Devoir maison n°6

I. Ondes

Données

Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1}
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}
Masse de l'électron	$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Masse du proton	$M = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C

Première partie : les atomes froids

Le prix Nobel de physique a été attribué en 1997 à Claude Cohen-Tannoudji, William Daniel Phillips et Steven Chu pour leurs contributions décisives au contrôle du mouvement des atomes à l'aide de la lumière. Cette partie du sujet décrit le principe du ralentissement des atomes à l'aide d'un rayonnement électromagnétique. On propose tout d'abord d'établir un modèle de l'interaction entre une onde électromagnétique et un atome, et ensuite de l'utiliser pour comprendre comment on peut piéger des atomes.

I Modèle de l'électron élastiquement lié

Dans le modèle de l'atome de Thomson, un atome d'hydrogène est assimilé à un système matériel constitué d'un noyau, de masse M, et d'un électron de masse m. La charge électrique $+e$ du noyau est supposée uniformément répartie dans une sphère de rayon a, de centre P. Un électron, considéré comme ponctuel, de charge $-e$, est libre de se déplacer dans cette sphère chargée.

I.A – On repère un point N à l'intérieur du noyau par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) relatives au centre P.

I.A.1) Donner l'expression de la densité volumique de charges $\rho(N)$, associée au noyau, en tout point N à l'intérieur de la sphère.

I.A.2) Exprimer le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point N à l'intérieur de la sphère.

I.A.3) En déduire l'expression de la force électrique ressentie par l'électron situé au point N. Exprimer cette force en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{PN}$. Donner aussi l'expression de la force que l'électron exerce sur le noyau.

I.B – Dans un état excité de l'atome, le noyau et l'électron peuvent osciller autour de leur barycentre O, sous le seul effet de leur interaction électrique mutuelle. On note $\vec{R}_+(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et $\vec{R}_-(t) = \overrightarrow{ON}(t)$, les déplacements respectifs du noyau et de l'électron par rapport à O (voir figure 1). On admet que le noyau garde sa forme sphérique. On pose $\vec{R}(t) = \vec{R}_+(t) - \vec{R}_-(t)$. Le référentiel dans lequel on étudie les mouvements du noyau et de l'électron, est supposé galiléen.

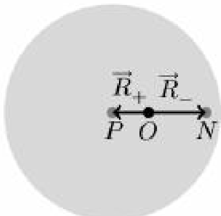

Figure 1 Atome de Thomson excité

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron en considérant sa masse faible devant celle du noyau. On montrera que la force appliquée est une force de rappel et on introduira une pulsation caractéristique w0 que l'on exprimera en fonction de e et de a.

Calculer la valeur de ω_0. A quel type de rayonnement électromagnétique correspond cette pulsation ?

I.C – ***Onde électromagnétique rayonnée par l'atome***

Les oscillations de l'électron et du noyau sont à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. On suppose, par souci de simplicité, que les oscillations étudiées sont unidimensionnelles, selon le vecteur unitaire $\vec{e}_x$. On propose de calculer la puissance électromagnétique moyenne rayonnée par l'atome situé au point O.

I.C.1) On définit la grandeur vectorielle $\vec{p}(t) = e\vec{R}(t)$. Que représente $\vec{p}(t)$?
On pose $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_x$ avec $p(t) = ex(t)$.

I.C.2) On utilise le système des coordonnées sphériques d'origine O (voir figure 2).

a) Dans la zone de rayonnement, parmi les champs électrique et magnétique, lequel admet au point M l'expression $\dfrac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r c}\ddot{p}(t-r/c)\vec{e}_\varphi$? Justifier la réponse en utilisant un argument d'analyse dimensionnelle.

b) Sachant que l'onde rayonnée a, dans la zone de rayonnement, une structure locale d'onde plane progressant dans le sens du vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$, compléter la détermination des champs électrique et magnétique.

c) On note λ la longueur d'onde de l'onde sinusoïdale rayonnée par l'atome. Rappeler la hiérarchie des différentes échelles de longueur $\|\vec{R}(t)\|$, r et λ qui permet de valider les expressions des différents champs dans la zone de rayonnement. On prendra soin de dégager le sens physique des différentes inégalités écrites.

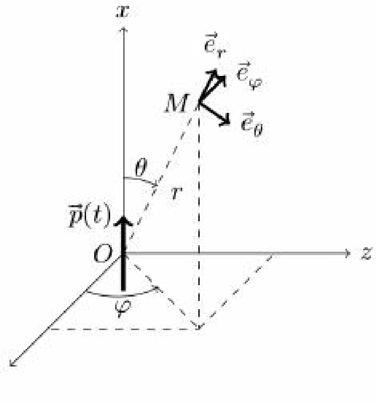

Figure 2

I.C.3) Établir l'expression du vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement et donner une expression de sa valeur moyenne temporelle faisant intervenir $\langle \ddot{x}^2 \rangle$.

I.C.4) Montrer que la puissance moyenne rayonnée par l'atome à travers une sphère de rayon r s'écrit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle \ddot{x}^2 \rangle$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = 4/3$.

I.D – Amortissement des oscillations par rayonnement

Le rayonnement électromagnétique de l'atome entraine l'amortissement des oscillations de l'électron et du noyau. On propose d'en déduire que l'atome, dans son état excité, peut être modélisé par un oscillateur amorti.

I.D.1) On souhaite mettre la puissance moyenne rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle$ sous la forme $\langle F\dot{x} \rangle$. Sachant que $\langle \ddot{x}^2 \rangle = \langle \dddot{x}\,\dot{x} \rangle$, déterminer l'expression de la force $\vec{F} = F\vec{e}_x$.

I.D.2) On suppose qu'en plus de la force de rappel élastique définie à la question I.B.3, la force $\vec{F}$ agit aussi sur la particule fictive. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

I.D.3) En notation complexe, on cherche une solution de cette équation différentielle sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 \exp(i\omega t)$. On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, avec $\delta\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\delta\omega| \ll \omega_0$. La force $\vec{F}$ est traitée comme une perturbation des oscillations harmoniques : on suppose $\dfrac{\omega_0 e^2}{\varepsilon_0 \mu c^3} \ll 1$.

a) Montrer qu'à l'ordre d'approximation le plus faible, $\delta\omega = i\dfrac{e^2\omega_0^2}{12\pi\varepsilon_0\mu c^3}$.

b) En déduire l'expression de $\underline{x}(t)$ sous la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 \exp(-\Gamma t/2)\exp(i\omega_0 t)$.
Donner l'expression de Γ en fonction des différents paramètres.

c) Application numérique

Calculer la valeur numérique de Γ pour l'atome de rubidium ; la valeur obtenue est-elle compatible avec la valeur expérimentale figurant dans les données numériques en fin d'énoncé ?

II Interaction d'un atome avec une onde électromagnétique plane

On suppose qu'un atome, immobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen, est placé à l'origine O de l'espace. Il est soumis à une onde électromagnétique plane dont les champs électrique et magnétique s'écrivent $\vec{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$ et $\vec{B}(z,t) = E_0/c\cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$, avec $k = \omega/c$, où c est la célérité de la lumière dans le vide. On convient aussi d'appeler intensité I de cette onde la valeur moyenne temporelle de son vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, soit

$$I = \langle \Pi \rangle = c\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

II.A – Polarisation de l'atome

Pour décrire les oscillations du noyau et de l'électron, on utilise le modèle de l'électron élastiquement lié : une particule fictive, de masse μ, dont la position est repérée par le vecteur $\vec{R}(t)$, est soumise à une force de rappel élastique $-\mu\omega_0^2\vec{R}$, à une force de frottement $-\mu\Gamma\dot{\vec{R}}$ et à l'action de l'onde électromagnétique. On suppose que

$k\|\vec{R}\| \ll 1$ et que $\|\dot{\vec{R}}\| \ll c$. On admet que la particule fictive doit être affectée d'une charge électrique égale à $+e$.

II.A.1) Compte tenu des hypothèses, justifier que l'équation différentielle vérifiée par $\vec{R}(t)$ peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\ddot{\vec{R}} + \Gamma\dot{\vec{R}} + \omega_0^2\vec{R} = \frac{e}{\mu}E_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$$

II.A.2) Montrer, qu'en régime sinusoïdal forcé, on a $\vec{p}(t) = \alpha(\omega)E_0\cos(\omega t + \psi)\,\vec{e}_x$. Exprimer $\alpha(\omega)$ en fonction de e, μ, ω, ω_0 et Γ et $\sin\psi$ en fonction de Γ, ω et ω_0.

On note $\Delta = \omega - \omega_0$. Lorsque $\omega_0 \gg \Gamma$ et $\omega_0 \gg |\Delta|$ (voisinage de la résonance où $\omega \approx \omega_0$), on admettra les relations simplifiées suivantes :

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\mu\omega_0}\frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\psi = \frac{-\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}}$$

II.B – Force de pression de radiation

On souhaite maintenant déterminer la force électromagnétique que l'onde exerce sur l'ensemble de l'atome (c'est-à-dire l'électron *et* le noyau) immobile en O. Comme précédemment, les déplacements de l'électron et du noyau sont notés respectivement $\vec{R}_-(t)$ et $\vec{R}_+(t)$.

II.B.1) Montrer que la résultante des forces électromagnétiques $\vec{F}_{\text{rad}}$, dite *force de pression de radiation*, que l'onde exerce sur l'atome peut être mise sous la forme : $\vec{F}_{\text{rad}} = \dot{\vec{p}} \wedge \vec{B}$.

II.B.2) Donner l'expression de la force de pression de radiation moyenne $\langle\vec{F}_{\text{rad}}\rangle$ en fonction de I, ε_0, c, $\alpha(\omega)$, $\sin\psi$ et du vecteur d'onde $\vec{k}$.

II.B.3) On se place au voisinage de la résonance : $\omega \approx \omega_0$, ce qui correspond à $\omega_0 \gg |\Delta|$ et on suppose en outre que $\omega_0 \gg \Gamma$.

a) En utilisant les résultats de la question II.A.2, simplifier l'expression de la force de pression de radiation moyenne et la mettre sous la forme suivante :

$$\langle\vec{F}_{\text{rad}}\rangle = \frac{I}{I_s}\frac{\Gamma}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}\,\hbar\vec{k}$$

On exprimera la constante I_s en fonction de ε_0, μ, c ,e, Γ, ω_0 et de la constante de Planck réduite $\hbar$.

b) Préciser pour quelle valeur de Δ, la force exercée par l'onde sur l'atome a une intensité maximale.

III Ralentissement Doppler des atomes

III.A – Force exercée par deux ondes sur un atome en mouvement

On considère maintenant un atome en mouvement unidimensionnel soumis à l'action de deux ondes électromagnétiques planes, progressives, harmoniques se propageant en sens opposés. Nous allons montrer que cette configuration, proposée en 1975 par Hänsch et Schawlow, permet de ralentir l'atome.

Dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, l'atome est animé d'une vitesse $\vec{v} = v(t)\vec{e}_z$, avec $v(t) \ll c$. Dans le référentiel $\mathscr{R}$, les champs électriques des deux ondes sont notés : $\vec{E}_{(+)}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$ et $\vec{E}_{(-)}(z,t) = E_0\cos(\omega t + kz)\vec{e}_x$. Dans le référentiel lié à l'atome, noté $\mathscr{R}'$, une onde électromagnétique de vecteur d'onde $\vec{k}$ présente une pulsation ω' différente de ω, en raison de l'effet Doppler : $\omega' = \omega - \vec{k}\cdot\vec{v}$.

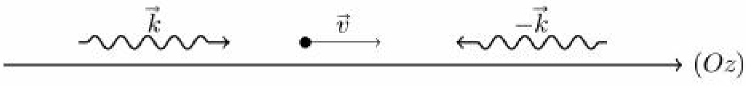

Figure 3 Atome en mouvement soumis à deux ondes

III.A.1) Donner les expressions des pulsations apparentes $\omega'_{(+)}$ et $\omega'_{(-)}$ des deux ondes dans le référentiel $\mathscr{R}'$ en fonction de ω, $v(t)$ et c.

III.A.2) Analyse qualitative

On suppose $\omega < \omega_0$, soit $\Delta < 0$. Considérons la situation où $v(t) > 0$. Indiquer quelle onde a une pulsation apparente se rapprochant le plus de la pulsation de résonance ω_0. Laquelle des deux forces de pression de radiation agit avec la plus grande intensité sur l'atome (on utilisera les résultats de la question II.B.3) ? Ce dernier est-il ralenti ou accéléré ? La conclusion reste-t-elle la même si l'on suppose $v(t) < 0$?

En reproduisant le même type de raisonnement, dire si un désaccord $\Delta > 0$ permet, ou pas, de ralentir l'atome.

III.A.3) Dans la limite des faibles vitesses, on admet que la résultante des forces de pression de radiation moyennes s'écrit sous la forme : $\vec{f} = \beta\vec{v}$, avec :

$$\beta = \frac{I}{I_s}\frac{16\Delta/\Gamma}{(1+4\Delta^2/\Gamma^2)^2}\frac{\hbar\omega_0^2}{c^2}$$

Quel est le signe de β correspondant à un ralentissement de l'atome ? Ce résultat s'accorde-t-il avec l'analyse qualitative précédente ?

III.A.4) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'énergie cinétique d'un atome de rubidium soumis aux deux ondes. Donner l'expression du temps caractéristique τ de décroissance de cette énergie en fonction de M_{Rb} et $|\beta|$.

III.B – Ralentissement et refroidissement d'un jet atomique

Un four à rubidium est constitué d'une ampoule contenant du rubidium, chauffée à $T_0 = 443$ K. À la sortie du four, un dispositif, non décrit ici, permet de ralentir et de sélectionner les atomes ayant une vitesse orientée selon $\vec{e}_z$. Ces atomes sont alors soumis à l'action de deux ondes planes, progressives, harmoniques se propageant en sens opposés selon $\vec{e}_z$ et $-\vec{e}_z$. On admet que chaque atome de rubidium est seulement sensible à la résultante des forces de pression de radiation moyennes exercées par les deux ondes.

III.B.1) Quelle est la vitesse quadratique moyenne des atomes de rubidium à la sortie du four ? Réaliser l'application numérique.

III.B.2) Ordres de grandeur

Il n'est en réalité pas possible d'immobiliser complètement les atomes. En effet, on peut montrer que les processus d'absorption et d'émission spontanée d'un photon par un atome immobilisé animent ce dernier d'un mouvement d'agitation erratique. La vitesse quadratique moyenne associée à cette agitation résiduelle est non nulle et prend une valeur minimale égale à $\sqrt{3\hbar\Gamma/M_{\mathrm{Rb}}}$, lorsque $\Delta = -\Gamma/2$.

a) En déduire une valeur numérique de la température minimale des atomes ralentis. Commenter.

b) Donner la valeur numérique de τ lorsque $I = I_s/2$ et $\Delta = -\Gamma/2$. Commenter.

III.B.3) Comment peut-on procéder, selon vous, pour immobiliser les atomes en trois dimensions et non plus seulement sur l'axe (Oz) ? On parle, dans ce cas, de « mélasse optique ». Justifier brièvement cette appellation.

II. Résolution de problème

On a placé une plaque de chocolat quelques secondes dans un four à micro-ondes dans lequel le plateau tournant a été bloqué. On a photographié la plaque après le chauffage.

Estimer la fréquence des ondes à l'intérieur du four ?