnée par : $\frac{dv}{dz} = 0$ soit $v_0 \left(\frac{2A}{h_A^2} z + \frac{A+1}{h_A} \right) = 0$ et $z = -\frac{A+1}{2A} h_A$ (qui, on peut le vérifier, appartient bien à l'asthénosphère)

$$\text{On en déduit } \vec{v}_{max} = -\frac{(A-1)^2}{4A} v_0 \vec{u}_x$$

En posant $V^* = \frac{v(z)}{v_0}$ et $Z^* = \frac{z}{h_A}$, la loi de vitesse

adimensionnée s'écrit : $V^* = 4Z^{*2} + 5Z^* + 1$



5) La contrainte de cisaillement dans l'asthénosphère est $\vec{\tau} = -\eta \frac{dv}{dz} \vec{u}_x = -\eta v_0 \left(\frac{2A}{h_A^2} z + \frac{A+1}{h_A} \right) \vec{u}_x$

La contrainte de cisaillement n'est plus constante et dépend de l'épaisseur de la lithosphère.

On en déduit la contrainte s'exerçant sur la plaque : $\vec{\tau} = -\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=0} \vec{u}_x$ soit $\vec{\tau} = -2\eta \frac{v_0}{h_A} \left(3 \frac{h_L}{h_A} + 2 \right) \vec{u}_x$

6) a) On reprend les relations de pression : $-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial x} = k$ et l'on intègre :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \text{ soit } P(x, z) = -\rho g z + f(x) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = f'(x) = k \text{ donc } f(x) = kx + k' \text{ et } P(x, z) = -\rho g z + kx + k'$$

b) Les isobares sont données par $P(x, z) = -\rho g z + kx + k' = cte$; ce sont des plans d'équations $z = \frac{k}{\rho g} x + cte$

La lithosphère, soumise à la pression atmosphérique uniforme repose sur une isobare de l'asthénosphère.

c) La pression varie selon la direction des x . On peut prévoir un phénomène de basculement.

Le défaut d'horizontalité Δh d'une plaque de longueur L est calculé à partir de l'équation de la surface

$$\text{isobare soit : } \Delta h = \frac{kL}{\rho g}$$

7) La zone en subduction de volume, $(H + h_L)h_L l$ a pour poids $\rho_L (H + h_L)h_L l g$.

Le volume immergé $Hh_L l$ subit une poussée d'Archimède $\rho Hh_L l g$.

Le poids apparent est donc $F = \rho_L (H + h_L)h_L l g - \rho Hh_L l g = (\rho_L (H + h_L) - \rho H)h_L l g$

La toute petite valeur de α permet de linéariser : $\Delta\rho = -\rho\alpha\Delta T$ soit $\rho - \rho_L = -\rho\alpha\Delta T$ avec $\Delta T > 0$

et $\rho_L = \rho(1 + \alpha\Delta T)$ $F = \rho((1 + \alpha\Delta T)(H + h_L) - H)h_L l g$ et finalement $\vec{F} = -\rho(h_L + \alpha\Delta T(H + h_L))h_L l g \vec{u}_z$

8) On écrit l'équilibre de la plaque soumis à son poids apparent et aux forces visqueuses : $\vec{\tau} Ll + F \vec{u}_x = \vec{0}$

$$\text{soit } -2\eta \frac{v_0}{h_A} \left(3 \frac{h_L}{h_A} + 2 \right) Ll + F = 0 \quad \text{On déduit : } \eta = \frac{F h_A}{2 v_0 Ll \left(3 \frac{h_L}{h_A} + 2 \right)} ; \text{ avec } x = \frac{h_A}{h_L}, \quad \eta = \frac{F h_L}{2 v_0 Ll} \frac{x^2}{3 + 2x}$$

9) On a déjà calculé $\Delta h = \frac{kL}{\rho g}$ avec (cf question 3) $k = 12\eta \frac{v_0}{h_A^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_L}{h_A} \right)$ donc $\Delta h = \frac{3F}{\rho g h_L l} \frac{x + 2}{x(2x + 3)}$

10) Avec $h_A = 1000$ m, $x = 10$ et $\eta \approx 10^{22}$ Pa.s. On a un écoulement rampant

$$\text{On peut aussi calculer le nombre de Reynolds : } R_e = \frac{\rho UL}{\eta} \approx 5 \cdot 10^{-23}$$

B Rebond post glaciaire

11) On projette l'équation de Navier Stokes $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$ sur \vec{u}_x et \vec{u}_z :

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_x \vec{u}_x + v_z \vec{u}_z) = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et } \Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ 0 \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc : } \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{et } \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

12) La viscosité étant très grande, le nombre de Reynolds de l'écoulement sera très petit devant 1.

Le terme convectif sera négligeable devant le terme diffusif.

Par ailleurs, pour un écoulement très visqueux, l'hypothèse du régime quasistationnaire est vérifiée.

$$\text{Les équations précédentes se simplifient : } -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = 0$$

13) a) On injecte ces solutions dans les trois équations obtenues :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow kU(z) \cos(kx) + \frac{dV(z)}{dz} \cos(kx) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dV(z)}{dz} + kU(z) = 0 \quad (\text{Eq1})$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = 0 \rightarrow kP_m(z) \sin(kx) + \eta \left(-k^2 U(z) \sin(kx) + \frac{d^2 U(z)}{dz^2} \sin(kx) \right) = 0$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{d^2U(z)}{dz^2} - k^2U(z) + \frac{k}{\eta}P_m(z) = 0} \quad (\text{Eq2})$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = 0 \rightarrow \rho g - \frac{dP_m(z)}{dz} \cos(kx) - \rho g + \eta \left(-k^2V(z) \cos(kx) + \frac{d^2V(z)}{dz^2} \cos(kx) \right) = 0$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2V(z) - \frac{1}{\eta} \frac{dP_m(z)}{dz} = 0} \quad (\text{Eq3})$$

$$\text{b) } U(z) = -\frac{1}{k} \frac{dV(z)}{dz} \text{ donc } \frac{d^2U(z)}{dz^2} - k^2U(z) = -\frac{1}{k} \frac{d^3V(z)}{dz^3} - k^2 \left(-\frac{1}{k} \frac{dV(z)}{dz} \right) = -\frac{1}{k} \frac{d^3V(z)}{dz^3} + k \frac{dV(z)}{dz}$$

$$\text{En reportant dans (Eq2) : } -\frac{1}{k} \frac{d^3V(z)}{dz^3} + k \frac{dV(z)}{dz} + \frac{k}{\eta} P_m(z) = 0 \text{ soit en isolant } P_m(z) :$$

$$-\frac{1}{\eta} P_m(z) = -\frac{1}{k^2} \frac{d^3V(z)}{dz^3} + \frac{dV(z)}{dz}$$

$$\text{Enfin, } -\frac{1}{\eta} \frac{dP_m(z)}{dz} = -\frac{1}{k^2} \frac{d^4V(z)}{dz^4} + \frac{d^2V(z)}{dz^2} \text{ que l'on substitue dans (Eq3)}$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2V(z) - \frac{1}{k^2} \frac{d^4V(z)}{dz^4} + \frac{d^2V(z)}{dz^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^4V(z)}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2V(z)}{dz^2} + k^4V(z) = 0}$$

$$14) \text{ La conditions aux limites : } v_x(x, h_0 \cos(kx)) = 0 \rightarrow -\frac{Ak + B + Bkh_0 \cos(kx)}{k} \exp(kh_0 \cos(kx)) \sin(kx) = 0$$

$$\text{Cette relation devant être vérifiée pour tout } x : \frac{Ak + B + Bkh_0 \cos(kx)}{k} = 0 \text{ et avec } kh_0 \ll 1, Ak + B = 0$$

$$P(x, h_0 \cos(kx)) - \tau_z(x, h_0 \cos(kx)) = P_0 \cos(kx) \text{ soit}$$

$$-\rho gh_0 \cos(kx) - 2k\eta(A + Bkh_0 \cos(kx)) \exp(kh_0 \cos(kx)) \cos(kx) = P_0 \cos(kx)$$

$$-\rho gh_0 \cos(kx) - 2k\eta \left(A \left(\underbrace{1 - kh_0 \cos(kx)}_{\ll 1} \right) \right) \underbrace{\exp(kh_0 \cos(kx))}_{\approx 1} \cos(kx) = P_0 \cos(kx)$$

$$(-\rho gh_0 - 2k\eta A) \cos(kx) = P_0 \cos(kx) \text{ soit } -\rho gh_0 - 2k\eta A = P_0 \text{ et donc } \boxed{A = -\frac{P_0 + \rho gh_0}{2k\eta}} \quad \boxed{B = \frac{P_0 + \rho gh_0}{2\eta}}$$

$$15) \text{ Avec } v_z(x, h_0 \cos(kx)) = \frac{dh}{dt}, \text{ il vient } \frac{dh}{dt} = -\frac{P_0 + \rho gh_0}{2k\eta} (1 - kh_0 \cos(kx)) \exp(kh_0 \cos(kx)) \cos(kx)$$

$$\text{soit } \frac{dh}{dt} \approx -\frac{P_0 + \rho gh_0}{2k\eta} \cos(kx) \quad \text{Avec } h = h_0 \cos(kx), \text{ on identifie : } \frac{dh_0}{dt} = -\frac{P_0 + \rho gh_0}{2k\eta}$$

$$\text{La relation proposée s'écrit } -\alpha \frac{P_0 + \rho gh_0}{2k\eta} + h_0 = -\beta P_0 \text{ ou } -P_0 \left(\frac{\alpha}{2k\eta} + \beta \right) + \left(-\alpha \frac{\rho g}{2k\eta} + 1 \right) h_0 = 0$$

$$\text{Il vient } \frac{\alpha}{2k\eta} + \beta = 0 \text{ et } -\alpha \frac{\rho g}{2k\eta} + 1 = 0 \text{ soit } \boxed{\alpha = \frac{2k\eta}{\rho g}} \text{ et } \boxed{\beta = \frac{1}{\rho g}}$$

α homogène à un temps est la durée caractéristique du phénomène.

En régime permanent, l'amplitude est la même qu'en surface.

16) a) La calotte glaciaire a la forme d'une ondulation dont l'amplitude augmente linéairement avec le temps.

$$\boxed{H(t) = \frac{H_M}{t_M - t_0} (t - t_0)}$$

b) La pression $P_0(t)$ exercée par la calotte de glace est égal au poids d'une couche d'épaisseur $H(t)$ et de

surface unité, de masse volumique ρ_g , soit $P_0(t) = H(t)\rho_g g$

c) Avec $P_0(t) = \rho_g g H(t) = \frac{\rho_g g H_M}{t_M - t_0} (t - t_0)$, il vient $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -\beta P_0 = -\frac{\rho_g}{\rho} \frac{H_M}{t_M - t_0} (t - t_0)$

En posant $K = \frac{\rho_g}{\rho} \frac{H_M}{t_M - t_0}$, on résout cette équation de la forme $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -K(t - t_0)$

de solution générale $A \exp\left(-\frac{t-t_0}{\alpha}\right)$ et de solution particulière $B(t-t_0) + C$.

On détermine B et C en identifiant : $\alpha B + (B(t-t_0) + C) = -K(t-t_0)$ soit $B = -K$ et $C = -\alpha B = \alpha K$

La solution générale de l'équation complète est : $h_0(t) = A \exp\left(-\frac{t-t_0}{\alpha}\right) - K(t-t_0) + \alpha K$

On détermine A avec la condition initiale : $h_0(t_0) = 0 = A + \alpha K$ soit $A = -\alpha K$

On obtient finalement : $h_0(t) = \alpha K \left(1 - \exp\left(-\frac{t-t_0}{\alpha}\right)\right) - K(t-t_0)$

d) A l'instant t_M : $h_0(t_M) = \frac{\rho_g}{\rho} \frac{H_M}{t_M - t_0} \left(\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{t_M - t_0}{\alpha}\right)\right) - (t_M - t_0)\right)$

17) Actuellement, $H(t) = 0$. Il faut résoudre $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = 0$ avec $h_0(t_M) = h_M$ soit $h_0(t) = h_M \exp\left(-\frac{t-t_M}{\alpha}\right)$

On en déduit : $h_0(0) = h_M \exp\left(\frac{t_M}{\alpha}\right)$ et $\frac{dh_0}{dt}(t=0) = -\frac{h_M}{\alpha} \exp\left(\frac{t_M}{\alpha}\right)$

la profondeur actuelle et la vitesse actuelle de soulèvement.

18) a) La valeur de α permet de connaître η : $\alpha = \frac{2k\eta}{\rho g}$ soit $\eta = \frac{\rho g \alpha}{2k} = \frac{\rho g \alpha \lambda}{4\pi}$ AN : $|\eta = 10^{21} \text{ Pl}|$

b) Avec $H_M = 3 \text{ km}$, on peut en déduire h_M (qu 16) : $h_M = 104 \text{ m}$ et $\frac{dh_0}{dt}(t=0) = 2,5 \text{ mm/an}$

c) $|\text{La dépression a une amplitude de } 11 \text{ m}|$. La mer baltique (80 m de profondeur) devrait continuer à exister un certain temps...

Problème 2 : Etude d'un phénomène de surcote à Dunkerque

1) Les marées sont produites par l'effet d'attraction différentiel de la Lune et aussi du Soleil sur la Terre. Lorsque ces deux effets sont en conjonction, on a des marées de vives eaux, et lorsqu'ils se neutralisent, des marées de mortes eaux.

Application à Xaver

On sait que le coefficient de marées est un nombre sans dimension compris entre 20 et 120. Lors du passage de la tempête le 5 décembre, la marée avait le plus fort coefficient du mois (102-103).

Cette forte marée a eu un effet aggravant sur le phénomène de surcote.

2) Pour une mer au repos, on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides $\overline{\text{grad}P} = \rho_{\text{eau}} \vec{g}$

soit en projection sur un axe vertical conduit à $P - P_{\text{dep}} = \rho_{\text{eau}} g h_0$ et $h_0 = \frac{P - P_{\text{dep}}}{\rho_{\text{eau}} g}$

Application à Xavier

On relève une dépression maximale de 970 hPa soit $\Delta P = 1013 - 970 = 43 \text{ hPa} = 4300 \text{ Pa}$.

On en déduit $h_0 = 44 \text{ cm}$

- 3) On admet que dans la couche limite, les termes diffusifs et convectifs de quantité de mouvement dans l'air sont du même ordre de grandeur.

Avec les dimensions caractéristiques de l'énoncé, $\eta \Delta \vec{v} \approx \eta_{air} \frac{V_0}{\delta^2}$ et $\rho_{air} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \approx \rho_{air} \frac{V_0^2}{L}$

soit $\eta \frac{V_0}{\delta^2} \approx \rho_{air} \frac{V_0^2}{L}$. Il vient : $\delta = \sqrt{\frac{\eta_{air} L}{\rho_{air} V_0}}$

Application à Xavier

Avec des pics de vent de 70 km/h relevé sur le document météo, on calcule $\delta = 0,27 \text{ mm}$

Cette valeur dépend de la longueur typique L , celle des rides de surface. Celle-ci est certainement pas constante par gros temps. Néanmoins, intervenant dans une racine carrée, il faudrait faire varier L de 2 ordres de grandeur pour modifier δ dans un rapport de 10.

- 4) L'ordre de grandeur de la force tangentielle surfacique qu'exerce l'air sur la mer est donné par la contrainte

de cisaillement soit $\frac{dF}{dS} = \eta_{air} \frac{\partial v_x}{\partial z}$ en notant z la verticale et x la direction horizontale soit $\frac{dF}{dS} \approx \eta_{air} \frac{V_0}{\delta}$

- 5) a) En prenant comme origine de fond de la mer, et un axe vertical Oz ascendant, la pression dans la mer est donnée par $P_g(z) = P_0 + \rho_{eau} g(H - z)$ à la gauche du domaine, de profondeur H , et

$P_d(z) = P_0 + \rho_{eau} g(H + h - z)$ à la droite du domaine de profondeur $H + h$.

- b) L'élément de mer considéré est soumis aux forces de pressions latérales dues à l'eau $\vec{F}_{p,g}$ et $\vec{F}_{p,d}$, et aux forces de pression et de cisaillement dues à l'air $\vec{F}_{p,air}$ et $\vec{F}_{c,air}$

$$c) F_{p,g} = \int_0^H P_g(z) l dz = \int_0^H (P_0 + \rho_{eau} g(H - z)) l dz = P_0 l H + \rho_{eau} g l \frac{H^2}{2} \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{p,g} = \left(P_0 l H + \rho_{eau} g l \frac{H^2}{2} \right) \vec{u}_x$$

$$\text{De même, } \vec{F}_{d,g} = \int_0^{H+h} P_d(z) l dz (-\vec{u}_x) \quad \vec{F}_{d,g} = - \left(P_0 l (H+h) + \rho_{eau} g l \frac{(H+h)^2}{2} \right) \vec{u}_x \quad \text{en remplaçant } H \text{ par } H+h$$

$$\vec{F}_{p,air} = P_0 l \frac{D}{\cos \theta} (\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_z) = P_0 l D (\tan \theta \vec{u}_x - \vec{u}_z) \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{p,air} \approx -P_0 l D \vec{u}_z \quad \text{puisque } \theta \text{ est « très petit ».}$$

$$\vec{F}_{c,air} \approx \eta_{air} \frac{V_0}{\delta} l \frac{D}{\cos \theta} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z) \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{c,air} \approx \eta_{air} \frac{V_0}{\delta} l D \vec{u}_x \quad \text{puisque } \theta \text{ est « très petit ».}$$

- d) En négligeant la houle et les courants marins, on peut considérer que la zone de mer ne se déplace pas selon la direction horizontale et donc : $F_{p,g} - F_{p,d} + F_{c,air} = 0$

$$\text{Il vient} \quad \left(P_0 l H + \rho_{eau} g l \frac{H^2}{2} \right) - \left(P_0 l (H+h) + \rho_{eau} g l \frac{(H+h)^2}{2} \right) + \eta_{air} \frac{V_0}{\delta} l D = 0$$

$$\text{soit} \quad \eta_{air} \frac{V_0}{\delta} D = \rho_{eau} g \frac{(H+h)^2}{2} - P_0 h \quad \text{l'expression demandée}$$

En faisant l'hypothèse que $h \ll H$, $(H+h)^2 - H^2 = h(h+2H) \approx 2Hh$ soit

$$\eta_{air} \frac{V_0}{\delta} D = \rho_{eau} g H h + P_0 h = (\rho_{eau} g H + P_0) h \quad \text{et} \quad h = \frac{\eta_{air} V_0 D}{(\rho_{eau} g H + P_0) \delta}$$

Application à Xaver

La carte des vent indique que durant la tempête, les vents les plus violents étaient orientés dans la direction Nord Ouest / Sud Est soit de face à la cote dunkerquoise : c'était la situation la plus favorable pour un phénomène de surcote.

L'application numérique avec $H = 40$ m et D estimé sur la carte à 180 km, il vient $h = 47$ cm

- 6) a) Il s'agit de l'équation d'Euler écrite dans le référentiel terrestre non galiléen, avec un terme de force volumique d'inertie de Coriolis ; la force d'inertie d'entraînement est contenue dans le terme de pesanteur.

$$\vec{a} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\rho_{\text{air}}} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

Dans le cas de l'équilibre géostrophique, il reste $-\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\rho_{\text{air}}} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- b) Le long de l'axe (AD), le gradient de pression est uniforme et a pour norme $k = \frac{P_A - P_D}{d}$.

On a $\overrightarrow{\text{grad}P} = -k\vec{u}_{AD} = -k \cos\theta \vec{u}_x - k \sin\theta \vec{u}_y$

- c) L'équation d'équilibre géostrophique $-\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\rho_{\text{air}}} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se projette en

$$\frac{1}{\rho_{\text{air}}} \begin{vmatrix} k \cos\theta & 0 & 0 \\ k \sin\theta & 0 & -2\Omega \cos\lambda \\ 0 & -g & \sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad v_x = \frac{k \sin\theta}{2\rho_{\text{air}} \Omega \sin\lambda} \quad v_y = -\frac{k \cos\theta}{2\rho_{\text{air}} \Omega \sin\lambda}$$

$$\vec{v} = \frac{k}{2\rho_{\text{air}} \Omega \sin\lambda} (\sin\theta \vec{u}_x - \cos\theta \vec{u}_y) \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \frac{-k}{2\rho_{\text{air}} \Omega \sin\lambda} \vec{u}_\theta$$

avec \vec{u}_θ le vecteur unitaire normal à AD et dirigé vers le nord ouest. La vitesse est parallèle aux isobares et orientée vers le sud est.

Dans l'hémisphère Nord, le vent associé à une dépression souffle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et s'engouffre vers le centre dépressionnaire, alors que, pour un anticyclone, le vent sort du centre anticyclonique cette fois dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure de droite, ci-dessous).

Dans l'hémisphère Sud, $\lambda < 0$, le sens des vitesses est inversé.

Ces conclusions constituent la règle de Buys-Ballot (météorologiste hollandais, 1817-1890) déterminant la direction du centre d'une dépression d'après l'observation du vent : dans l'hémisphère Nord, le vent laisse les basses pressions à sa gauche (sur la droite dans l'hémisphère Sud) et plus les isobares sont serrées, plus le vent est fort.

Application à Xaver

On mesure 7 cm entre les centres des zones cyclonique et anticycloniques, soit avec l'échelle une distance

de 2450 km. En prenant $P_A = 1035$ hPa et $P_D = 970$ hPa, on trouve $k = \frac{6500}{2,45 \cdot 10^6} = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$

Avec $\lambda = 51^\circ$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ $v = \frac{k}{2\rho_{\text{air}} \Omega \sin\lambda}$ soit $v = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

On retrouve avec une bonne approximation la valeur relevée de 70 km du doc 4.

L'orientation des isobares au niveau de Dunkerque est bien du Nord Ouest vers le Sud Est, et compte tenu du profil de la cote, dirigé face à la cote.

7) Conclusion

En ajoutant la surcote barométrique h_0 et la surcote dynamique h , on obtient une surcote résultante de 91 cm.

Le marégraphe indique une surcote de 1,2 m. L'accord est satisfaisant, mais il faut majorer la valeur calculée à cause d'un effet de déferlement qui n'a pas été pris en compte dans la modélisation.