Devoir maison n°1 : mécanique

Problème n°1

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel P, de masse m, placé dans le champ newtonien engendré par une masse $M >> m$. Cette dernière masse se situe à l'origine d'un repère $Oxyz$; elle sera considérée comme immobile dans le référentiel galiléen associé au repère $Oxyz$. L'attraction de la masse M sur le point P s'écrit $-\frac{mMG}{r^3}\overrightarrow{OP}$ où G est la constante de la gravitation, telle que $G = 6{,}67.10^{-11}\,\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $r = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$.

I.1 Montrer que le mouvement de P est plan.

I.2 On suppose alors que le mouvement de P se situe dans le plan xOy et on repère la position de P par ses coordonnées polaires $r = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ et θ = angle situé entre Ox et $\overrightarrow{OP}$. On note $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ deux vecteurs unitaires, $\overrightarrow{e_\theta}$ se déduisant de $\overrightarrow{e_r}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2} rad$ dans le plan xOy (voir **figure I.1**). Montrer que la quantité $C = r^2\frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement.

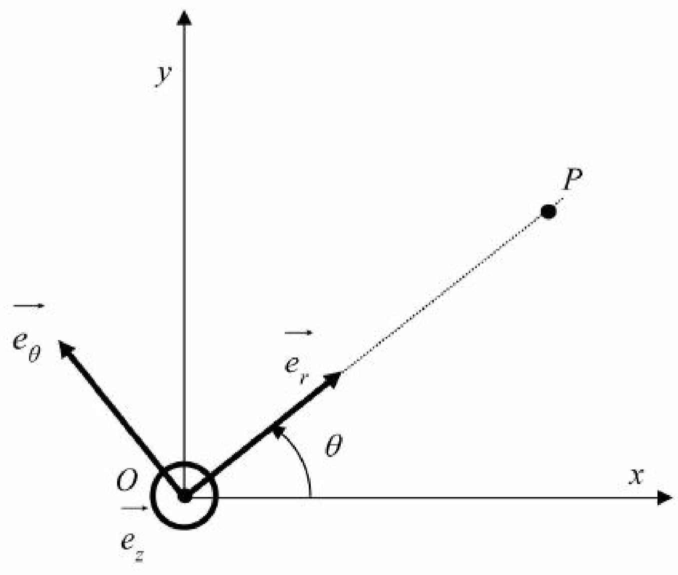


Figure I.1 : repères

I.3 On rappelle les formules de Binet pour la vitesse et l'accélération radiale de P :

$$\overrightarrow{v_p} = -C\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{e_r} + Cu\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{a_p} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \text{ où } u = \frac{1}{r}.$$

Montrer que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit sous la forme $r = \dfrac{p}{\left[1+\varepsilon.e.\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right]}$ où $p>0$, $e>0$ et θ_0 sont trois constantes $\left(\varepsilon=\pm 1\right)$. Exprimer p en fonction de C, M et G.

I.4 Pour $e<1$, on parle de trajectoires liées ; il s'agit d'ellipses dont on exprimera le demi-grand axe a en fonction de p et de e (e est l'excentricité de l'ellipse).

I.5 Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p du point P moyennant l'hypothèse que celle-ci s'annule à l'infini.

I.6 E_c désignant l'énergie cinétique du point P, on appelle $E = E_c + E_p$ l'énergie totale (ou mécanique) de P. Donner l'expression de E en fonction de m, M, G et a.

I.7 Donner l'expression de T, la durée d'une révolution en fonction de a, M et G.

I.8 Les résultats obtenus vont être appliqués au système solaire pour lequel on précise les masses du Soleil, de la Terre et de Mars, respectivement $M_S = 2{,}0.10^{30}\,\text{kg}$, $m_T = 6{,}0.10^{24}\,\text{kg}$, $m_M = 6{,}42.10^{23}\,\text{kg}$.
Les trajectoires de la Terre et de Mars sont supposées :
- circulaires,
- de centre le Soleil et de rayons respectifs $r_T = 1{,}00\ UA$, $r_M = 1{,}52\ UA$ $\left(1\ UA = 1{,}50.10^{11}\,\text{m}\right)$
- situées dans le même plan.

Calculer les vitesses orbitales v_T et v_M de la Terre et de Mars.

I.9 Une sonde de masse $m = 10^3\,\text{kg}$ est en orbite autour de la Terre à une distance du centre de celle-ci, négligeable devant r_T. A l'instant $t=0$, on ajuste la vitesse de la sonde de telle façon que la sonde va devenir un satellite du Soleil. Dans cette question et dans la suivante, on négligera donc l'attraction de la Terre et de Mars sur la sonde (voir **figure I.2**, page 4). A $t=0$, $\overrightarrow{v_p}$ est perpendiculaire à l'axe Soleil-Terre ; on veut que l'ellipse décrite par la suite vienne tangenter la trajectoire de Mars au point A.
Quelle est la valeur du grand axe de l'ellipse décrite ? Connaissant l'énergie potentielle à $t=0$ ainsi que l'énergie totale sur la trajectoire elliptique, déterminer la valeur de $\left\|\overrightarrow{v_p}\right\|$.

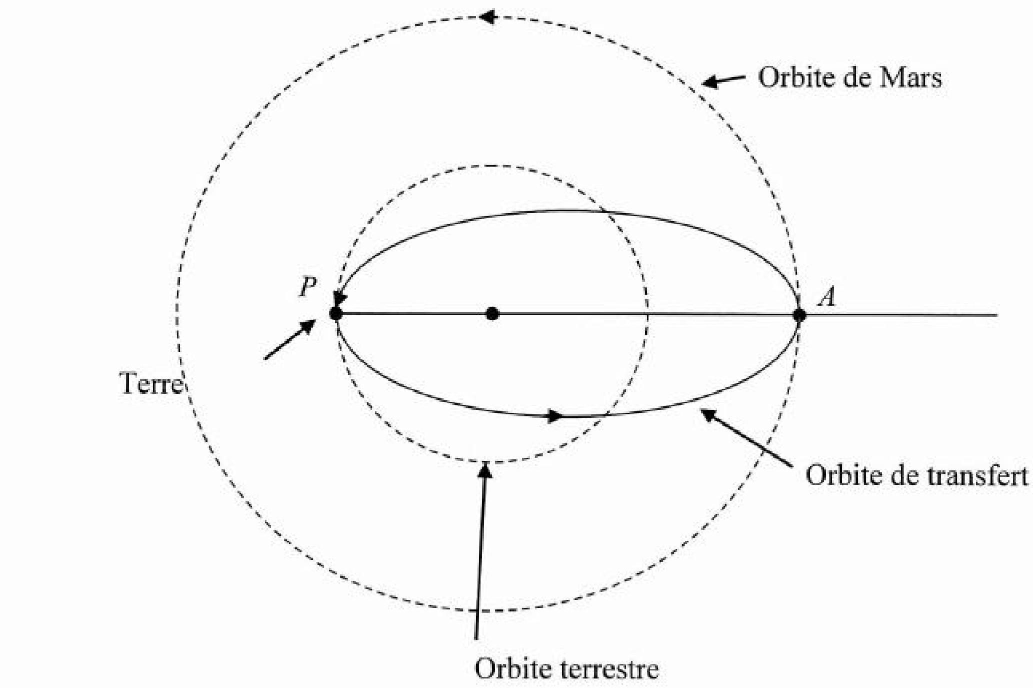


Figure I.2 : trajectoire de la sonde entre la Terre et Mars

I.10 Calculer la durée ΔT du trajet de la sonde de la Terre vers Mars. La sonde doit pouvoir approcher effectivement Mars pour pouvoir être satellisée autour de cette planète au point A. A $t=0$, on suppose donc une position des planètes comme indiqué sur la **figure I.3**. Déterminer l'expression de β en fonction de v_M, r_M et T, puis calculer la valeur de cet angle.

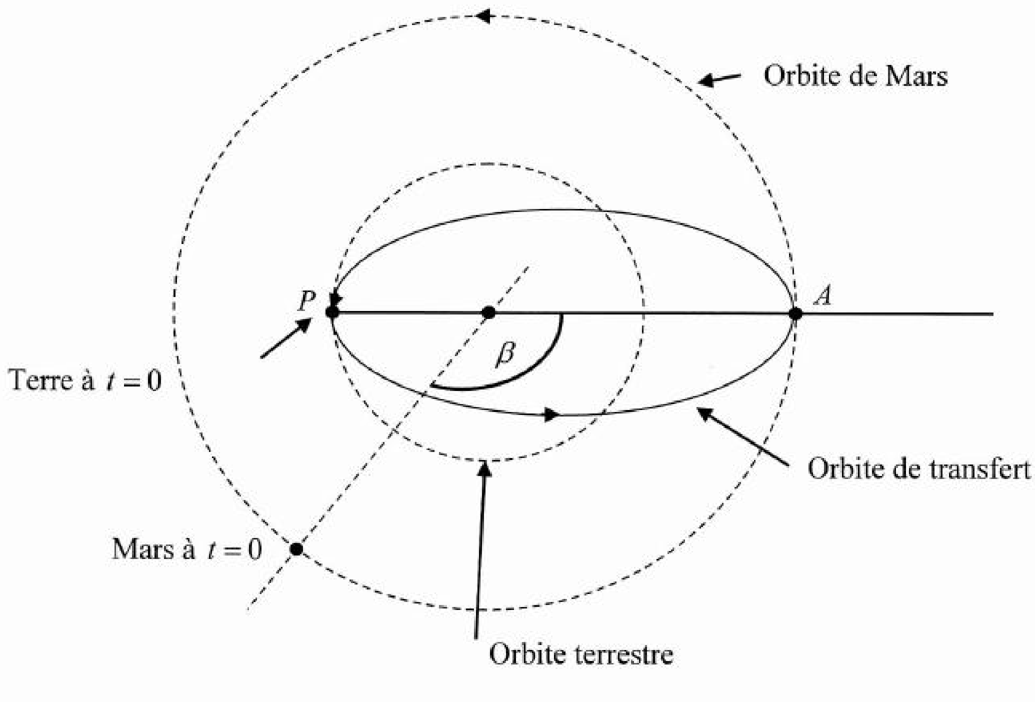


Figure I.3 : durée du transfert ; angle β

I.11 Par ajustement de la vitesse au point A, la sonde est placée en orbite circulaire autour de Mars, à une distance r_0 du centre de cette dernière. A partir de là, l'attraction de la Terre et celle du Soleil sur la sonde seront considérées comme négligeables. La sonde ne présentant pas de symétrie sphérique, on la modélise comme l'assemblage de deux modules sphériques de masses $\frac{m}{2}$, de barycentres P_1 et P_2, assemblés par une liaison de masse négligeable devant m. C'est donc le barycentre G de cet ensemble qui décrit la trajectoire circulaire de rayon r_0 autour de Mars ; on pose $GP_1 = GP_2 = h$. De plus, on va considérer un mouvement particulier pour lequel les points P_1, G, P_2 demeurent alignés avec le centre de Mars (voir **figure I.4**). Donner l'expression de la vitesse de rotation ω de la sonde autour de Mars, en fonction de m_M, r_0 et G. Application numérique pour $r_0 = 3{,}5.10^6\,\text{m}$.

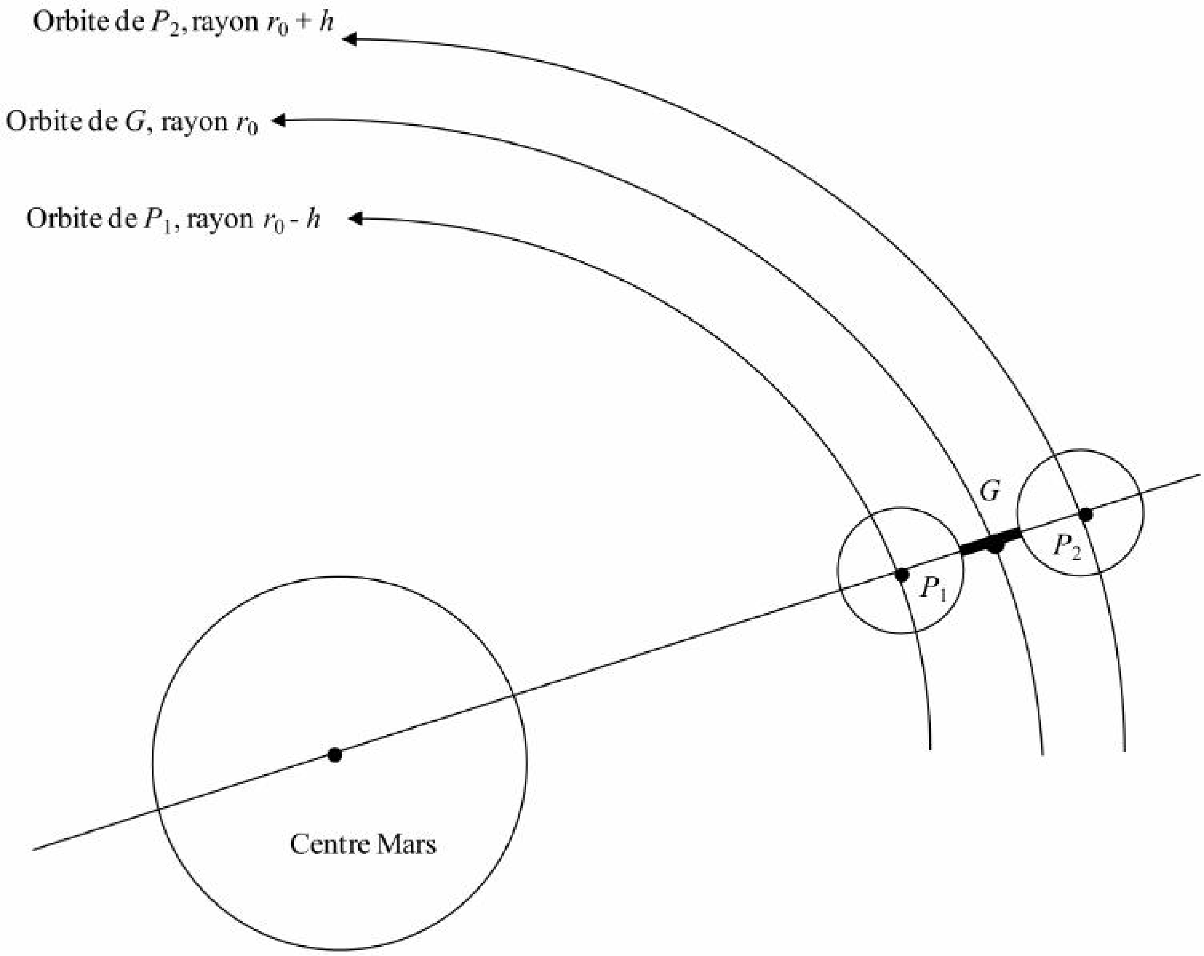


Figure I.4 : modélisation de la sonde

I.12 Pendant la durée de la mission autour de Mars, le référentiel lié à Mars sera considéré comme pratiquement galiléen. Le mouvement du module de barycentre P_1 s'effectue donc sous l'action de la force d'attraction de Mars et sous l'action d'une force $\vec{\Re}$ due à l'action du second module et transmise par la « liaison ». Cette force est colinéaire à $\overrightarrow{P_1P_2}$, soit $\vec{\Re} = \Re\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{2h}$. Etablir l'expression de $\Re$ en fonction de m, m_M, G, r_0 et h. Simplifier cette expression en supposant $h << r_0$. Calculer la valeur de $\Re$ pour $h = 10\,\text{m}$, (vous allez trouver une valeur faible montrant que la structure de la sonde n'est pas mise en péril par l'existence de cette force).

Problème n°2

Ce problème se propose d'établir quelques propriétés simples de l'Univers, telle qu'on les comprend actuellement, mais au moyen de modèles physiques simplifiés. À notre échelle, l'Univers est formé d'étoiles et de leurs planètes, regroupées en amas ou galaxies, ainsi que d'une certaine quantité de gaz interstellaire. Cependant, à plus vaste échelle, nous serons éventuellement amenés à traiter l'Univers comme un système fluide homogène.

Données :

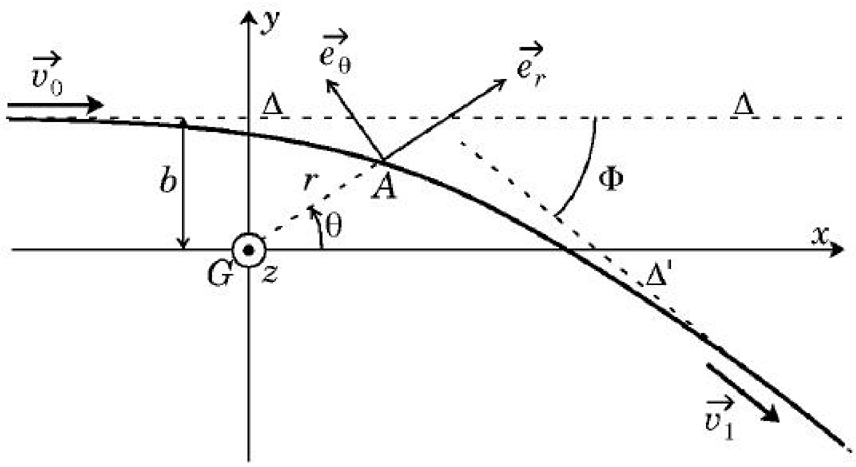
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8$ m.s^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de la gravitation universelle	$\mathscr{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3 .kg^{-1}.s^{-2}
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s
Durée d'une année	365, 25jours $=$ 3,16 $\cdot$ 10^{7}s
Masse du Soleil	$M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Rayon du Soleil	$R = 6,95 \cdot 10^8$ m

Les quatre parties et de nombreuses questions peuvent être abordées de manière très largement indépendante.

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

Cette partie étudie, dans un modèle non relativiste, la déviation d'une particule par une étoile E, considérée comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R, de masse M et de centre O. La particule étudiée A est ponctuelle et de masse m. On considère le système formé de A et E comme isolé. Le référentiel d'étude (K) est galiléen.

On appellera Gxy le plan du mouvement ; on repère la position de A dans le plan Gxy par ses coordonnées polaires $r = GA$ et $\theta = (\vec{e_x} \cdot \vec{r})$. On notera $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ la base locale polaire correspondante (voir figure ci-contre).



I.B.3) On pose

$$\overrightarrow{\sigma^*} \cdot \vec{e_z} = mC .$$

Expliciter C en fonction de r et $\dot{\theta} = d\theta/dt$, puis expliciter la dérivée $d\vec{v}/d\theta$ en fonction de $\mathscr{G}$, M et C. En déduire que le vecteur $\vec{e} = \alpha\vec{v} - \vec{e_\theta}$ est, pour un choix que l'on précisera de la constante α, une constante du mouvement.

Expliquer pourquoi on ne perd pas de généralité dans l'étude du mouvement en posant $\vec{e} = e\vec{e_y}$ avec $e > 0$.

I.B.4) À partir du résultat de la question précédente, exprimer $\vec{v} \cdot \vec{e_\theta}$ en fonction de α, e et θ ; en déduire l'équation de la trajectoire, qu'on écrira sous la forme $p/r = 1 + e\cos\theta$. Expliciter p en fonction de α et C, puis en fonction de C, $\mathscr{G}$ et M.

À quelle condition, portant sur e, la trajectoire de A est-elle hyperbolique ?

I.C - Étude de la trajectoire

On ne fait plus ici d'hypothèse particulière quant à la direction du vecteur $\vec{e}$ dans le plan Gxy du mouvement.

I.C.1) Lorsque la particule A est encore située à très grande distance de l'étoile E ($x_A \to -\infty$, voir la figure ci-dessus), sa vitesse $\vec{v_0}$ est colinéaire à Gx ; elle a pour norme v_0. L'asymptote Δ à cette trajectoire incidente passe à la distance b de G. Exprimer C en fonction de b et v_0 ; préciser en particulier le signe de C.

I.C.2) Lorsque la particule A s'est largement éloignée de l'étoile E, sa trajectoire est à nouveau une droite Δ' parcourue à la vitesse constante $\vec{v_1}$. Quelle est la norme de $\vec{v_1}$?

I.C.3) Exprimer, pour $t \to -\infty$ puis pour $t \to +\infty$, le vecteur $\vec{e}$ projeté sur la base $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ en fonction de α, v_0 et de l'angle de déviation Φ entre les droites Δ et Δ'.

En déduire une expression de $\tan(\Phi/2)$ en fonction de v_0, C, $\mathscr{G}$ et M.

I.C.4) Lors de son mouvement, la particule A passe à un certain instant à une distance minimale d du centre de l'étoile E. À partir par exemple de deux lois de conservation, déterminer une équation du second degré dont $1/d$ est solution. En déduire que :

$$d = \frac{C^2}{\mathcal{G}M + \sqrt{\mathcal{G}^2 M^2 + C^2 v_0^2}}.$$

I.C.5) Quel est le sens de variation, pour v_0 fixé, de la fonction $\Phi(d)$ reliant l'angle de déviation et la distance minimale d'approche ? Commenter.

I.C.6) Lorsque cette distance minimale correspond à une trajectoire rasante $(d = R)$, quelle est la valeur de la déviation Φ_0 ? On montrera que :

$$\tan\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{v_0^2\sqrt{R(R+\rho)}}$$

où l'on exprimera ρ en fonction de $\mathcal{G}$, M, et v_0.

I.C.7) Déterminer numériquement ρ, appelé rayon de Schwarzschild, dans le cas du Soleil pour une particule de vitesse $v_0 \approx c$.

I.D - Déviation de la lumière par le Soleil

La lumière est ici traitée comme un faisceau de photons, particules dont la masse m n'a pas besoin d'être précisée dans la suite (même si on sait aujourd'hui qu'elle est nulle), et qu'on traitera dans le cadre de la mécanique non relativiste (même si cette approximation n'est pas légitime). Ces photons seront considérés comme soumis, comme une particule matérielle ordinaire, à l'interaction gravitationnelle avec l'étoile.

On admettra que, pour les photons passant à proximité du Soleil, $\rho \ll R$ (voir I.C.6).

I.D.1) Déterminer, en secondes d'arc, la déviation Φ_0 correspondant à un photon rasant le Soleil. On prendra $v_0 = c$.

I.D.2) Une expédition fut montée en mai 1919 pour observer cette déviation à l'occasion d'une éclipse de Soleil. La météo ne fut pas très bonne, pas plus donc que la qualité des observations ; toutefois, des mesures ultérieures menées lors de diverses éclipses de 1922 à 1999 confirmèrent progressivement une valeur mesurée expérimentalement $\Phi_e = 1,75''$.

Pourquoi la mesure doit-elle être menée lors d'une éclipse du Soleil ? Commenter la valeur de Φ_e.

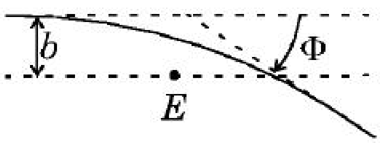
I.E - Effets de lentille gravitationnelle

La présence d'un astre massif E sur le trajet d'un faisceau de lumière parallèle provoque une déviation des rayons lumineux formant ce faisceau. L'angle de déviation Φ dépend de la distance b entre le rayon étudié et l'astre E, sous la forme

$$\Phi \approx \kappa \cdot \frac{\mathscr{G}M}{c^2 b}$$, où M est la masse de l'astre E.

I.E.1) Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de la grandeur constante κ.

I.E.2) Montrer que la déviation gravitationnelle de la lumière par l'astre E se comporte, pour un rayon passant à la distance b de l'astre E (cf. figure ci-contre), comme une *lentille convergente* dont on exprimera la distance focale f' en fonction de b, κ, c, $\mathscr{G}$ et M.



On considère un rayon lumineux rasant la surface du Soleil ; b est donc voisin du rayon R du Soleil.

I.E.3) Déterminer f' dans ces conditions ; on prendra $\kappa = 2$ SI et on exprimera le résultat en années-lumière (une année-lumière est la distance parcourue par la lumière pendant une année).

I.E.4) L'observation des astres lointains et peu lumineux est parfois améliorée lorsque s'interpose, sur le trajet de la lumière entre ces astres et la Terre, une galaxie massive. Pouvez-vous expliquer ce fait ?