

## Devoir maison n°10

### MICROSCOPIE PAR EFFET TUNNEL

Données numériques :

- Charge et masse de l'électron :  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C et  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J.s

Le microscope à effet tunnel (S.T.M. : *scanning tunneling microscope*) a été inventé dans les années 80 par Binnig et Rohrer. Cette technique d'imagerie a pu aboutir suite au progrès réalisés d'une part dans l'électronique de contrôle (déplacement de la pointe par effet piézoélectrique) et d'autre part dans la mesure de courant très faible (intensité de l'ordre du nanoampère, voire inférieure).

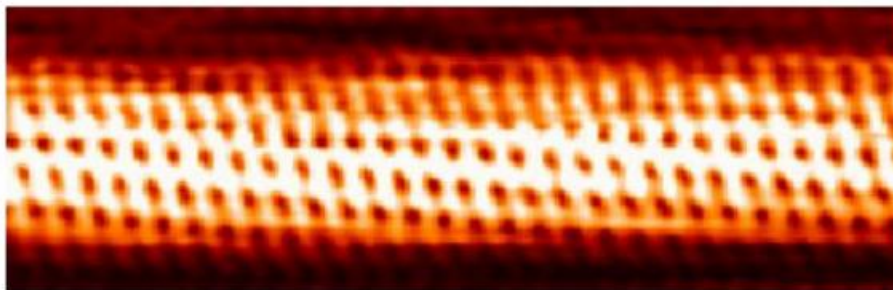


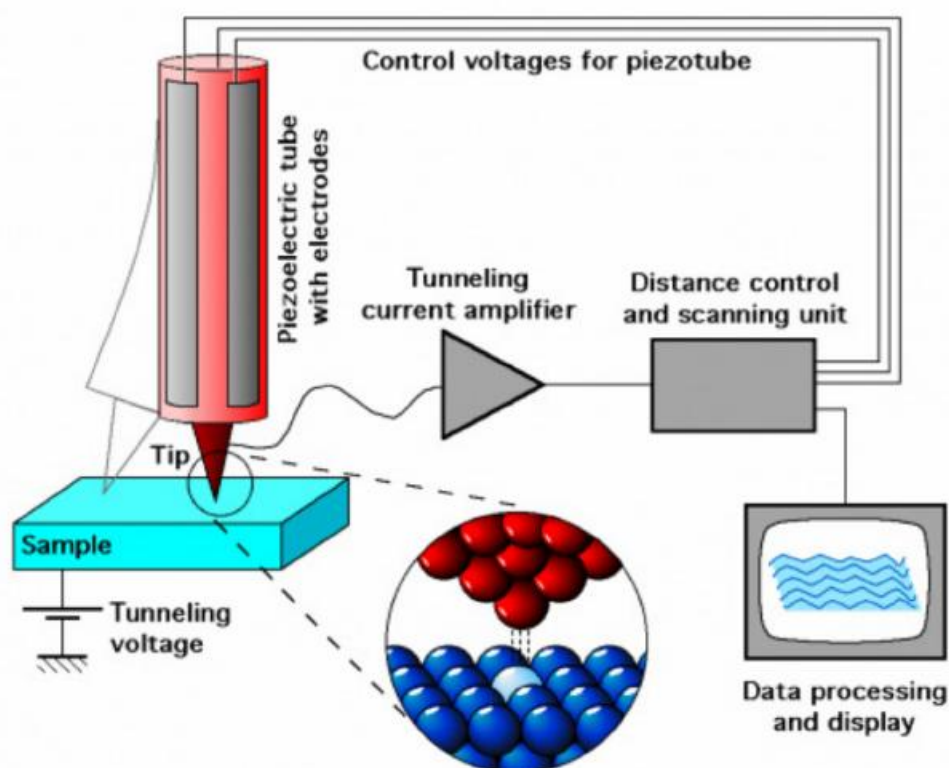
FIGURE 6 – **Nanotube de carbone vu sous STM** - La résolution des atomes permet d'identifier une structure en hélice (*Taner Yildirim*)

Le principe du STM est le suivant (figure 7) : une fine pointe métallique (terminée par un atome unique) est placée juste au dessus de l'échantillon à une distance très faible (de l'ordre du nm). En imposant une différence de potentiel entre la pointe et l'échantillon, on permet à des électrons de transiter de l'un à l'autre par effet tunnel. L'intensité du courant étant très sensible vis-à-vis de la distance à traverser, la mesure de cette intensité permet d'obtenir une image de la surface de l'échantillon grâce à un balayage de la pointe. La résolution latérale d'un STM peut atteindre 0,1 nm et sa résolution en profondeur peut descendre à moins de 0,01 nm. Il existe deux modes de balayage possibles de la surface :

- le mode à hauteur constante, où l'on mesure le courant tunnel en fonction de la position en fixant la hauteur de la pointe.
- le mode à courant constant, dans lequel le système d'asservissement fait varier la hauteur de la pointe lors du balayage afin de maintenir constant le courant tunnel.

#### 2.1 Franchissement d'une marche potentiel

Avant d'étudier l'effet tunnel, on étudie dans un premier temps le comportement d'un électron en incidence sur une marche de potentiel de hauteur  $V_0$ . On se place dans

FIGURE 7 – Schéma de principe d'un STM (*Michael Schmid*)

un problème unidimensionnel dans lequel les grandeurs ne dépendent que de l'abscisse  $x$ . Plus précisément, le potentiel  $V(x)$  vaut 0 pour  $x < 0$  et  $V_0 > 0$  pour  $x > 0$ . L'électron de masse  $m$  et de charge  $-e$ , possède une énergie  $E$  comprise entre 0 et  $V_0$  et arrive depuis le demi-espace  $x < 0$  en incidence normale sur la marche de potentiel.

On rappelle que la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  obéit à l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

21. Donner la définition d'un état stationnaire. Montrer que la fonction d'onde qui le représente s'écrit  $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$  et déterminer l'équation vérifiée par  $\phi(x)$ .

22. La partie spatiale de la fonction d'onde décrivant l'onde incidente est

$$\phi_i(x) = A_i e^{ikx}$$

Exprimer l'énergie de la particule incidente en fonction de  $k$ .

23. Grâce à la relation de De Broglie, montrer que le résultat de la question 22 est cohérent avec une énergie potentielle nulle.

24. On note  $\phi_r(x)$  la partie spatiale de l'onde réfléchie. Exprimer cette onde en introduisant une constante  $A_r$ .

25. On note  $\phi_t(x)$  la partie spatiale de l'onde transmise. Exprimer cette onde en introduisant une constante  $A_t$ .

26. Comment appelle-t-on le type d'onde trouvée pour  $x > 0$ ? Dans quel autre domaine de la physique la rencontre-t-on?

27. Quelles sont les conditions limites que doit vérifier  $\phi(x)$  et sa dérivée ?
28. Déterminer  $A_i$  et  $A_t$  en fonction de  $A_i$ .
29. Définir par analogie avec un autre phénomène de physique le vecteur densité de courant de probabilité  $\vec{J}$ .
30. Définir le coefficient de réflexion de l'électron sur la marche R.
31. Calculer R. En déduire le coefficient de transmission T.
32. Montrer que la densité de probabilité de présence pour  $x < 0$  vaut

$$\rho(x) = 2 |A_i|^2 (1 + \cos(2kx - \theta))$$

où vous définirez  $\theta$ .

Déterminer cette grandeur pour  $x > 0$ . Est-ce en contradiction avec le résultat de la question 31 ? Tracer cette grandeur en fonction de  $x$ .

33. Comparer les résultats de la physique classique et de la physique quantique pour cette situation ( $0 < E < V_0$ ).

## 2.2 Transit des électrons entre l'échantillon et la pointe

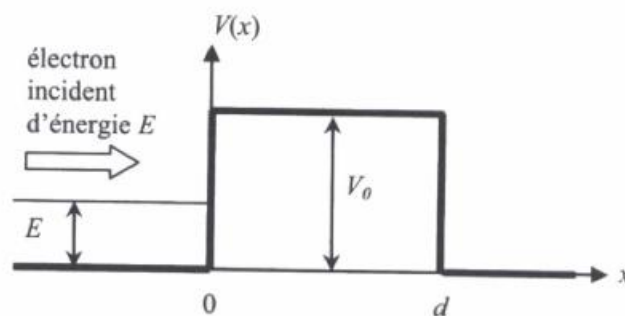


FIGURE 8 – Barrière de potentiel

On étudie maintenant la possibilité de franchissement par l'électron d'une barrière de potentiel, de hauteur  $V_0$  et de largeur  $d$ , représentée sur la figure 8. Si  $qd \gg 1$ , on montre qu'il est possible de calculer le coefficient de transmission  $T_b$  de l'électron à travers la barrière en négligeant les réflexions multiples à l'intérieur de celle-ci.

34. Montrer que la dépendance du coefficient de transmission par rapport à la largeur de la barrière est de la forme  $T_b = C \exp(-2qd)$ . On ne cherchera pas à établir l'expression de la constante  $C$ .



35. Comment peut-on justifier de manière qualitative que  $T_b \neq 0$  malgré le résultat de la question 32 ?

On suppose que l'échantillon et la pointe sont de même nature : à l'intérieur de ces milieux, les électrons, étant des fermions, doivent tous être dans des états quantiques différents les uns des autres (principe d'exclusion de Pauli). À température ambiante, on montre que les électrons vont approximativement remplir tous les états par ordre croissant d'énergie. La différence d'énergie entre l'état de plus basse énergie (premier niveau) et le dernier état occupé (appelé le niveau de Fermi) s'appelle "l'énergie de Fermi", notée  $E_F$ . On introduit la densité d'états (L.D.O.S. : *local density of states*), notée  $\rho(E)$ , définie telle que le nombre d'électrons par unité de volume dont l'énergie est comprise entre  $E$  et  $E + dE$  vaut  $n = \rho(E)dE$ . On donne, sur la figure 9, l'allure de  $\rho(E)$  pour un conducteur, en prenant pour origine de l'énergie celle du premier niveau.

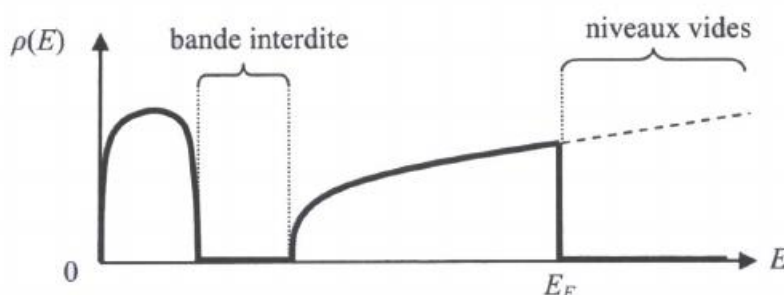


FIGURE 9 – LDOS d'un matériau conducteur

Enfin, on appelle "travail de sortie", noté  $W_S$ , l'énergie qu'il faut pour arracher un électron du niveau de Fermi en dehors du conducteur (échantillon ou pointe).

Dans le cas du STM, la barrière de potentiel a l'allure donnée sur la figure 10, compte tenu de la tension  $U$  appliquée entre la pointe et l'échantillon, ces derniers étant séparés d'une distance  $d$ . Les zones grisées sont les énergies des états occupés par les électrons.

36. Reproduire et compléter la figure 10 en faisant apparaître l'énergie de Fermi  $E_F$ , le travail de sortie  $W_S$  ainsi que la quantité  $eU$ .
37. Indiquer l'intervalle d'énergie des électrons susceptibles de passer de l'échantillon à la pointe par effet tunnel.

Pour la suite, on raisonne avec les valeurs suivantes (cas de l'or) :  $E_F = 5,5$  eV et  $W_S = 5,1$  eV et l'on applique une tension  $U = 100$  mV.

38. Compte tenu de ces valeurs et à l'aide de deux approximations que l'on explicitera,

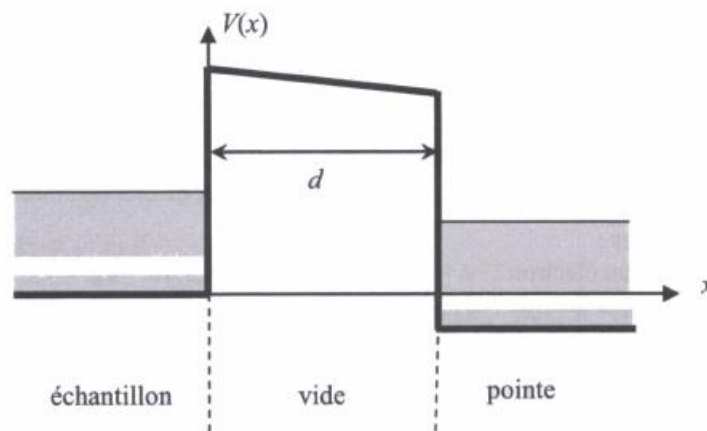


FIGURE 10 – Barrière de potentiel dans le cas du STM

justifier que l'intensité  $I$  du courant tunnel est proportionnelle à la quantité :

$$\rho(E_F)U \exp\left(-2\frac{\sqrt{2mW_S}}{\hbar}d\right)$$

39. En admettant que l'intensité puisse être mesurée avec une précision de 10%, calculer la sensibilité verticale du microscope. Commenter.
40. Qu'est-ce qui limite la résolution latérale du microscope ?

Outre le repérage du relief de la surface, le STM peut être utilisé pour mesurer la LDOS de l'échantillon qui peut varier de manière significative suivant l'endroit. Il est par ailleurs possible d'accéder aux caractéristiques de  $\rho(E)$  pour des énergies autre que l'énergie de Fermi. Le procédé (nommé S.T.S. : *scanning tunneling spectroscopy*) permet par exemple de déterminer la bande interdite du matériau sondé.

41. Quel paramètre doit-on faire varier dans ce procédé ?

## PHYSIQUE STATISTIQUE : ÉTUDE D'UNE SUSPENSION COLLOÏDALE

- Un milieu fluide, de température uniforme  $T$  et de masse volumique  $\mu_f$ , contient des particules solides immobiles en suspension, appelées colloïdes, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La densité particulaire de ces colloïdes, notée  $n$  et appelée aussi concentration, correspond à celle d'un milieu dilué.
- Cette solution est soumise au champ de pesanteur  $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z$ ,  $g$  positif et  $\mathbf{u}_z$  ascendant.
- Les colloïdes sont assimilés à des sphères homogènes de rayon  $a$ , de volume  $v$ , et de masse  $m$ .  
Leur densité particulaire  $n$  définie par  $n = \frac{\delta N}{\delta V}$  n'est fonction que de  $z$  donc  $n = n(z)$ .
- On pourra considérer que ces colloïdes sont en or, de masse volumique  $\mu_{or} = 19,30 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $a = 50 \text{ nm}$ ,  $n \approx 10^{18} \text{ particules.m}^{-3}$ .
- Le fluide est de l'eau : sa température  $T$  est égale à  $300 \text{ K}$  et sa masse volumique  $\mu_f = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- On prendra  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ .

1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides sous sa forme générale faisant intervenir la fonction **gradP** et l'appliquer ensuite au cas où seule la pesanteur supposée uniforme intervient dans le référentiel d'étude supposé galiléen.
2. Du fait de la présence de ces forces de pression, une force **F<sub>A</sub>** appelée poussée d'Archimède intervient. Celle-ci est égale à l'opposé du poids du fluide qui serait à la place du colloïde.  
Exprimer la poussée d'Archimède en fonction de la masse volumique  $\mu_f$ , du volume  $v$  et du vecteur **g**.
3. On appelle **P<sub>ap</sub>** « poids apparent » du colloïde dans le fluide la résultante de son poids et de la poussée d'Archimède.  
Déterminer son expression en fonction de  $\Delta\mu = \mu_{or} - \mu_f$ , **g** et  $v$ .  
Déterminer l'énergie potentielle « apparente » de pesanteur du colloïde  $E_{pap}$  en fonction de  $\Delta\mu$ , **g**,  $v$  et  $z$ . On la supposera nulle pour  $z = 0$ .
4. Nous supposons que les colloïdes suivent la loi de Boltzmann et nous noterons  $n_0 = n(z = 0)$ .  
Déterminer  $n(z)$  et exprimer sa longueur caractéristique de variation, notée  $L$ , en fonction de  $k_B$ , la constante de Boltzmann,  $g$ ,  $\Delta\mu$ ,  $T$  et  $v$  puis en fonction de  $k_B$ ,  $g$ ,  $\Delta\mu$ ,  $T$  et  $a$ . Déterminer la valeur numérique de  $L$ .
5. La probabilité de trouver une particule dans l'intervalle  $[z, z + dz]$  est notée  $d\mathcal{P}$ .  
Exprimer  $d\mathcal{P}$  en fonction de  $dz$ ,  $z$ ,  $L$  et d'une constante  $A$ .  
En considérant que la solution se trouve comprise entre  $z = 0$  et  $z = H$  avec  $H \gg L$ , déterminer  $A$ .  
En déduire l'expression de  $d\mathcal{P}$  en fonction de  $z$ ,  $L$  et  $dz$ .
6. La longueur caractéristique  $L$  est une fonction du rayon  $a$ . Nous convenons que la frontière entre un état de suspension et un état sédimentaire correspond au cas où  $L = a$ , ce qui définit un rayon critique de particule  $a_c$ .  
Exprimer cette grandeur critique  $a_c$  en fonction de  $k_B$ , la constante de Boltzmann,  $T$ ,  $g$  et  $\Delta\mu$ . Calculer  $a_c$ .
7. Exprimer le rapport  $\frac{L}{a}$  en fonction de  $a$  et  $a_c$ . Montrer que  $\frac{L}{a}$  est aussi le rapport entre deux énergies que l'on précisera.  
Observe-t-on un phénomène de suspension ou de sédimentation ?
8. L'utilisation de la loi de Boltzmann suppose que les colloïdes soient indépendants entre eux. Indiquer la condition, portant sur  $a$  et  $n$ , pour que cette hypothèse soit valable. L'est-elle dans notre situation ?
9. La définition de la concentration locale  $n(z)$ , donnée dans l'introduction, présuppose une uniformité des grandeurs à l'échelle de  $\delta V$ . Indiquer comment doivent alors se situer la longueur caractéristique  $L$  et l'extension  $\delta z$  de l'élément de volume  $\delta V$ .
10. Indiquer quelle autre contrainte borne  $\delta z$ , cette fois inférieurement.
11. La solution préparée est de concentration initiale homogène  $n_i$ . Nous admettons qu'une particule, dans son mouvement au sein du fluide, subit de sa part une force, dite force de Stokes, **F** =  $-6\pi.a.\eta.v_{col}$  dans laquelle  $\eta$  représente la viscosité dynamique du liquide et  $v_{col}$  la vitesse du colloïde par rapport au fluide.  
Exprimer le temps caractéristique, noté  $\tau$ , nécessaire à l'obtention du profil d'équilibre de la concentration, dans une solution de hauteur  $H$ . On l'exprimera en fonction de  $\mu_{or}$ ,  $\eta$  et  $a$ . Déterminer sa valeur numérique pour l'eau de viscosité dynamique  $\eta = 1.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . Commenter.
12. Sous l'effet de la pesanteur, de la poussée d'Archimède et de la force de viscosité de Stokes, les colloïdes atteignent une vitesse limite au bout de quelques  $\tau$ . Déterminer cette vitesse limite  $v_\infty$ . On l'exprimera en fonction de  $\Delta\mu$ ,  $\eta$ ,  $g$  et  $a$ .  
Quelle durée  $\Delta t$  sera nécessaire pour que les colloïdes se regroupent sur la hauteur  $H = 10 \text{ cm}$ . Conclure sur le passage d'un état de suspension à un état sédimentaire. Était-il légitime de considérer les colloïdes immobiles en suspension ?