Devoir surveillé n°6 A : ondes

Problème n°1 : Etude d'un plasma

III.A – Ondes électromagnétiques dans le vide

III.A.1) Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants.

Quelles sont les traductions globales, dites aussi formes intégrales, de ces lois locales ?

III.A.2) Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

III.A.3) On considère une onde dont le champ électrique en notation complexe s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Caractériser cette onde (donner 5 qualificatifs).

III.A.4) À quelle condition sur k et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? Comment appelle-t-on cette relation ? Le vide est-il un milieu dispersif (à justifier) ?

III.A.5) Déterminer l'expression réelle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.

III.A.6) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$. Quelle est la signification physique du flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface S ouverte, arbitrairement orientée ?

III.B – Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

III.B.1) En absence de densité volumique de charges, mais en présence de densité volumique de courants $\vec{\jmath}(M,t)$, établir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\vec{\jmath}}(M,t)$.

III.B.2) On considère une onde du type $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)\, \vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose, en notation complexe, la relation d'Ohm : $\underline{\vec{\jmath}}(M,t) = \underline{\gamma}\, \underline{\vec{E}}(M,t)$ où $\underline{\gamma}$ est la conductivité électrique complexe du milieu, on suppose qu'elle ne dépend ni de l'espace ni du temps.

Réécrire l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\gamma}$.

À quelle condition sur $\underline{k}$ et ω cette onde est-elle une solution de l'équation de propagation ? On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

III.B.3) On pose $\underline{k} = k_1 + i\, k_2$, avec k_1 et k_2 réels.

a) Écrire en notation réelle l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$.

b) Par analogie avec le vide, dire ce que représente k_1, la partie réelle de $\underline{k}$. Donner une interprétation du signe de k_1. Quel phénomène physique traduit k_2, la partie imaginaire de $\underline{k}$?

Que dire si le produit $k_1\, k_2$ est positif ? Que dire si le produit $k_1\, k_2$ est négatif ?

c) Définir par une phrase la vitesse de phase v_φ et donner l'expression de la vitesse de phase de cette onde en fonction des grandeurs précédemment définies.

III.B.4) Démontrer une relation simple entre les vecteurs $\underline{\vec{E}}(M,t)$, $\underline{\vec{k}}$ (vecteur d'onde complexe) et $\underline{\vec{B}}(M,t)$. Déterminer les expressions de la représentation complexe du champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ et du champ réel $\vec{B}(M,t)$. Que dire des champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ si k_2 est non nul ?

III.B.5) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ puis l'expression de sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$. Commenter.

III.B.6) Une onde incidente, $\underline{\vec{E}}_i(M,t) = E_{0i} \exp i(\omega t - \underline{k}_A x)\, \vec{e}_y$ où $E_{0i} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k}_A = k_{A1} + i\, k_{A2}$ avec k_{A1} et k_{A2} deux réels, se propageant dans le milieu (A) arrive en incidence normale sur une interface située en $x = 0$ et séparant le milieu (A) du milieu (B).

Cette onde incidente donne naissance à deux ondes, l'une réfléchie, $\underline{\vec{E}}_r(M,t) = \underline{E}_{0r} \exp i(\omega t + \underline{k}_A x)\, \vec{e}_y$, se propageant dans le milieu (A) et l'autre transmise, $\underline{\vec{E}}_t(M,t) = \underline{E}_{0t} \exp i(\omega t - \underline{k}_B x)\, \vec{e}_y$ où $\underline{k}_B = k_{B1} + i\, k_{B2}$ avec k_{B1} et k_{B2} deux réels, se propageant dans le milieu (B).

On définit les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques au niveau de l'interface située en $x = 0$ par

$$R = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(O,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(O,t) \right\| \right\rangle} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(O,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(O,t) \right\| \right\rangle}$$

où $\vec{\Pi}_i(O,t)$, $\vec{\Pi}_r(O,t)$ et $\vec{\Pi}_t(O,t)$ représentent respectivement les vecteurs de Poynting, au voisinage d'un point O de l'interface, des ondes incidente, réfléchie et transmise ($\|\vec{A}\|$ désigne le module du vecteur $\vec{A}$).

a) Justifier l'écriture du champ $\underline{\vec{E}}_r(M,t)$.

b) Donner les expressions de R et de T en fonction des données précédentes.

c) Que vaut la somme $R + T$? Quelle est la signification de cette égalité ?

d) Que dire des coefficients R et T si $k_{B1} = 0$? Quelle en est la signification ?

Ne pouviez-vous pas prévoir ce résultat dès les questions **III.B.4** ou **III.B.5** ?

e) Connaissez-vous un exemple similaire en électrocinétique ?

III.C – Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $-e$, de masse m_e, égale à $n_1 = 1{,}00 \times 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $+e$, de masse m_C, égale aussi à n_1, l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{e}_y$ où $E_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\underline{k} \in \mathbb{C}$. On pose à nouveau $\underline{k} = k_1 + i\,k_2$, avec k_1 et k_2 réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans toute la suite, vous pourrez utiliser les résultats démontrés dans la **partie III.B**.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (i.e. leurs vitesses sont très petites devant c).

III.C.1) En admettant que le rapport $\omega/|\underline{k}|$ est de l'ordre de c, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

III.C.2) En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_i$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$. À la vue des valeurs numériques, montrer que $\underline{\gamma} = -i\dfrac{n_1 e^2}{m_e \omega}$.

III.C.3) Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

III.C.4) Établir l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde dans le vide λ_p associée. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?

III.C.5) On se place dans le cas $\omega < \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c (on prendra k_2 négatif).

b) Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue.

c) Donner l'expression de $\langle\vec{\Pi}(M,t)\rangle$ dans le plasma.

III.C.6) On se place dans le cas $\omega > \omega_p$.

a) Donner l'expression de $\underline{k}$ en fonction de ω_p, ω et c. Commenter.

b) Donner les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs).

c) Donner l'expression de $\langle\vec{\Pi}(M,t)\rangle$.

d) Déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ de cette onde en fonction de ω_p, ω et c. Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ?

e) Calculer la vitesse de groupe $v_g(\omega)$ en fonction de ω_p, ω et c. Donner la signification physique de cette vitesse.

f) Comparer $v_\varphi(\omega)$ et $v_g(\omega)$ à c. Que penser du fait que $v_\varphi(\omega)$ puisse être supérieure à c ?

III.C.7) Le choix de la fréquence des ondes radars émises par Jason 2 ($f = 13{,}6$ GHz) vous semble-t-il correct ?

Problème n°2 : Antenne demi-onde

1 Rappels

1. Définir ce qu'on appelle dipôle oscillant et hiérarchiser les 3 longueurs que l'on peut définir.
2. Pour un dipole oscillant on donne l'expression du champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{B}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{X}}(\mathrm{M},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Préciser s'il s'agit de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ en utilisant l'analyse dimensionnelle. En utilisant le fait que l'onde a la structure locale d'une onde plane (concept que l'on précisera) on donnera l'expression des deux champs EM.

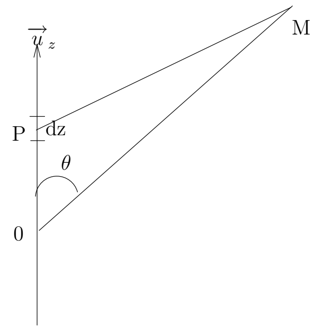
3. a) Définir et calculer le vecteur de Poynting. Que représente-t-il physiquement ?
   b) En déduire la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ moyenne rayonnée par le dipôle à travers une sphère de rayon r. Commenter.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$

2 Etude de l'antenne

Une antenne filiforme de longueur ℓ d'axe Oz centrée sur O est siège de courant sinusoidaux $\underline{\mathrm{I}}(z,t) = \mathrm{I}_0 \cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right)\exp(j\omega t)$ avec $\omega/c = 2\pi/\lambda$. On suppose que $\ell = \lambda/2$ et que la distance d'observation est $r \gg \lambda$.

1. Quelle condition doit vérifier l'intensité de l'antenne à ses extrémites ? Est-ce le cas ?
2. Quelle est la différence majeure entre l'antenne et le dipôle oscillant ? Dans quelle zone est-on ici ?
3. Afin de pouvoir utiliser les résultats du cours, on découpe l'antenne en éléments de longueur dz.



Justifiez à l'aide du 1.2 que le champ rayonné par un élément dz autour d'un point P d'ordonnée z vaut

$$d\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sin\theta j\omega \mathrm{I}_0\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\exp(j\omega(t - \mathrm{PM}/c))\mathrm{d}z\overrightarrow{u_\theta}$$

4. Comme M est très éloigné, on supposera pour intégrer que les champs rayonnés par dz sont émis dans la même direction θ. Exprimer dans le terme de phase de $d\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$, PM en fonction de $r = \mathrm{OM}$ au premier ordre en z/r. En déduire, sous forme intégrale $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$ et $\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}}$.
5. Calculer explicitement les champs électrique et magnétique rayonnés sachant que
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\exp(jax)dx = \frac{2\cos a\pi/2}{1-a^2}$$
6. Montrer que le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est en valeur moyenne :
$$\langle \mathrm{R}\rangle = \frac{\mu_0 c \mathrm{I}_0^2\cos^2\left(\dfrac{\pi\cos\theta}{2}\right)}{8\pi^2 r^2\sin^2\theta}$$
7. Tracer $\langle \mathrm{R}\rangle$ dans un diagramme polaire.
8. On donne
$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin\theta}d\theta \approx 1,22$$
Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée par l'antenne. On définit la résistance de rayonnement r par $\mathcal{P} = r\mathrm{I}_{eff}^2$. Est-ce une véritable résistance ?Calculer r.

9. Pour une antenne de taille $\ell \ll \lambda$, on peut montrer que $r \approx 1000 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$ Ω. Quel genre d'antenne doit-on choisir pour émettre un signal électromagnétique ?

Résolution de problème

La dangerosité du Wi-Fi

On s'interroge sur l'effet des émetteurs d'ondes électromagnétiques sur la santé

Les antennes Wi-Fi

L'antenne tige basique omnidirectionnelle à 2,4 GHz (1/4 d'onde) ressemblant à un stylo est la plus rencontrée. Elle est omnidirectionnelle, et est dédiée à la desserte de proximité.

Référence : Article wikipédia sur le wifi

Antenne tige basique omnidirectionnelle à 2,4 GHz.

Le DAS

Le DAS (Débit d'Absorption Spécifique ou SAR en anglais) dont la mention doit figurer obligatoirement dans la notice du fabricant, exprimé en $\mathrm{W \cdot kg^{-1}}$, représente la puissance absorbée par kilogramme de tissus et représente généralement un DAS local correspondant à l'absorption d'énergie au niveau de la tête. Elle est mesurée par rapport à un " fantôme ", qui consiste en une tête moulée en résine et contenant un liquide aux propriétés d'absorption proches de celle d'une tête humaine. Une sonde plongée dans ce liquide permet de recueillir des mesures sur le mobile testé à émission maximale et dans diverses positions, selon un protocole validé par le CENELEC (Comité Européen de la Normalisation Electrotechnique). Le consensus adopté par l'ICNIRP (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection) évalue à 4 $\mathrm{W \cdot kg^{-1}}$ le seuil de puissance à partir duquel des effets nocifs peuvent apparaître.

Le DAS émis par les appareils WiFi est généralement de l'ordre de $0,2\ \mathrm{W \cdot kg^{-1}}$.

Référence : Site génération nouvelles technologies (disponible à l'adresse www.generation-nt.com/dossier-radiofrequences-sante-mobiles-article-95591-2.html)

Niveaux de référence pour l'exposition de la population générale.

Ces niveaux sont donnés pour les conditions de couplage maximal du champ à la personne exposée, assurant ainsi une protection maximale.

Domaine de fréquence	E en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$	B en μT	densité de puissance en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$
2 - 300 GHz	61	0,20	10

Référence : Guide pour l'établissement de limites d'exposition aux champs électriques, magnétiques et électromagnétiques
Commission internationale pour la protection contre les rayonnements non ionisants (ICNIRP)
Cahiers de notes documentaires - Hygiène et sécurité du travail - N° 182, 1er trimestre 2001 - INRS

Estimer la puissance d'une antenne wi-fi pour qu'elle respecte les normes en vigueur.
Estimer alors le DAS d'un tel dispositif.