

# Barème du DS commun de physique n°2 - Thermodynamique

## Age de la Terre

### I- Estimation de l'âge de la Terre grâce aux sédiments

1) Etude unidimensionnelle de la sédimentation

1.a) Bilan des forces appliquée à la particule :

le poids  $-\mu_0 V g \vec{u}_z$

la poussée d'Archimède  $+\mu V g \vec{u}_z$

la force de frottement fluide  $\vec{f}_f = -\lambda \vec{v}$ .

Le principe fondamental de la dynamique donne  $\mu_0 V \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu_0 V \vec{g} + \mu V \vec{g} - \lambda \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{\mu_0 V} \vec{v} = -\vec{g} + \frac{\mu}{\mu_0} \vec{g}$ .

C'est bien l'expression donnée avec  $\tau = \frac{\mu_0 V}{\lambda}$ .

1.b) La solution est de la forme :  $\vec{v}(t) = \vec{A} e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{v}_{lim}$  où  $\vec{A}$  est une constante qu'on détermine grâce aux conditions initiales et  $\vec{v}_{lim}$  est la solution particulière qui est déterminée à la question suivante.

1.c) Si  $t \gg \tau$ , on est en régime permanent et la solution est la solution particulière :  $\frac{\lambda}{\mu_0 V} \vec{v} = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \vec{g}$ ,

donc  $v_{lim} = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \frac{\mu_0 V g}{\lambda}$ .  $v_{lim} > 0$  car  $\mu < \mu_0 \Rightarrow 1 - \frac{\mu}{\mu_0} > 0$ . Normal : la particule tombe!

1.d) Pendant  $dt$  passent à travers une surface  $S$  les particules qui sont à une distance inférieure à  $v_{lim} dt$  de cette surface. Soit  $dN^* = n^* S v_{lim} dt$ . Ainsi, la densité de flux de particules due à la chute des particules est telle que  $j_c S = \frac{dN^*}{dt} = n^* S v_{lim}$  soit  $\vec{j}_c = -n^* v_{lim} \vec{u}_z$ . NB : on aurait tout aussi bien pu donner directement cette dernière relation (cf. cours).

2) Diffusion des particules

2.a) Cette chute de particules crée une inhomogénéité de  $n^*$ , donc, d'après la **loi de Fick**, il existe aussi un vecteur densité de flux dû à la diffusion  $\vec{j}_a = -D^* \overrightarrow{\text{grad}n^*} = -D^* \frac{\partial n^*}{\partial z} \vec{u}_z$  qui est bien ascendante ( $n^* \nearrow$  si  $z \searrow$ ).

$D^*$  s'exprime en  $\boxed{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$ .

2.b) Pour un cylindre de section  $S$  d'altitude comprise entre  $z$  et  $z + dz$ , le nombre de particules  $N^*$  varie pendant  $dt$  de  $dN^* = \frac{\partial n^*}{\partial t} S dz dt$ . Les flux de particules donnent, si l'on définit  $\vec{j} = \vec{j}_a + \vec{j}_c$ , vecteur densité de flux total :

$$\frac{dN^*}{dt} = +j_z(z, t) S - j_z(z + dz, t) S = -\frac{\partial j_z}{\partial z} dz S$$

Or  $j_z = j_{a_z} + j_{c_z} = -D^* \frac{\partial n^*}{\partial z} - n^* v_{lim}$ , donc  $n^*(z, t)$  vérifie bien  $\frac{\partial n^*}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_{lim} \frac{\partial n^*}{\partial z}$ .

3) Résultats numériques

3.a) D'après le document 1, "la datation par stratigraphie reposait sur les suppositions hasardeuses de la règle de trois : s'il faut cent ans pour déposer un millimètre d'argile et si la couche mesure un mètre, alors le temps de dépôt est de 100 000 ans." Aussi sur laquelle repose la méthode de datation par stratigraphie est que la sédimentation est constante au cours du temps.

3.b)

Date	1860	1890	1892	1893	1893	1909
âge (en millions d'années)	96	90	68 à 750	1600	100	80

3.c) La méthode n'est pas précise, peut-être donne-t-elle tout au plus un âge minimum (1,5 milliard d'années) à la Terre.

En effet :

- la sédimentation n'a probablement pas commencé en un endroit à la création de la Terre,
- rien ne dit que le taux de sédimentation est resté constant au cours des années.

### II- Estimation de l'âge de la Terre par refroidissement

4) Equation de diffusion dans une sphère homogène

4.a) La condition initiale vérifie cette propriété, et l'objet qui modélise la terre est homogène et sphérique; il y a donc invariance suivant  $\varphi$  et  $\theta$  donc la température  $T(r, t)$  ne dépend que de  $r$  (dans un repère sphérique de centre  $O$ ) et de la date  $t$ .

4.b)

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 dr \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec d'autre part :

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 j_{th_r}(r, t) - 4\pi (r + dr)^2 j_{th_r}(r + dr, t)$$

soit

$$\frac{dU}{dt} = -4\pi dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{th_r}(r, t)) = 4\pi dr \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

d'après la loi de Fourier ( $\vec{j}_{th}(r, t) = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}T}$ ). Donc on trouve :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})$ .

C'est bien la formule donnée, avec :  $D = \frac{\kappa}{\mu c}$  dont les unités sont les  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})$ .

**4.c)** Dans le cas unidimensionnel,  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

**5)** Estimation par Buffon de l'âge de la Terre par refroidissement

**5.a)**

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{\kappa}{\mu c} \frac{1}{R^2} \Rightarrow \tau \propto R^2$$

**5.b)** L'extrapolation linéaire de Buffon d'un boulet à la Terre est fautive car il n'y a pas une relation linéaire entre  $\tau$  et  $R$ .

**6)** Solution de l'équation de diffusion

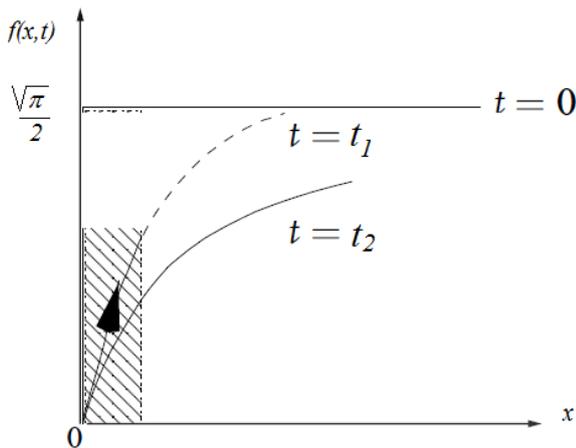
**6.a)** On trouve comme dérivées :  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{D \cdot t}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{D \cdot t}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{D \cdot t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}}$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{D \cdot t}} \frac{-2 \cdot x}{4 \cdot D \cdot t} e^{-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}} = \frac{-2 \cdot x}{(2\sqrt{D \cdot t})^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}}$

et  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x}{2\sqrt{D}} \frac{-1}{2} (t)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{D \cdot t}}\right)^2} = D \frac{-2 \cdot x}{(2\sqrt{D \cdot t})^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}}$

La fonction  $f$  est donc bien solution de l'équation de l'équation de diffusion thermique à une dimension.

**6.b)** Allure de  $f(x, t)$  :



**6.c)**  $T(x, t) = a f(x, t) + b$  est aussi solution de l'équation (1) à cause de la linéarité de l'équation différentielle (1).

**7)** Estimation par Kelvin de l'âge de la Terre

**7.a)** Il faut que pour  $x = R_T$  la courbe soit quasiment confondue avec son asymptote. Aussi  $R_T$  peut être considéré comme quasi infini. Donc pour les variations de  $T$  on se déplace sur des profondeurs  $x$  faibles devant  $R_T$  : cela valide le choix de se mettre dans le cas unidimensionnel.

**7.b)** Comme  $T(x = 0, t) = b = 20^\circ\text{C}$   $[b = 293 \text{ K}]$  et  $T(x = R_T, t) = a \frac{\sqrt{\pi}}{2} + b = 3900^\circ\text{C} = 4173 \text{ K}$ , alors  $a = \frac{2 \times 3880}{\sqrt{\pi}}$ , ce qui donne :  $[a = 4378 \text{ K}]$ .

**7.c)** Le gradient de température à la surface à la date  $t$  est :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x = 0, t) = \frac{a}{2\sqrt{D t}} = \frac{a \sqrt{\mu c}}{2\sqrt{\kappa t}}$$

**7.d)** La dernière relation donne

$$t = \left( \frac{a \sqrt{\mu c}}{2\sqrt{\kappa} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) (x = 0, t)} \right)^2$$

AN :

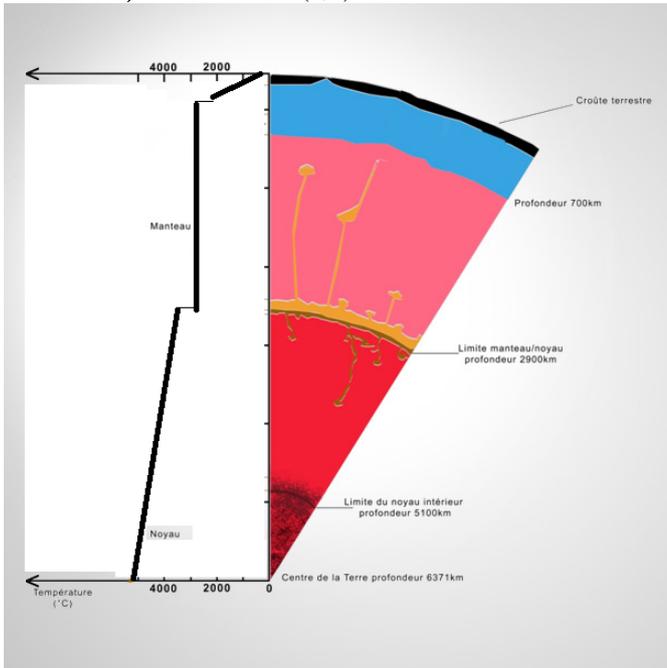
$$t = \left( \frac{4378 \times \sqrt{3 \times 10^3 \times 0,8 \times 10^3}}{2\sqrt{2} \times 3 \times 10^{-2}} \right)^2 = 6 \times 10^{15} \text{ s}$$

soit **0,2 milliards d'années** (c'est, à un facteur 10 près, ce que suggère le document).

8) Estimation par Perry de l'âge de la Terre

8.a)  $h$  est exprimé en  $\boxed{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ .

8.b) Allure de  $T(r, t)$  à  $t$  fixée :



8.c) On identifie bien dans le graphe du document 2 des zones de fort gradient de température, qui correspondent aux discontinuités du modèle, mais ces discontinuités sont en réalité plus nombreuses que dans le modèle

L'hypothèse de température uniforme est moins bien vérifiée dans le manteau que dans le noyau externe ou le noyau interne.

8.d) Si la "conduction n'opère que sur une épaisseur de surface de 100 km " (la croûte) alors "le même gradient de température, fournit des âges totalement différents" dans les modèles de Kelvin et de Perry : cf. figure E1. En effet, l'asymptote de température est bien plus basse dans le cas du modèle de Perry (c'est la température du manteau, pas celle du centre de la Terre).

9) La Terre vue comme une machine thermique

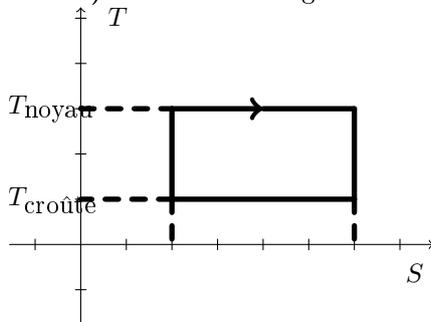
9.a) Dans ce schéma de machine thermique ditherme :

- le système est le manteau (qui peut se déplacer)
- la source chaude est le noyau
- et la source froide est la croûte terrestre.

Comme il s'agit d' "une machine thermique fournissant, grâce à sa chaleur interne, un travail mécanique", c'est un **moteur**.

Du coup,  $P < 0$ ,  $P_c > 0$  et  $P_f < 0$  (ce qui est cohérent avec le schéma!).

9.b) L'allure du diagramme entropique de ce cycle est la suivante :



On peut utiliser ce diagramme pour calculer  $P = \frac{\delta W}{dt} = f \delta W$  où  $f$  est la fréquence du cycle et  $|\delta W|$  est l'aire du cycle dans le diagramme.

9.c) Premier principe de la thermodynamique :  $\frac{dU}{dt} = \boxed{0 = P + P_c + P_f}$ .

Second principe de la thermodynamique :

$$\frac{dS}{dt} = 0 = \frac{P_c}{T_{\text{noyau}}} + \frac{P_f}{T_{\text{croûte}}} + \frac{\delta S_{cr}}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{P_c}{T_{\text{noyau}}} + \frac{P_f}{T_{\text{croûte}}} \leq 0.$$

Le rendement de la machine thermique est :

$$\eta = \frac{-P}{P_c} = \frac{P_c + P_f}{P_c} = 1 + \frac{P_f}{P_c}$$

d'après le premier principe. Or le second principe donne :

$$\frac{P_f}{T_{\text{croûte}}} \leq -\frac{P_c}{T_{\text{noyau}}} \Rightarrow \frac{P_f}{P_c} \leq -\frac{T_{\text{croûte}}}{T_{\text{noyau}}}$$

Ainsi,  $\eta \leq 1 - \frac{T_{\text{croûte}}}{T_{\text{noyau}}}$ .

**9.d)**

Cette puissance correspond environ à un millier de centrales nucléaires.

$P_f$  est la puissance thermique qui traverse la croûte terrestre. Soit

$$|P_f| = 4\pi R_T^2 j_{th}(r = R_T) = 4\pi R_T^2 \kappa \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{r=R_T} = 4\pi (6,4 \times 10^6)^2 \times 2 \times 30 \times 10^{-3}$$

soit  $|P_f| = 3 \times 10^{13} \text{ W}$ .

Le premier principe de la thermodynamique se ré-écrit :

$$0 = P_f + P_c + P = P_f - \frac{P}{\eta} + P \Rightarrow \eta = \frac{P}{P + P_f} = \frac{-2 \times 10^{12}}{-2 \times 10^{12} - 3 \times 10^{13}}$$

soit  $\eta = 6\%$ .

Conclusion : c'est bien cohérent (inférieur à 1 et positif).

Causes d'irréversibilité : glissement des plaques tectoniques, de la lithosphère sur asthénosphère,...

**9.e)** La conversion du flux thermique en puissance mécanique se fait sur une toute petite partie (6%), cela ne remet donc pas en cause le raisonnement de Kelvin sur l'estimation de l'âge de la Terre par refroidissement.

### III- Prise en compte de la radioactivité

**10)** Equation de diffusion dans une sphère homogène avec une source de chaleur

**10.a)**

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 dr \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec d'autre part :

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 dr \mu p_m + 4\pi r^2 j_{th_r}(r, t) - 4\pi (r + dr)^2 j_{th_r}(r + dr, t)$$

soit

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 dr \mu p_m - 4\pi dr \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{th_r}(r, t)) = 4\pi r^2 dr \mu p_m + 4\pi dr \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

d'après la loi de Fourier.

Donc on trouve :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\mu c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{p_m}{c} \Rightarrow \boxed{E = \frac{p_m}{c}}, \boxed{D = \frac{\kappa}{\mu c}}$  et  $\boxed{\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}$ .

**10.b)** (3)  $\neq$  (1) donc les calculs précédents sont invalides!

**10.c)** La radioactivité est un chauffage ( $p_m > 0$ ), donc le temps de refroidissement (l'âge de la Terre) va être **allongé**.

**11)** Solution de l'équation de diffusion en régime permanent dans une sphère homogène avec une source de chaleur

**11.a)** Si les variations de temps sont faibles devant l'âge de la Terre, on est en régime quasi-permanent et

$$0 = D\Delta T + E = \frac{\kappa}{\mu c} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{p_m}{c} \quad (3)$$

**11.b)** On intègre une fois :

$$\left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\mu p_m}{3\kappa} r^3 + B \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\mu p_m}{3\kappa} r + \frac{B}{r^2}$$

puis une autre fois :  $T(r) = -\frac{\mu p_m}{6\kappa} r^2 - \frac{B}{r} + C$ .

**11.c)** Si  $r = 0$ ,  $T(r = 0) = T_i = 4173$  K.

Si  $r = R_T$ ,  $T(r = R_T) = T_e = 293$  K.

Donc  $B = 0$  pour ne pas avoir de divergence en  $r = 0$ , et  $T_i = C$ . On trouve donc

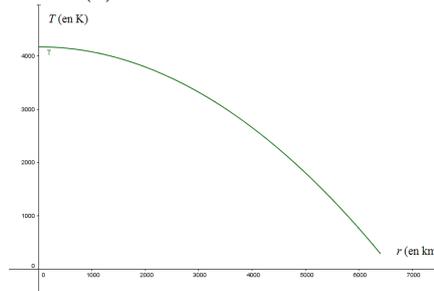
$$T(r) = T_i - \alpha r^2$$

avec

$$T(r = R_T) = T_e = T_i - \alpha R_T^2 \Rightarrow \alpha = \frac{T_i - T_e}{R_T^2}$$

Donc  $T(r) = T_i - (T_i - T_e) \frac{r^2}{R_T^2}$ .

**11.d)** Allure de la température  $T(r)$  :



**12)** Discussion de la solution trouvée

**12.a)** La courbe que l'on vient de tracer a bien l'allure générale de la courbe E2, à part les discontinuités aux interfaces.

**12.b)** On doit donc avoir

$$T_e = T(r = R_T) = -\frac{\mu p_m}{6\kappa} R_T^2 + T_i \Rightarrow p_m = \frac{6\kappa(T_i - T_e)}{\mu R_T^2} = \frac{6 \times 2 \times 3880}{3 \times 10^3 \times (6,4 \times 10^6)^2}$$

donc  $p_m = 0,4 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$  au lieu de  $10^{-12} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ . C'est presque le bon ordre de grandeur...

**12.c)** Le gradient de température à la surface a pour composante suivant  $\vec{u}_r$  :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R_T} = 2(T_i - T_e) \frac{r}{R_T^2} = \frac{2}{R_T} (T_i - T_e) = \frac{2}{6,4 \times 10^6} (3880)$$

soit  $1,2 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$  au lieu de " 3 °C tous les 100 mètres", soit  $30 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$  (c'est 25 fois plus!)

**12.d)** Explication des incohérences : la terre n'est **pas homogène** (cf. le graphique en données)! On a vu en particulier que le gradient de température variait fortement lors du passage de la croûte terrestre au manteau (cf. Perry).