

Devoir surveillé n°3 A

En coordonnées cylindriques

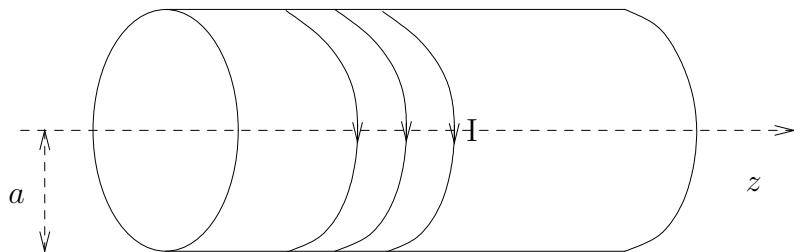
$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial rF_\theta}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

PROBLÈME N°1 : SOLÉNOÏDE EN RÉGIME VARIABLE

On considère un solénoïde infini d'axe Oz, de rayon a , comportant n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau \approx 10\mu\text{s}$.



A. Calcul du champ magnétique

1. Préciser ce qu'on appelle l'approximation des régimes quasi-stationnaires et justifier dans le cas présent qu'on peut se placer dans cette approximation. Déterminer alors l'équation de Maxwell-Ampère. En déduire que le théorème d'Ampère de la magnétostatique peut s'appliquer.
2. En considérant que le champ magnétique est nul à l'extérieur de solénoïde, déterminer le champ \vec{B} dans le solénoïde (on utilisera bien sûr les symétries et invariances du problème).

B. Champ électrique

On cherche le champ électrique en coordonnées cylindriques sous la forme $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$. Déterminer \vec{E} en utilisant les équations de Maxwell.

Montrer qu'on obtient finalement :

$$\vec{E} = \frac{r}{2\tau} B(t) \vec{u}_\theta$$

où $B(t)$ est la norme de \vec{B} .

C. Bilan d'énergie local

Dans cette partie et la suivante, on pourra exprimer les diverses grandeurs en fonction de $B(t)$.

1. Déterminer l'énergie volumique électromagnétique. Montrer que l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique.
2. Déterminer et représenter sur un dessin le vecteur de Poynting \vec{H} . Interpréter son sens.
3. Montrer qu'on retrouve l'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétique à l'intérieur du solénoïde.

D. Bilan d'énergie global

1. Intégrer l'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétique pour obtenir le bilan d'énergie macroscopique. Donner la signification physique des différents termes.
2. Déterminer l'énergie électromagnétique contenue dans une longueur h du solénoïde (selon z). En déduire l'inductance L du solénoïde.
3. Exprimer le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre de rayon a et de longueur h .
4. Retrouver le bilan global d'énergie électromagnétique dans ce cas particulier.

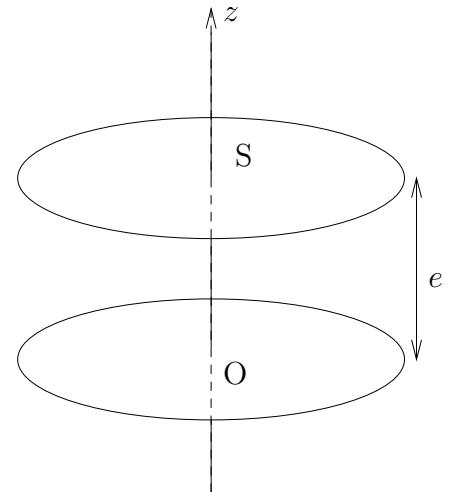
PROBLÈME N°2 : CONDENSATEUR EN RÉGIME VARIABLE

Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de surface $S = \pi a^2$ et de rayon a , de même axe Oz et séparés d'une distance e .

Initialement le condensateur est chargé Q_0 . A un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut $V(t)$, ses armatures portent respectivement les charges $q(t) = CV(t)$ et $-q(t)$ où $C = \epsilon_0 S/e$ est la capacité du condensateur. On néglige les effets de bord, de telle sorte qu'en coordonnées cylindriques le champ électromagnétique dans le condensateur est en première approximation de la forme :

$$\vec{E} = E(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B(r, t) \vec{u}_\theta$$

Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.



1. Le condensateur se décharge dans une résistance R . Exprimer $q(t)$ en introduisant une constante de temps τ qu'on utilisera dans la suite.
2. A un instant quelconque déterminer $E(t)$ à l'intérieur du condensateur en fonction des données.
3. Montrer à l'aide du théorème d'Ampère généralisé que, dans le condensateur,

$$B(r, t) = -\frac{\mu_0 Q_0 e^{-t/RC}}{2RCS} r$$

4. En déduire le vecteur de Poynting dans le condensateur. Dessiner \vec{E} , \vec{B} et \vec{P} sur un dessin. Interpréter qualitativement le sens de \vec{P} .
5. En déduire la puissance électromagnétique \mathcal{P} sortant du condensateur.
6. Déduire de cette équation, l'énergie électromagnétique $U_{em}(t)$ emmagasinée par le condensateur. Montrer qu'on retrouve l'expression classique de l'énergie emmagasinée dans un condensateur.
7. Justifier que l'énergie magnétique est négligeable devant l'énergie électrique dans l'ARQS.
8. Retrouver $U_{em}(t)$ en utilisant la densité d'énergie électromagnétique u_{em} .

III. CRISTALLOGRAPHIE

On définit en thermodynamique 3 coefficients thermoélastiques :

- Le coefficient de dilatation isobare : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$
- le coefficient de compression isochore : $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$

- Le coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$

A / STRUCTURE CRISTALLINE DU FER ET DE L'ACIER

Le fer peut cristalliser sous deux formes selon la température. À basse température, la maille conventionnelle du fer α possède la structure cubique centrée (CC) alors qu'à haute température, le fer γ adopte la structure cubique à faces centrées (CFC). La transition s'opère à 910 °C à la pression standard ; puis, au-dessus de 1390 °C, le fer δ reprend une structure CC.

Données numériques : *masse molaire du fer* $M(Fe) = 55,85 \text{ g.mol}^{-1}$,
masse molaire du carbone $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$,
nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

A-1 Fer α

A1*a. Donner la définition d'une maille élémentaire. Par quel(s) paramètre(s) est-elle déterminée ?

A1*b. Dessiner la maille conventionnelle du fer α .

A1*c. Combien cette maille renferme-t-elle d'atomes ?

A1*d. Définir puis calculer la compacité φ_{CC} d'une structure CC en adoptant le modèle de sphères dures indéformables.

A1*e. Calculer le paramètre a_α de la maille cubique, sachant qu'à 20 °C la masse volumique du fer α est $\rho_\alpha = 7868 \text{ kg.m}^{-3}$.

A1*f. Calculer le rayon R_α de l'atome de fer α à 20 °C.

A-2 Influence de la température

Le volume massique du fer α passe de la valeur $v_{(\alpha)20} = 0,1271 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ à la température de 20 °C, à la valeur $v_{(\alpha)910} = 0,1321 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ à 910 °C, la variation étant linéaire en fonction de la température. L'étude est menée à pression constante.

A2*a. Lequel des trois coefficients thermoélastiques α , β ou χ_T ces données vous permettent-elles de calculer ? En donner la valeur moyenne.

A2*b. Entre quelles limites le paramètre de maille varie-t-il entre ces deux températures ?

A2*c. Quel est le rayon de l'atome de fer α à 910 °C ?

Dans la suite, le rayon atomique du fer α sera $R_\alpha = 125 \text{ pm}$.

A-3 Fer γ

A3*a. Dessiner la maille conventionnelle du fer γ .

A3*b. Combien cette maille renferme-t-elle d'atomes ?

A3*c. Calculer la compacité φ_{CFC} d'une structure CFC (modèle de sphères dures indéformables).

A3*d. Le rayon atomique du fer γ est $R_\gamma = 129 \text{ pm}$. Calculer le paramètre a_γ de la maille cubique.

A3*e. Evaluer le volume massique $v_{(\gamma)910}$ du fer γ .

Si le carbone est très soluble dans le fer liquide (au-dessus de 1536 °C), il n'en va pas de même lorsqu'il se forme une solution solide fer-carbone (fonte ou acier). En effet, le carbone, dont le rayon atomique vaut $R_C = 77 \text{ pm}$, doit s'insérer dans les sites octaédriques des mailles cristallines de fer α ou de fer γ .

A-4 Sites octaédriques

A4*a. Dans la représentation de la maille de fer α ci-dessous (figure 1), un site interstitiel a été singularisé. De quel de type de site s'agit-il ? Est-il régulier ? (réponse à justifier)

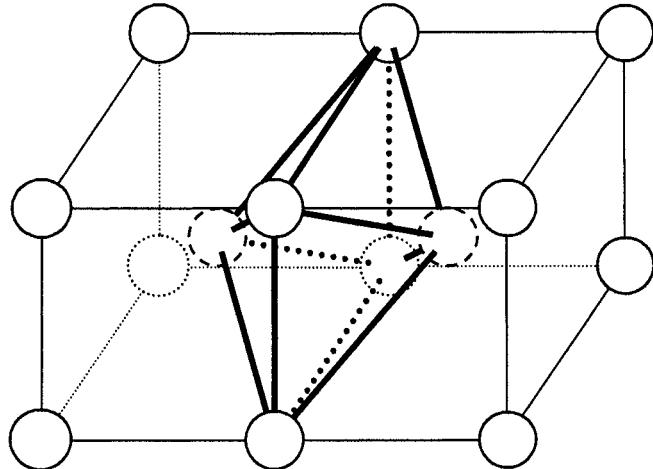


Figure 1

A4*b. Quel serait le rayon maximal $R_{M\alpha}$ d'un atome qui s'insérerait dans ce site sans entraîner de déformation de la structure cristalline ? Calculer $R_{M\alpha}$.

A4*c. Où sont situés les sites octaédriques dans le fer γ ? S'agit-il d'octaèdres réguliers ?

A4*d. Quel serait le rayon maximal $R_{M\gamma}$ d'un atome qui s'insérerait dans ce site sans déformer la structure cristalline ? Calculer $R_{M\gamma}$.

A4*e. Que pouvez-vous en conclure sur la solubilité par insertion du carbone dans le fer solide ?

A-5 Insertion du carbone

Par hypothèse, lorsqu'un atome de carbone s'insère dans le cristal de fer, toutes les mailles subissent la même expansion. L'insertion de carbone dans le fer α permet de former un alliage appelé ferrite ; lorsque l'insertion s'opère dans le fer γ , l'alliage obtenu est dénommé austénite.

A5*a. Quelle valeur prend le paramètre de maille du fer α lorsqu'un atome de carbone s'insère dans un site octaédrique ? À quelle variation relative de volume cela conduit-il ?

A5*b. De même, que devient le paramètre de maille du fer γ lorsqu'un atome de carbone s'insère dans un site octaédrique ? Quelle est la variation relative de volume induite ?

A5*c. Quelles conclusions pouvez-vous en tirer quant à la formation de la ferrite et de l'austénite ?

Un acier austénitique contient 1,33% de carbone en masse.

A5*d. Quel est le nombre moyen d'atomes de carbone qui ont été insérés par maille ?

A5*e. Calculer la masse volumique de cet acier. Que pensez-vous de ce résultat ?