

Corrigé du DS commun de physique n°3
Quelques problèmes de mécanique spatiale

Préliminaires sur les forces centrales

P1. On applique le théorème du moment cinétique en O : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$, donc le moment cinétique en O, $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, est un vecteur constant. En conséquence, \vec{OM} reste constamment perpendiculaire à ce vecteur constant, donc M appartient au plan qui passe par O et qui est perpendiculaire à \vec{L}_O .

P2. a) $\vec{L}_O = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ est constant, donc $r^2\dot{\theta} = C$ est une constante.

b) $\vec{L}_O = m\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = mC\vec{e}_z$, donc $C = (\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0) \cdot \vec{e}_z$.

c) $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{dA}{dt}$ est la vitesse aréolaire, c'est-à-dire l'aire balayée par le rayon vecteur par unité de temps; cette vitesse aréolaire étant constante, "les aires balayées en des temps égaux sont égales" (loi des aires).

P3. La force $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$ dérive d'une énergie potentielle :

$$dE_p = -\vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{k}{r^2}\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{k}{r^2}dr \Rightarrow E_p = -\frac{k}{r}$$

à une constante près, posée nulle en choisissant l'origine de l'énergie potentielle nulle à l'infini.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique est conservée, puisque la seule force agissant sur le mobile est conservative.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r} = E$$

P4. a) Pour $r = r_p$ ou $r = r_A$, $\dot{r} = 0$, donc, r_p et r_A sont solutions de l'équation :

$$E = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r} \Leftrightarrow r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{1}{2}\frac{mC^2}{E} = 0$$

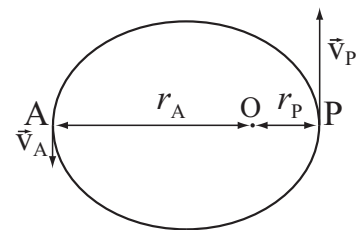
Dans les conditions d'un mouvement lié, cette équation a deux racines positives, dont la somme est

$$r_p + r_A = 2a = -\frac{k}{E}, \text{ d'où } E = -\frac{k}{2a}.$$

b) En A et P, $\dot{r} = 0$, donc la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur, donc la relation de la question P2.b) donne $C = r_A v_A = r_p v_p$.

c) Voir figure ci-contre.

d) L'orbite étant circulaire, le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile donne :



$$-ma\theta^2 = -\frac{k}{a^2} \Leftrightarrow ma\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{a^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k/m} \text{ Troisième loi de Kepler}$$

FIGURE 1 – Orbite elliptique

1 Étude du lanceur

1. Le système étudié est constitué de la fusée à l'instant t , dans le référentiel terrestre supposé galiléen (pas de forces d'inertie).

À l'instant $t + dt$, le système contient la fusée à l'instant $t + dt$ et la masse $D_m dt = -dm$ de gaz éjectés.

Ce système est soumis à son poids uniquement à partir du moment où la fusée a décollé; tant qu'elle n'a pas décollé, elle est soumise aussi à la force de contact exercée par le sol, de la forme $\vec{R} = R\vec{e}_z$, avec $R > 0$, d'où :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \begin{cases} m\vec{g} + \vec{R} & \text{avant décollage} \\ m\vec{g} & \text{après décollage} \end{cases}$$

On calcule, pour le système fermé qui a été défini, la variation de quantité de mouvement, en posant $d\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$ et en ne conservant que les termes du premier ordre :

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t+dt) &= m(t+dt) \vec{v}(t+dt) + D_m dt (\vec{u} + \vec{v}(t)) \\ &= (m(t) - D_m dt) (\vec{v}(t) + d\vec{v}) + D_m dt (\vec{u} + \vec{v}(t)) \\ &= m(t) \vec{v}(t) + m(t) d\vec{v} + D_m dt \vec{u} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}}$$

Finalement, en tenant compte des forces agissant sur le système :

$$\boxed{m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} -D_m \vec{u} + m \vec{g} + \vec{R} & \text{avant décollage} \\ -D_m \vec{u} + m \vec{g} & \text{après décollage} \end{cases}}$$

2. On projette sur Oz l'équation précédente après décollage :

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - mg$$

qui a bien la forme proposée avec $F = D_m u$; $[F] = M.T^{-1}.L.T^{-1} = M.L.T^{-2} = \boxed{[\text{force}] = [F]}$; F est orientée vers le haut, a donc la signification d'une force de poussée qui est due à l'éjection des gaz.

3. La fusée décolle si $\frac{dv}{dt} > 0 \Leftrightarrow F > m(0)g \Leftrightarrow \boxed{D_m u > m_0 g}$.

4. L'équation du mouvement devient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g \Rightarrow \boxed{v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right) - gt}$$

compte-tenu de la condition initiale $v(0) = 0$.

5. On se place dans le cas où, à la fin de la propulsion, $m_f = \frac{m_0}{10}$ et la pesanteur a un effet négligeable, d'où l'accroissement de vitesse :

$$\boxed{\Delta v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = u \ln(10)}$$

Application numérique : $\Delta v = 3,00 \ln(10) \text{ km.s}^{-1} = \boxed{6,91 \text{ km.s}^{-1} = \Delta v}$.

6. La propulsion obtenue à l'aide du premier étage correspond au passage de la masse de m_0 à $m_1 = \frac{m_0}{2} + \frac{m_0}{20} = \frac{11}{20} m_0$; celle du deuxième étage au passage de $m'_0 = \frac{m_0}{2}$ à $m'_1 = \frac{m'_0}{10} = \frac{m_0}{20}$, d'où l'accroissement total de vitesse :

$$\Delta v_{2 \text{ étages}} = u \ln \left(\frac{m_0}{m_1} \right) + u \ln \left(\frac{m'_0}{m'_1} \right) = u \left(\ln \left(\frac{20}{11} \right) + \ln(10) \right) = \boxed{u \ln \left(\frac{200}{11} \right) = \Delta v_{2 \text{ étages}}}$$

Application numérique : $\Delta v_{2 \text{ étages}} = 8,70 \text{ km.s}^{-1}$

On constate que $\Delta v_{2 \text{ étages}} > \Delta v_{1 \text{ étage}}$, ce qui montre l'intérêt, à masses égales, de la fusée à deux étages. Dans le cas d'étages de même masse, le gain de vitesse est de 26,0%.

7. a) On applique le résultat de P4.a) : $E = -\frac{GM_T m}{2a}$

b) Sur l'orbite (1), qui est circulaire de rayon r_0 , la 2^e loi de Newton projetée sur \vec{e}_r donne :

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{GM_T m}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

Application numérique : $v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{6750 \cdot 10^3}} = 7,68 \text{ km.s}^{-1} = v_0$.

c) L'orbite (O_t) a pour demi-grand axe a vérifiant $2a = r_0 + R$; l'énergie du satellite est donc :

$$E = -\frac{GM_T m}{r_0 + R} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_T m}{r_0} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + R} \right)} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0} \frac{2R}{r_0 + R}} = v_1$$

Les vitesses v_1 et v'_1 sont liées par $r_0 v_1 = R v'_1$ (loi des aires), d'où :

$$v'_1 = v_1 \frac{r_0}{R} = \sqrt{\frac{GM_T}{R} \frac{2r_0}{r_0 + R}} = v'_1$$

Application numérique : $v_1 = 10,0 \text{ km.s}^{-1}$ et $v'_1 = 1,61 \text{ km.s}^{-1}$.

d) Pour v_2 , sur l'orbite (2), on transpose le résultat de la question 7b) :

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

Application numérique : $v_2 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{42200 \cdot 10^3}} = 3,07 \text{ km.s}^{-1} = v_2$.

8. À l'issue de la première propulsion, la masse de la fusée est $m_1 = m_0 e^{-\frac{v_1 - v_0}{u}}$, et à l'issue de la seconde, $m_2 = m_1 e^{-\frac{v_2 - v'_1}{u}}$, donc $m_2 = m_0 e^{-\frac{v_1 - v_0 + v_2 - v'_1}{u}}$ et :

$$\frac{m_0 - m_2}{m_0} = 1 - \frac{m_2}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_1 - v_0 + v_2 - v'_1}{u}} = \frac{m_0 - m_2}{m_0}$$

Application numérique : $\frac{m_0 - m_2}{m_0} = 72,6\%$.

9. Un satellite qui parcourt l'orbite (2) a pour période $T = \frac{2\pi R}{v_2} = 86400 \text{ s} = 1 \text{ jour}$; si l'orbite se trouve dans le plan de l'équateur, c'est un satellite géostationnaire.

2 Interaction d'une sonde et d'une planète

10. Le référentiel géocentrique est le référentiel qui est en translation par rapport au référentiel de Copernic et où le centre de la Terre est fixe; on choisit dans ce référentiel un repère dont l'origine est le centre de la Terre et les axes pointent vers des étoiles lointaines considérées comme fixes.

De même, le référentiel planétocentrique est le référentiel qui est en translation par rapport au référentiel de Copernic, et où le centre de la planète est fixe; on choisit dans ce référentiel un repère dont l'origine est le centre de la planète et les axes pointent vers des étoiles lointaines considérées comme fixes.

11. La sonde se trouve dans un état de diffusion dans un champ de force newtonien attractif; sa trajectoire est donc une hyperbole, dont le centre de la Terre est un foyer; voir son allure sur le document réponse.

12. La sonde n'est soumise qu'à la force gravitationnelle exercée par la planète $\vec{F} = -G \frac{mM_p}{r^2} \vec{e}_r$. Comme c'est une force centrale, son moment en O est nul, donc le moment cinétique \vec{L}_O en O est conservé et on le calcule en M_0 :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge (m\vec{V}) = \vec{OM}_0 \wedge (m\vec{V}_0) = (x_0 \vec{e}_x - b \vec{e}_y) \wedge (mV_0 \vec{e}_x) = mbV_0 \vec{e}_z$$

finalement, $\vec{OM} \wedge \vec{V} = bV_0 \vec{e}_z$

Comme \vec{OM} est perpendiculaire à $\vec{L}_O = mbV_0\vec{e}_z$, le mouvement s'effectue dans le plan passant par O perpendiculaire à \vec{e}_z , c'est-à-dire le plan Oxy . En utilisant les coordonnées polaires dans ce plan, on trouve, $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mbV_0\vec{e}_z$ d'où la loi des aires : $r^2\dot{\theta} = bV_0$.

Par ailleurs, la force gravitationnelle est conservative :

$$dE_p = \frac{GM_P m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = \frac{GM_P}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -\frac{GM_P m}{r}$$

en choisissant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini. L'énergie de la sonde est donc conservée, on la calcule en M_0 :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_P m}{r} = \frac{1}{2}mV_0^2$$

À la fin de l'interaction, $r \rightarrow +\infty$, la conservation de l'énergie donne donc $\frac{1}{2}mV_0'^2 = \frac{1}{2}mV_0^2$, d'où $V_0' = V_0$. De même, la conservation du moment cinétique donne $\vec{OM} \wedge \vec{V} = b'V_0'\vec{e}_z = bV_0\vec{e}_z$, donc $b' = b$ si on tient compte du résultat précédent.

13. La distance minimale est obtenue pour $\dot{r} = 0$; alors $V^2 = r^2\dot{\theta}^2 = r^2 \left(\frac{bV_0}{r^2}\right)^2 = \frac{b^2V_0^2}{r^2}$. La conservation de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2}m \frac{b^2V_0^2}{r^2} - \frac{GM_P m}{r} = \frac{1}{2}mV_0^2 \Rightarrow r^2 + \frac{2GM_P}{V_0^2}r - b^2 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant simplifié $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{GM_P}{V_0^2}\right)^2 + b^2 > 0$, donc elle a deux racines réelles ; une seule est positive :

$$r_{min} = -\frac{GM_P}{V_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_P}{V_0^2}\right)^2 + b^2}$$

On observe que :

- • si $V_0 \rightarrow +\infty$, $r_{min} \rightarrow b$, la sonde a alors un mouvement rectiligne uniforme, ce qui est attendu car alors l'énergie potentielle d'interaction est toujours négligeable devant l'énergie cinétique ;
- • si $b \rightarrow 0$, $r_{min} \rightarrow 0$, ce qui est attendu car la sonde tombe alors sur la planète.

14. La sonde poursuit son mouvement sans s'écraser sur (P) à condition que :

$$r_{min} > R_P \Leftrightarrow -\frac{GM_P}{V_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_P}{V_0^2}\right)^2 + b^2} > R_P \Leftrightarrow b > R_P \sqrt{1 + \frac{2GM_P}{V_0^2 R_P}}$$

$$\text{donc } b > b_{min} \text{ avec } b_{min} = R_P \sqrt{1 + \frac{2GM_P}{V_0^2 R_P}}$$

On constate que $b_{min} > R_P$, ce qui est attendu, puisque la planète attire la sonde.

15. Application numérique : $b = b_{min}$ si Voyager 2 frôle Jupiter ;

$b_{min} = 6,99 \cdot 10^7 \sqrt{1 + \frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,90 \cdot 10^{27}}{6,99 \cdot 10^7 \times (10^4)^2}} = 42,7 \cdot 10^7 \text{ m} = 42,7 \cdot 10^4 \text{ km} = b_{min}$. b_{min} vaut environ 6 fois le rayon de Jupiter.

16. a) On écrit la 2^e loi de Newton, on utilise $r^2\dot{\theta} = bV_0$ (loi des aires) et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{GM_P m}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \theta \frac{d\vec{V}}{d\theta} = -\frac{GM_P}{r^2} \vec{e}_r = \frac{d\vec{V}}{d\theta} \frac{bV_0}{r^2} = \frac{GM_P}{r^2} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{d\theta} = \frac{GM_P}{bV_0} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$$

b) On intègre l'équation précédente entre la position initiale et la position finale :

$$\vec{V}'_0 - \vec{V}_0 = \frac{GM_P}{bV_0} (\vec{e}'_\theta - \vec{e}_{\theta_0})$$

avec $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$, $\vec{V}'_0 = V_0 \cos \varphi \vec{e}_x + V_0 \sin \varphi \vec{e}_y$, $\vec{e}_{\theta_0} = -\vec{e}_y$ et $\vec{e}'_\theta = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$ (voir document réponse), d'où :

$$V_0(\cos \varphi - 1) \vec{e}_x + V_0 \sin \varphi \vec{e}_y = \frac{GM_P}{bV_0} (-\sin \varphi \vec{e}_x + (\cos \varphi + 1) \vec{e}_y)$$

On projette et on fait intervenir l'angle $\varphi/2$:

$$-2V_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -2\frac{GM_P}{bV_0} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$2V_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\frac{GM_P}{bV_0} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{d'où } \boxed{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{GM_P}{bV_0^2}}$$

c) Pour $V_0 \rightarrow +\infty$, $\varphi \rightarrow 0$, ce qui est attendu, puisqu'alors l'énergie potentielle gravitationnelle est négligeable devant l'énergie cinétique.

Pour $b \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi$, ce qui correspond à un choc frontal de la sonde sur O; cette situation n'est pas réaliste, puisque la planète a un rayon non nul.

Pour $b = b_{min}$, $\varphi = 2,49 \text{ rad} = 142^\circ$, ce qui représente l'angle maximal de déviation d'une sonde arrivant à 10 km.s^{-1} au voisinage de Jupiter, compte-tenu du rayon de la planète.

d) Application numérique : pour $b = 500.10^4 \text{ km}$ et $V_0 = 10,0 \text{ km.s}^{-1}$, $\boxed{\varphi = 28,4^\circ}$.

3 Assistance gravitationnelle

17. Le théorème de la résultante cinétique, appliqué à Jupiter sur son orbite circulaire de rayon a_J , donne :

$$-M_J \frac{v_J^2}{a_J} = -\frac{GM_S M_J}{a_J^2} \Rightarrow \boxed{v_J = \sqrt{\frac{GM_S}{a_J}}}$$

$$\text{Application numérique : } v_J = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 2,00 \cdot 10^{30}}{7,78 \cdot 10^{11}}} = \boxed{13,1 \text{ km.s}^{-1} = v_J}$$

18. Sur la courbe de la figure 4, on observe que la vitesse héliocentrique de la sonde Voyager 2 passe par des pics et décroît entre chaque pic. Les pics correspondent aux passages à proximité des planètes : la force gravitationnelle étant attractive, l'énergie potentielle de la sonde diminue à l'approche d'une planète, donc son énergie cinétique augmente, jusqu'à la distance minimale calculée en partie 2; dans sa lancée, la sonde poursuit son chemin et s'éloigne de la planète avec une énergie cinétique décroissante; la distance au soleil a peu varié pendant ce processus, d'où l'apparition d'un pic fin; ensuite, la sonde continue de s'éloigner du Soleil, donc sa vitesse héliocentrique diminue, compte-tenu de la conservation de l'énergie pour le système Soleil-sonde.

On recense 4 épisodes d'assistance gravitationnelle sur le graphe; leurs caractéristiques sont rassemblées ci-dessous :

Planète	vitesse initiale V_{Hi}	vitesse finale V_{Hf}	$\Delta V_H = V_{Hf} - V_{Hi}$	ΔE_c	$\frac{\Delta E_c}{E_c}$
Jupiter	10 km.s^{-1}	20 km.s^{-1}	10 km.s^{-1}	$1,2 \cdot 10^{11} \text{ J}$	300%
Saturne	16 km.s^{-1}	24 km.s^{-1}	8 km.s^{-1}	$1,3 \cdot 10^{11} \text{ J}$	125%
Uranus	21 km.s^{-1}	22 km.s^{-1}	1 km.s^{-1}	$1,7 \cdot 10^{10} \text{ J}$	10%
Neptune	20 km.s^{-1}	$18,5 \text{ km.s}^{-1}$	$-1,5 \text{ km.s}^{-1}$	$-2,4 \cdot 10^{10} \text{ J}$	-14%

Les assistances gravitationnelles par Jupiter et Saturne ont été plus efficaces que celle par Uranus; la passage à proximité de Neptune a diminué la vitesse de la sonde au lieu de l'augmenter.

19. L'énergie cinétique de translation de la planète Jupiter vaut $E_{cJ} = \frac{1}{2} M_J v_J^2 = 1,6 \cdot 10^{35} \text{ J}$,

donc $\frac{\Delta E_{c\text{ sonde}}}{E_{cJ}} \approx 10^{-24}$. L'affirmation du document "Des milliers de sondes pourraient être envoyées de cette façon sans que Jupiter ne soit nullement perturbée dans sa course autour du Soleil" est donc amplement justifiée.

20. On utilise la composition des vitesses pour déterminer la vitesse de la sonde dans le référentiel jupitocentrique : $\vec{V}_0 = \vec{V}_{H0} - \vec{v}_J$, \vec{V}_{H0} et \vec{v}_J désignant les vitesses héliocentriques de la sonde et de Jupiter au début de l'interaction (cas général en (a), figure ci-dessous). La norme de \vec{V}_0 est maximale si les deux vitesses héliocentriques sont en sens inverse (cas (c)), minimale si elles sont dans le même sens (cas (b)).

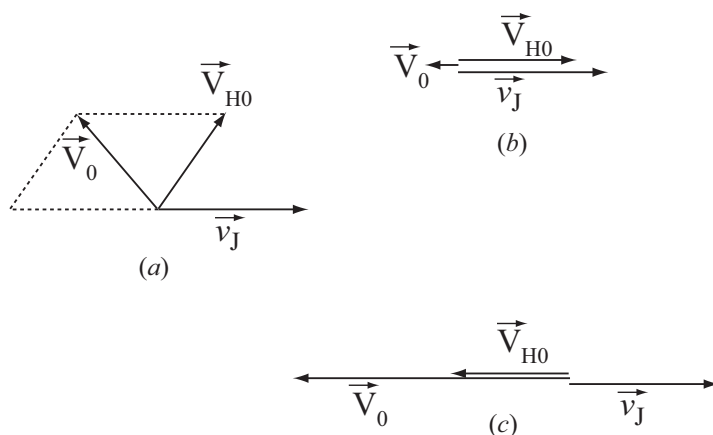


FIGURE 2 – Construction de la vitesse initiale de la sonde

Avec $V_{H0} = 10 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_J = 13 \text{ km.s}^{-1}$, on trouve que V_0 est compris entre 3 et 23 km.s^{-1} ; c'est bien l'ordre de grandeur de la vitesse envisagée dans la partie 2.

21. Voir le document réponse. a) On utilise la composition des vitesses : $\vec{V}_0 = \vec{V}_{H0} - \vec{v}_J$;
 b) La vitesse finale \vec{V}'_0 de la sonde dans le référentiel jupitocentrique est obtenue par rotation de \vec{V}_0 dans le sens horaire dans le cas où la sonde passe à l'arrière (schéma (1)) et dans le sens anti-horaire si elle passe à l'avant (schéma (2)), puisque la trajectoire est déviée vers la planète (voir partie 2).
 c) On utilise la composition des vitesses : $\vec{V}'_H = \vec{V}'_0 + \vec{v}_J$.
 d) À partir de la construction on constate que la norme de la vitesse héliocentrique de la sonde a bien augmenté dans le cas (1), diminué dans le cas (2), ce qui provient du fait que l'angle entre les vecteurs vitesse de la sonde et de la planète a varié : diminué dans le cas 1, augmenté dans le cas 2.

22. Le référentiel jupitocentrique n'est pas galiléen car le mouvement de translation de Jupiter n'est pas uniforme (mouvement orbital) : c'est une translation circulaire uniforme.

23. Comme le référentiel jupitocentrique n'est pas galiléen, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement, en plus des forces de gravitation :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{G}_J(M) + m\vec{G}_A(M) - m\vec{a}_e$$

où l'accélération d'entraînement est l'accélération héliocentrique du point coïncidant, c'est donc $\vec{a}_H(J)$; il n'y a pas de force de Coriolis car le référentiel jupitocentrique est en translation par rapport au référentiel héliocentrique. Finalement :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{G}_J(M) + \vec{G}_A(M) - \vec{a}_H(J)$$

24. La planète Jupiter n'est soumise qu'à la force gravitationnelle exercée par les autres objets célestes, donc :

$$M_J \vec{a}_H(J) = M_J \vec{G}_A(O) \Rightarrow \vec{a}_H(J) = \vec{G}_A(O)$$

Remarque : on a négligé l'action de M de masse m sur Jupiter.

25. On combine les deux résultats précédents et on obtient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}_J(M) + (\vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(O))$$

Le premier terme provient de l'interaction gravitationnelle de Jupiter avec la sonde. Le second terme, de gravitation différentielle, contient à la fois l'action gravitationnelle des autres objets célestes et l'effet d'entraînement lié au mouvement de Jupiter, ces deux actions se compensant partiellement ; ce terme est appelé "terme de marées" car c'est un terme de gravitation différentielle qui est à l'origine du phénomène de marées océaniques à la surface de la Terre.

26. C'est dans les positions alignées OMC ou COM que les champs gravitationnels du terme de marées sont les plus différents car c'est pour ces positions que les longueurs en jeu diffèrent le plus. On obtient des termes de marée de directions symétriques pour les deux positions symétriques (voir le document réponse).

27. Dans la configuration OMC, $\vec{g}_C(M) = \frac{GM_C}{(D-r)^2} \vec{e}_r$ et $\vec{g}_C(O) = \frac{GM}{D^2} \vec{e}_r$; le terme de marées est donc :

$$\vec{c}(M) = \vec{g}_C(M) - \vec{g}_C(O) = \frac{GM_C}{D^2} \left[\frac{1}{(1 - \frac{r}{D})^2} - 1 \right] \approx \frac{2GM_C}{D^3} r \vec{e}_r$$

Dans la configuration MOC, $\vec{g}_C(M) = -\frac{GM_C}{(D+r)^2} \vec{e}_r$ et $\vec{g}_C(O) = -\frac{GM}{D^2} \vec{e}_r$; le terme de marées est donc :

$$\vec{c}(M) = \vec{g}_C(M) - \vec{g}_C(O) = -\frac{GM_C}{D^2} \left[\frac{1}{(1 + \frac{r}{D})^2} - 1 \right] \approx \frac{2GM_C}{D^3} r \vec{e}_r$$

Finalement, $\vec{c}(M) = \vec{g}_C(M) - \vec{g}_C(O) \approx \frac{2GM_C}{D^3} r \vec{e}_r$ dans les deux configurations envisagées ; les forces sont alors symétriques et tendent à séparer la sonde de la planète elles ont même norme.

28. On peut dire que le référentiel jupitocentrique est approximativement galiléen si le terme de marées est négligeable devant le champ de gravitation créé par Jupiter, ce qui nécessite, compte-tenu des résultats précédents :

$$\frac{2GM_C r}{D^3} \ll \frac{GM_J}{r^2} \Leftrightarrow r \ll D \left(\frac{M_J}{2M_C} \right)^{1/3}$$

C'est bien la condition proposée dans l'énoncé avec $r_0 = D \left(\frac{M_J}{2M_C} \right)^{1/3}$

29. Application numérique : dans le cas du Soleil, $r_0 = 7,78 \cdot 10^8 \left(\frac{1,90 \cdot 10^{27}}{2 \times 2,00 \cdot 10^{30}} \right)^{1/3} = 60,7 \cdot 10^6 \text{ km} = r_0$. On constate que r_0 vaut environ 100 fois le rayon de Jupiter.

Document réponse, à rendre avec la copie

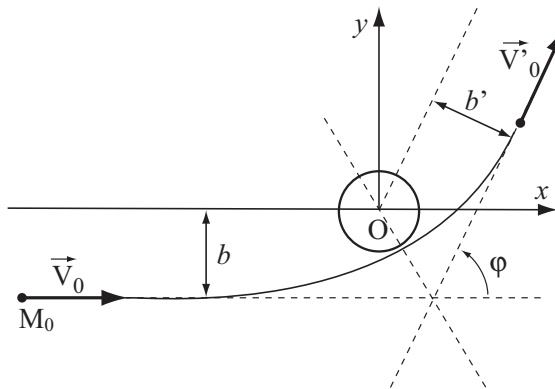
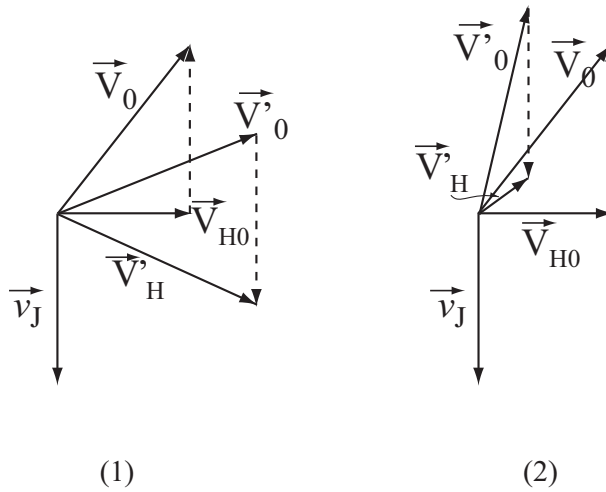


FIGURE 3 – Trajectoire de la sonde dans le référentiel jupitocentrique



(1)

(2)

FIGURE 4 – Construction des vitesses

(1) la sonde passe derrière Jupiter, (2) la sonde passe devant Jupiter.

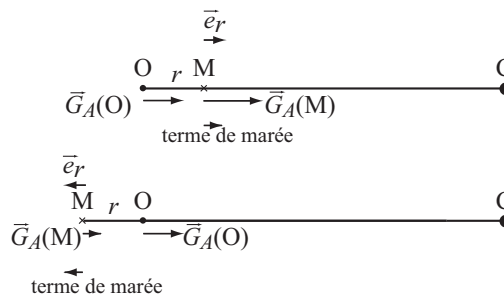


FIGURE 5 – Configurations Jupiter-sonde-objet céleste