

Devoir surveillé n°6 B : ondes

RÉSOLUTION DE PROBLÈME

La dangerosité du Wi-Fi

On s'interroge sur l'effet des émetteurs d'ondes électromagnétiques sur la santé

Les antennes Wi-Fi

L'antenne tige basique omnidirectionnelle à 2,4 GHz (1/4 d'onde) ressemblant à un stylo est la plus rencontrée. Elle est omnidirectionnelle, et est dédiée à la desserte de proximité.

Référence : Article wikipédia sur le wifi

Le DAS

Le DAS (Débit d'Absorption Spécifique ou SAR en anglais) dont la mention doit figurer obligatoirement dans la notice du fabricant, exprimé en $\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$, représente la puissance absorbée par kilogramme de tissus et représente généralement un DAS local correspondant à l'absorption d'énergie au niveau de la tête. Elle est mesurée par rapport à un " fantôme ", qui consiste en une tête moulée en résine et contenant un liquide aux propriétés d'absorption proches de celle d'une tête humaine. Une sonde plongée dans ce liquide permet de recueillir des mesures sur le mobile testé à émission maximale et dans diverses positions, selon un protocole validé par le CENELEC (Comité Européen de la Normalisation Electrotechnique). Le consensus adopté par l'ICNIRP (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection) évalue à $4 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ le seuil de puissance à partir duquel des effets nocifs peuvent apparaître.

Le DAS émis par les appareils WiFi est généralement de l'ordre de $0,2 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Référence : Site génération nouvelles technologies (disponible à l'adresse www.generation-nt.com/dossier-radiofréquences-sante-mobiles-article-95591-2.html)

Niveaux de référence pour l'exposition de la population générale.

Ces niveaux sont donnés pour les conditions de couplage maximal du champ à la personne exposée, assurant ainsi une protection maximale.

Domaine de fréquence	E en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$	B en μT	densité de puissance en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
2 - 300 GHz	61	0,20	10

Référence : Guide pour l'établissement de limites d'exposition aux champs électriques, magnétiques et électromagnétiques

Commission internationale pour la protection contre les rayonnements non ionisants (ICNIRP)

Cahiers de notes documentaires - Hygiène et sécurité du travail - N° 182, 1er trimestre 2001 - INRS



Antenne tige basique omnidirectionnelle à 2,4 GHz.

Estimer la puissance d'une antenne wi-fi pour qu'elle respecte les normes en vigueur.
Estimer alors le DAS d'un tel dispositif.

PROBLÈME N°1 : ETUDE D'UN PLASMA

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m , de charge $-e$, de nombre volumique n , en mouvement non relativiste de vitesse \vec{v} et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes planes progressives de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

1. a) Montrer à partir des équations de Maxwell, que de telles solutions supposent que la densité de courant \vec{j} soit elle-même une onde plane progressive harmonique du type :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Exprimer \vec{j}_0 en fonction de ω , \vec{k} , \vec{E}_0 et \vec{B}_0 .

b) En déduire que \vec{j} est orthogonal à \vec{k} .

c) Exprimer le champ magnétique en fonction de \vec{E} , \vec{k} et ω .

d) Montrer que \vec{j} et \vec{E} sont colinéaires et déterminer la conductivité complexe du plasma définie par $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$. On utilisera la relation

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

2. a) Ecrire l'équation du mouvement de l'électron et justifier que l'effet du champ magnétique est négligeable.
b) En déduire une nouvelle expression de $\underline{\sigma}$. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ aux charges.
a) En utilisant les deux expressions de $\underline{\sigma}$, déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$ en introduisant la constante $K = \sqrt{\mu_0 n e^2 / m}$.
b) Calculer en fonction de k et K , les vitesses de phase et de groupe. Commenter et montrer que $v_g v_\varphi = c^2$.
3. Deux trains d'ondes de longueurs d'onde respective λ_1 et $\lambda_2 < \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L . En supposant que $K\lambda_1 \ll 1$ et $K\lambda_2 \ll 1$ montrer que la différence de temps de réception des deux signaux est :

$$\delta t \approx \frac{LK^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

II : ANTENNE DEMI-ONDE

1 Rappels

1. Définir ce qu'on appelle dipôle oscillant et hiérarchiser les 3 longueurs que l'on peut définir.
2. Pour un dipole oscillant on donne l'expression du champ \vec{E} ou \vec{B} :

$$\vec{X}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Préciser s'il s'agit de \vec{E} ou \vec{B} en utilisant l'analyse dimensionnelle. En utilisant le fait que l'onde a la structure locale d'une onde plane (concept que l'on précisera) on donnera l'expression des deux champs EM.

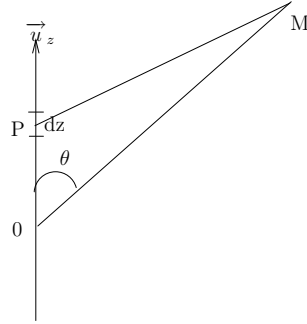
3. a) Définir et calculer le vecteur de Poynting. Que représente-t-il physiquement ?
b) En déduire la puissance électromagnétique \mathcal{P} moyenne rayonnée par le dipôle à travers une sphère de rayon r . Commenter.

On rappelle que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$

2 Etude de l'antenne

Une antenne filiforme de longueur ℓ d'axe Oz centrée sur O est siège de courant sinusoïdaux $\underline{I}(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \exp(j\omega t)$ avec $\omega/c = 2\pi/\lambda$. On suppose que $\ell = \lambda/2$ et que la distance d'observation est $r \gg \lambda$.

1. Quelle condition doit vérifier l'intensité de l'antenne à ses extrémités ? Est-ce le cas ?
2. Quelle est la différence majeure entre l'antenne et le dipôle oscillant ? Dans quelle zone est-on ici ?
3. Afin de pouvoir utiliser les résultats du cours, on découpe l'antenne en éléments de longueur dz .



Justifiez à l'aide du 1.2 que le champ rayonné par un élément dz autour d'un point P d'ordonnée z vaut

$$d\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin \theta j\omega I_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp(j\omega(t - PM/c)) dz \vec{u}_\theta$$

4. Comme M est très éloigné, on supposera pour intégrer que les champs rayonnés par dz sont émis dans la même direction θ . Exprimer dans le terme de phase de $d\vec{E}$, PM en fonction de $r = OM$ au premier ordre en z/r . En déduire, sous forme intégrale \vec{E} et \vec{B} .
5. Calculer explicitement les champs électrique et magnétique rayonnés sachant que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \exp(jax) dx = \frac{2 \cos a\pi/2}{1 - a^2}$$

6. Montrer que le vecteur de Poynting \vec{R} est en valeur moyenne :

$$\langle R \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta}$$

7. Tracer $\langle R \rangle$ dans un diagramme polaire.
8. On donne

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta \approx 1,22$$

Calculer la puissance moyenne \mathcal{P} rayonnée par l'antenne. On définit la résistance de rayonnement r par $\mathcal{P} = r I_{eff}^2$. Est-ce une véritable résistance ? Calculer r .

9. Pour une antenne de taille $\ell \ll \lambda$, on peut montrer que $r \approx 1000 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \Omega$. Quel genre d'antenne doit-on choisir pour émettre un signal électromagnétique ?

III. PROPAGATION GUIDÉE

On rappelle les relations de passage à la traversée d'une surface portant une charge surfacique σ et un courant surfacique \vec{j}_s :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}\end{aligned}$$

*Les ondes électromagnétiques sont susceptibles de se propager dans divers milieux. Ce problème présente une étude du phénomène de **guidage** d'ondes électromagnétiques entre deux plans ; cependant, il ne s'agit pas ici de plans métalliques, mais de plans de **discontinuité** des propriétés électriques des matériaux utilisés.*

Les vecteurs seront notés par des caractères gras (exemple : \mathbf{E}). Les vecteurs unitaires du système d'axes orthonormé ($Oxyz$) seront notés \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z .

On rappelle les valeurs numériques de la célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

On rappelle aussi que $\text{rot rot } \mathbf{U} = \text{grad div } \mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}$, pour toute fonction vectorielle \mathbf{U} .

Première partie – Milieux conducteurs

Nous étudions dans cette partie un milieu décrit par les équations de Maxwell relatives au vide, caractérisé par la densité volumique de courant \mathbf{j} et par une densité volumique de charge nulle : $\rho = 0$.

16. Expliquer en quoi est généralement fautive l'affirmation « *Ce milieu ne comporte pas de charges, donc le courant électrique y est nécessairement nul* ».
17. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique (\mathbf{E} , \mathbf{B}) dans ce milieu.

Le milieu étudié sera provisoirement considéré comme un milieu conducteur ohmique, de conductivité γ . Les champs étudiés (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{j}) sont harmoniques de pulsation ω .

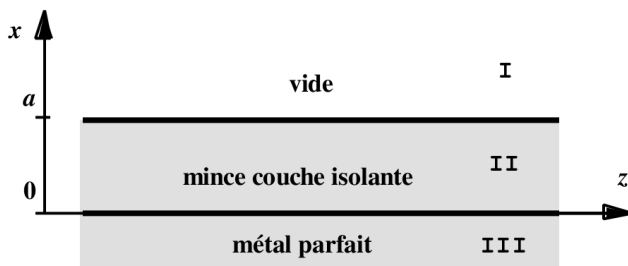
18. Quelle approximation classique peut-on faire dans les équations de Maxwell, pour les bons conducteurs ? On discutera des limites en fréquence de cette approximation dans le cas du *cui-vre* ($\gamma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) et du *silicium* ($\gamma = 3 \times 10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$). Conclure, sachant qu'on limitera la suite de l'étude à des ondes de fréquence inférieure à 1GHz.
19. Déterminer, pour un bon conducteur, l'équation vérifiée par le champ électrique \mathbf{E} seul ; on l'écrira en fonction de la grandeur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.
20. Montrer que, dans un milieu bon conducteur occupant l'espace $x > 0$, invariant par translation dans le plan (Oyz), un champ électrique de la forme :

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) \right] \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right)$$

est la seule solution des équations de Maxwell compatible avec la géométrie du problème. Commenter ; conclure, numériquement, dans le cas du *cui-vre* à 1MHz.

21. Qu'appelle-t-on *approximation des conducteurs parfaits* ?

Seconde partie – Ondes de surface



L'espace contient trois régions distinctes (cf. figure) ; la région I ($x > a > 0$) est vide ; la région II ($0 < x < a$) est constituée d'une mince couche de milieu isolant, et la région III ($x < 0$) est constituée d'un métal parfait).

Dans le métal, le champ électromagnétique est nul. Dans le vide, les densités volumiques de charge ρ et de courant \mathbf{j} sont nulles. On **admet** que, dans la région isolante, le champ électromagnétique vérifie

les équations de Maxwell modifiées :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

où la *permittivité relative* du diélectrique ϵ_r est un nombre réel supérieur à 1.

On étudie la propagation dans ces trois régions de l'espace d'une onde électromagnétique dont le champ magnétique, porté par le vecteur unitaire \mathbf{u}_y s'écrit $\mathbf{B} = B_0(x) \mathbf{u}_y \exp[i(\omega t - kz)]$

et l'on cherche le champ électrique sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x) \exp[i(\omega t - kz)]$

Les constantes ω et k ont la même valeur réelle positive dans les trois milieux, tandis que la fonction $B_0(x)$ et les trois composantes $E_{0x}(x)$, $E_{0y}(x)$, $E_{0z}(x)$ de $\mathbf{E}_0(x)$ sont des fonctions de x seulement, avec des expressions différentes dans les trois milieux I, II et III.

22. Exprimer les diverses composantes de $\mathbf{E}_0(x)$ en fonction de ω , k , $B_0(x)$ et de ses dérivées, et des constantes qui caractérisent le problème, dans la région II.
En déduire les relations analogues s'appliquant dans la région I.
23. Déterminer, dans les régions I et II, les équations différentielles vérifiées par la fonction $B_0(x)$.
24. On cherche une solution des équations de Maxwell (dite *onde guidée en surface*) telle que l'amplitude du champ magnétique est une fonction *exponentielle réelle* de x dans le milieu I et une fonction *sinusoïdale* de x dans le milieu II. On notera ces fonctions $B_I \exp(-\alpha x)$ et $B_{II} \cos(\beta x + \phi)$ respectivement. À quelle condition (portant sur k , ω , c et ϵ_r) une telle onde existe-t-elle ? Déterminer alors α et β et montrer la relation (R1) :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_r - 1) \quad (\text{R1})$$

25. Expliquer l'analogie et les différences entre le dispositif présenté ici et les *guides d'ondes* à parois métalliques étudiés dans le cadre du cours.

Troisième partie – Relations de passage et modes du guide d'ondes

À la surface de séparation de deux milieux matériels (vide, métal parfait ou isolant), on admettra que les relations de passage du champ électromagnétique sont les mêmes que celles qui sont étudiées dans

le cadre du cours pour ce qui concerne les deux composantes (normale et tangentielle) du champ magnétique et la seule composante tangentielle du champ électrique.

En revanche, la relation relative à la composante normale du champ électrique ne se généralise pas ici. On n'étudiera donc pas l'éventuelle discontinuité de cette composante normale dans la suite.

D'une façon générale, l'écriture des relations de passage aura pour but de relier les expressions des champs de part et d'autre des surfaces $x = 0$ et $x = a$; on ne cherchera pas à déterminer les expressions des éventuelles densités surfaciques de charge ou de courant.

26. Expliquer pourquoi la fonction $B_0(x)$ est continue de part et d'autre de la surface $x = a$.
27. Exprimer une relation de passage à la surface $x = 0$ permettant d'obtenir la valeur de ϕ .
28. Exprimer de même des relations de passage à la surface $x = a$.
29. Montrer qu'il n'existe pas de solution de la forme demandée (*onde de surface*) pour certaines valeurs de (βa) . On supposera bien sûr dans la suite que la solution cherchée existe.
30. Établir la relation (R2) : $\beta \tan(\beta a) = \epsilon_r a$.
31. Pour résoudre le système d'équations formé de (R1) [question (24)] et (R2), on pourra utiliser une méthode graphique, en posant $X = \beta a$ et $Y = \alpha a$.
Il n'est pas nécessaire de disposer d'une calculatrice graphique, ni même d'une calculatrice très performante, pour venir à bout des calculs numériques nécessaires, qui sont simples.
 Montrer que les solutions de ces équations sont en nombre fini, ce nombre dépendant de la pulsation ω . On pourra remarquer que les zéros de la fonction $X \rightarrow X \tan(X)$ sont les mêmes que ceux de la fonction $X \rightarrow \tan(X)$.
32. Chaque solution porte le nom de *mode* du guide. Définir et déterminer la pulsation de coupure ω_n du mode numéro n . Expliquer l'analogie avec les modes d'un guide d'ondes à parois métalliques.