

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 B

I. EMETTEUR DE PUISSANCE POUR TÉLÉPHONE PORTABLE

Le dispositif comprend un circuit RLC parallèle modélisant l'antenne d'émission et son filtre d'adaptation, un composant T (transistor de puissance) imposant la forme du courant dans l'antenne sous forme d'impulsions de fréquence $\frac{1}{T_0} = 900$ MHz telles que représentées ci-dessous. Enfin une source de tension continue E constitue l'alimentation du dispositif.



Le développement en série de Fourier du signal est

$$i(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2I_0 \sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n} \cos(2\pi n f_0 t)$$

On considère le circuit modélisant l'antenne comme très sélectif de fréquence centrale $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 900$ MHz et de coefficient de qualité $Q=100$. La résistance d'émission est $R=37 \Omega$.

1. Que représente la constante A ? Evaluer cette constante en fonction de I_0 , τ et T_0 .
2. Déterminer l'amplitude du fondamental en fonction de la durée τ des impulsions, de f_0 et de I_0 pour $\tau \ll T_0$.
3. Tracer le spectre du signal d'entrée i .
4. Montrer que la "fonction de transfert" $\frac{v_a}{i}$ est celle d'un filtre passe-bande dont on déterminera les caractéristiques B, ω_0 et Q en fonction des valeurs des composants :

$$\frac{v_a}{i} = \frac{B}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

5. Justifier que la tension $v_a(t)$ aux bornes de l'antenne est une fonction quasi-sinusoïdale du temps. Précisez sa fréquence et son amplitude en fonction de f_0 , R, τ et I_0 . On posera $V_1 = 2RI_0f_0\tau$.
6. La tension $v(t)$ aux bornes de T ne peut devenir négative ; en déduire une inégalité entre les grandeurs E, f_0 , R, τ et I_0 .
7. Quelle est l'expression de la puissance moyenne \mathcal{P}_u fournie à l'antenne ? En tenant compte de la limitation précédente, montrer qu'elle est maximale lorsque l'amplitude de $v_a(t)$ atteint la valeur E et exprimer \mathcal{P}_u en fonction de E et R.
8. On définit le rendement du dispositif par le rapport $\frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_a}$ où \mathcal{P}_a est la puissance moyenne fournie par l'alimentation. Montrer que dans la limite des impulsions très brèves, le rendement tend vers 1. Commenter.

II. SPECTRE D'UN SIGNAL MODULÉ EN AMPLITUDE

Un signal porteur $s_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ est modulé en amplitude lorsque son amplitude A_p est fonction d'un signal modulant $s_m(t)$ de fréquence $f_m \ll f_p$. Dans le cas d'une modulation sinusoïdale, le signal modulant est : $s_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

et le signal modulé est de la forme : $s(t) = A_p (1 + m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t)$ où m est l'indice de modulation.

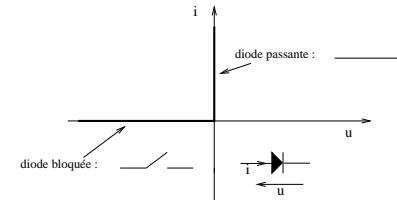
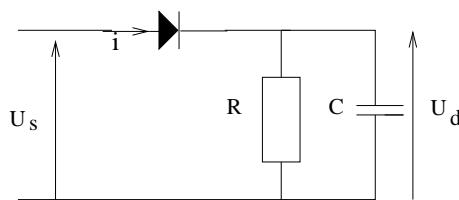
Le signal $s_m(t)$ est multiplié par $ks_p(t)$ où k est une constante positive. Le signal résultant et s_p sont ensuite soumis à un sommateur ; on a alors en sortie le signal modulé $s(t)$.

Modulation

1. Calculer l'indice de modulation m en fonction de k et de A_m .
2. Représenter l'allure de $s(t)$.
3. Déterminer le spectre de $s(t)$.

Démodulation

1. Pour démoduler le signal, on multiplie à nouveau le signal $s(t)$ par le signal porteur $s_p(t)$. On obtient le signal $s'(t)$.
Représenter l'allure du spectre de $s'(t)$.
2. Proposer un montage permettant de démoduler ensuite le signal (c'est-à-dire revenir à un signal sinusoïdal de fréquence f_m).
3. On peut également, pour démoduler, utiliser le détecteur de crêtes suivant :



On indique la caractéristique idéale de la diode sur la figure de droite.

Expliquer qualitativement le principe du détecteur de crêtes et pourquoi le signal est démodulé. Comment doit-on choisir les produits RCf_p et RCf_m ?

Partie II - À propos des avalanches

II.A - Rôle des coefficients de frottement

Dans une avalanche, une masse de neige se détache sur une pente et la dévale en entraînant avec elle de la matière supplémentaire. Il en résulte une amplification qui conduit à un phénomène violent même à partir d'un déséquilibre faible.

II.A.1) On considère un bloc de neige de masse m reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle α (figure 2). Le contact entre la neige et ce plan, décrit par les lois de Coulomb sur le frottement, est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d . On rappelle que $\mu_d \leq \mu_s$. On note $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

Montrer que l'équilibre est possible tant que $\alpha \leq \alpha_c$ et exprimer l'angle critique α_c .

II.A.2) La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle α_c subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale $v_0 \mathbf{u}_x$, $v_0 > 0$. Exprimer sa vitesse ultérieure $v(t)$ et son énergie cinétique $E_c(t)$.

II.A.3) L'énergie acquise sert en fait à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives de μ_s et μ_d sont données dans le tableau ci-dessous pour différents types de neige. D'après la question précédente, quel type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ? On justifiera la réponse.

<i>type de neige :</i>	μ_s	μ_d
neige fraîche	jusqu'à 10	0,3
neige en gobelets	1,2	0,7
neige à grains ronds	1,2	0,4

II.A.4) Animée d'une vitesse v_1 , la masse de neige arrive dans une région où l'angle α prend une valeur plus faible, constante. À quelle condition portant sur α le mouvement est-il ralenti puis stoppé ?

II.A.5) Expliquer comment l'observation de nombreuses avalanches permet de déduire des valeurs numériques pour μ_s et μ_d telles que celles données dans le tableau.

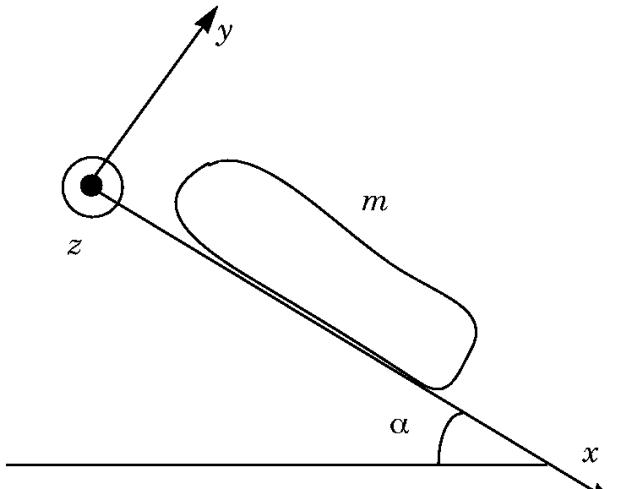


Figure 2 - Masse de neige reposant sur un plan incliné

II.B - Modèle de frottement sur sol rugueux

Lorsque l'avalanche rencontre dans sa course un sol rugueux, elle est soumise à de nouvelles forces de frottement dont on étudie ici une modélisation (figure 3).

La masse de neige en mouvement est assimilée à un parallélépipède rectangle d'épaisseur d (selon y), de longueur l (selon x) et de largeur L (selon z). Le contact avec le sol s'effectue donc sur un rectangle d'aire $S = Ll$.

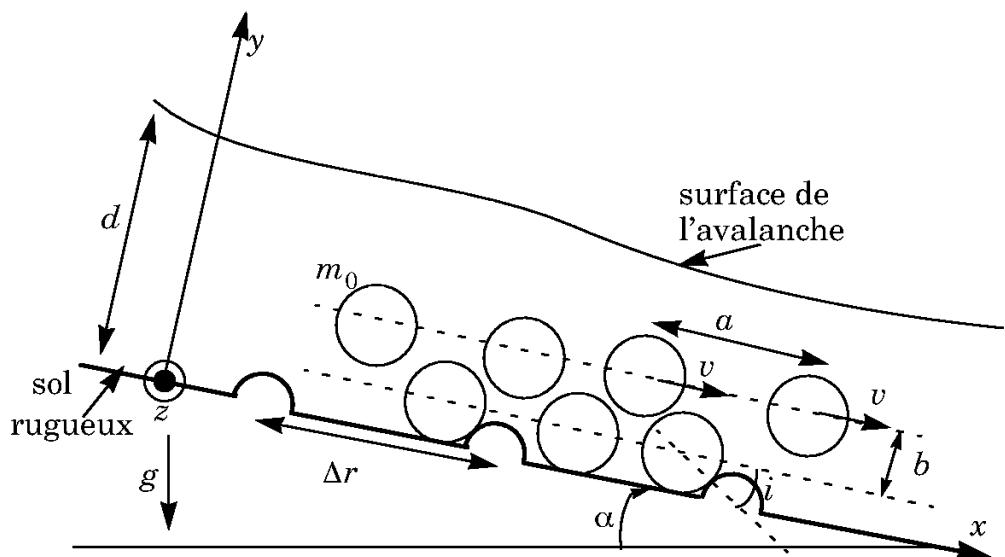


Figure 3. Modèle d'avalanche sur sol rugueux

L'avalanche est formée de paquets de neige sphériques de masse m_0 descendant la ligne de plus grande pente avec une vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$. Ces blocs sont empilés en couches distantes de b perpendiculairement à la pente. Dans une couche donnée, parallèle au plan (Oxz), les blocs sont en moyenne distants de a selon les directions x et z . Au niveau du sol, ils rencontrent des aspérités assimilées à des cylindres de section circulaire et d'axe parallèle à $(0z)$, séparés d'une distance Δr . Ces chocs, caractérisés par l'angle d'incidence i fixé, sont supposés mous : après l'impact, le vecteur vitesse du bloc est tangent à la surface de l'aspérité cylindrique au point de contact.

D'autre part, la composante tangentielle de sa vitesse est conservée dans le choc.

II.B.1) Un bloc se déplaçant selon x avec une vitesse moyenne \mathbf{v} , exprimer la fréquence f des chocs qu'il subit.

II.B.2) Quel est le nombre moyen N_1 de blocs dans la couche en contact avec le sol ?

II.B.3) Combien de chocs l'avalanche dans son ensemble subit-elle, pendant dt ? On notera dN ce nombre.

II.B.4) Pendant un choc, un bloc subit un changement de quantité de mouvement $\Delta \mathbf{p}_0$. Déterminer sa projection Δp_{0_x} sur l'axe x .

II.B.5) Soit $\mathbf{P} = P\mathbf{u}_x$ la quantité de mouvement de l'avalanche. En déduire la variation de quantité de mouvement dP_{chocs} causée par les chocs durant dt .

II.B.6) En déduire que la force de frottement rugueux s'exerçant sur l'avalanche est :

$$\mathbf{F}_{\text{rug}} = -\frac{m_0 S v^2 \cos^2 i}{a^2 \Delta r} \mathbf{u}_x \quad (4)$$

II.B.7) Soit m la masse totale de l'avalanche. Montrer que \mathbf{F}_{rug} se met sous la forme

$$\mathbf{F}_{\text{rug}} = -\frac{mgv^2}{\xi d} \mathbf{u}_x \quad (5)$$

en donnant l'expression du paramètre de rugosité ξ en fonction de g , Δr , b et i .

II.B.8) Expliquer pourquoi ξ dépend de la nature du sol sur lequel l'avalanche s'écoule.

II.B.9) Certains paramètres du modèle pourraient dépendre de la vitesse, de sorte que ξ en dépendrait aussi. Lesquels selon vous ?

II.C - Dynamique de l'avalanche

L'avalanche de masse m et d'épaisseur d dévale désormais une pente d'angle α sous les effets conjugués de son poids, du frottement sec obéissant aux lois de Coulomb (partie II.A) et du frottement rugueux de la partie II.B décrit par la relation (5). On rappelle que

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{argth}\left(\frac{u}{a}\right) \quad \text{et} \quad \int \operatorname{th} u \, du = \ln(\operatorname{ch} u).$$

II.C.1) Déterminer l'équation du mouvement selon x sous la forme d'une équation différentielle pour $v(t)$.

II.C.2) Exprimer la vitesse limite v_l atteinte par l'avalanche et la calculer numériquement pour $\alpha = 35^\circ$, $\mu_d = 0,3$, $d = 2 \text{ m}$ et $\xi = 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

II.C.3) Comment l'énergie cinétique de l'avalanche varie-t-elle avec son épaisseur d , toutes choses égales par ailleurs ?

II.C.4) Exprimer l'évolution $v(t)$ de la vitesse de l'avalanche, avec la condition initiale $v(0) = 0$. On éliminera α et μ_d au profit de v_l .

II.C.5) Déterminer la distance $x(t)$ parcourue par l'avalanche depuis son point de départ.

II.C.6) *Application numérique* : quelle distance l'avalanche a-t-elle parcourue lorsque elle atteint sa vitesse limite à 10 % près

II.C.7) L'avalanche ayant atteint sa vitesse limite v_l rencontre un brusque changement de pente, dont l'angle avec l'horizontale passe d'une valeur α à une autre valeur α' . La vitesse limite va prendre, après une certaine distance de transition, une nouvelle valeur v'_l . On suppose que la largeur L de l'avalanche reste la même, l'épaisseur d pouvant par contre être modifiée. En admettant que le débit volumique de neige est le même de part et d'autre de ce changement de pente, démontrer la loi d'invariance :

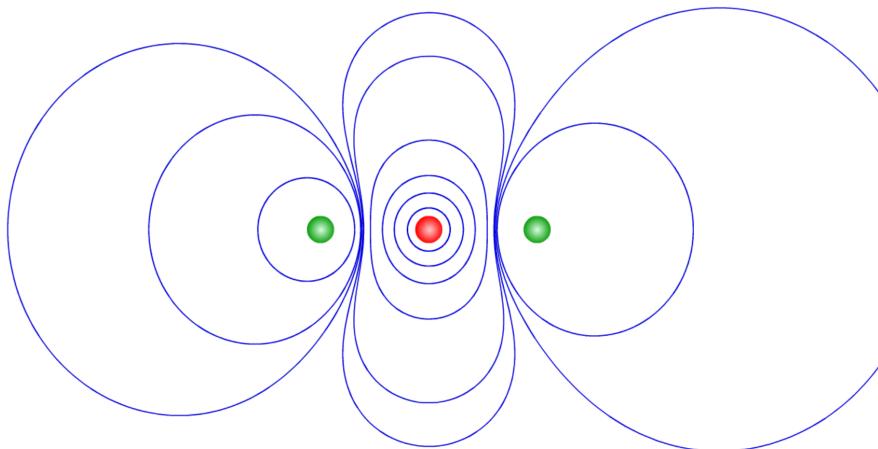
$$\frac{v_l^3}{\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha} = \frac{v'_l^3}{\sin\alpha' - \mu_d \cos\alpha'} \quad (6)$$

v_l et v'_l désignant respectivement la vitesse de l'avalanche avant et après la rupture de pente.

II.C.8) *Application numérique* : l'angle α passe de 35° à 30° . De quel pourcentage la vitesse est-elle réduite ?

IV. ELECTROSTATIQUE

On a tracé quelques équipotentielles d'une distribution globalement neutre de 3 charges ponctuelles présentes sur l'axe Ox : deux sont positives q et une est négative. On appelle a la distance entre deux charges voisines.



1. Tracer l'allure des lignes de champs, en les orientant.
2. Préciser les plans de symétrie et d'antisymétrie.
3. Déterminer la distribution.
4. Déterminer le champ sur l'axe Ox puis sur l'axe Oy (vertical sur la figure).
5. Existe-t-il des points d'arrêt sur ces deux axes ? Si oui, donner les équations vérifiées par ces points (on ne demande pas de les résoudre).
6. Déterminer le flux du champ électrostatique à travers une sphère de diamètre a centrée sur O (charge du centre).
7. Même question si la sphère est de diamètre $3a$.