

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 : MÉCANIQUE

PROBLÈME N°1 : ACOMÈTISSAGE DU MODULE PHILAE

Rosetta est une mission spatiale de l'Agence spatiale européenne dont l'objectif principal est de recueillir des données sur la composition du noyau de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko et sur son comportement à l'approche du Soleil.

La sonde spatiale s'est placée en orbite autour de la comète puis, après une période d'observation de plusieurs mois, a envoyé le 12 novembre 2014 Philae, un petit atterrisseur, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.

Le problème est constitué de quatre parties. La première traite de la **descente du module Philae vers la comète**. La seconde s'intéresse aux **communications entre la sonde Rosetta et la Terre**. La troisième concerne les **aspects thermiques** de la comète lorsque celle-ci se rapproche du Soleil.

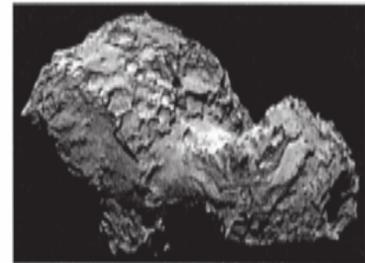
La dernière partie de cette épreuve est consacrée à la **chimie des ergols**, composés destinés à fournir l'énergie nécessaire à la propulsion de Rosetta.

PREMIÈRE PARTIE

ATTERRISSAGE DU MODULE PHILAE

Données :

- *masse de la comète : $m_{com} = 1,0 \cdot 10^{13} \text{ kg}$*
- *masse volumique de la comète : $\mu_{com} = 400 \text{ kg} \cdot m^{-3}$*
- *période de rotation propre de la comète : $T_{com} = 12,4 \text{ h}$*
- *constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$*
- *distance de largage par rapport au centre : $r_{larg} = 22,5 \text{ km}$*
- *masse de la sonde Rosetta : $m_{ros} = 1500 \text{ kg}$*
- *masse de l'atterrisseur Philae : $m_{ph} = 98 \text{ kg}$*
- *vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$*



Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com} .

La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée $r = OM$.

A / CHAMP GRAVITATIONNEL DE LA COMÈTE

A1. Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.

A2. On admet que le champ gravitationnel \vec{g}_{com} dû à la comète, s'écrit $\vec{g}_{com} = -G \frac{m_{com}}{r^2} \vec{e}_r$ (pour $r > r_{com}$).

A3. Vérifier par analyse dimensionnelle l'homogénéité de la relation obtenue.

A4. Peut-on considérer le champ gravitationnel de la comète uniforme lors de la chute du module Philae, suite à son largage ?

B / TRAJECTOIRE DE PHILAE

Approche numérique de l'équation du mouvement

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur \vec{e}_r , pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r$). Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

- B1.** Etablir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale $r(t=0) = r_{l\text{arg}}$, pour différentes vitesses verticales initiales $v_0 = \dot{r}(t=0)$.

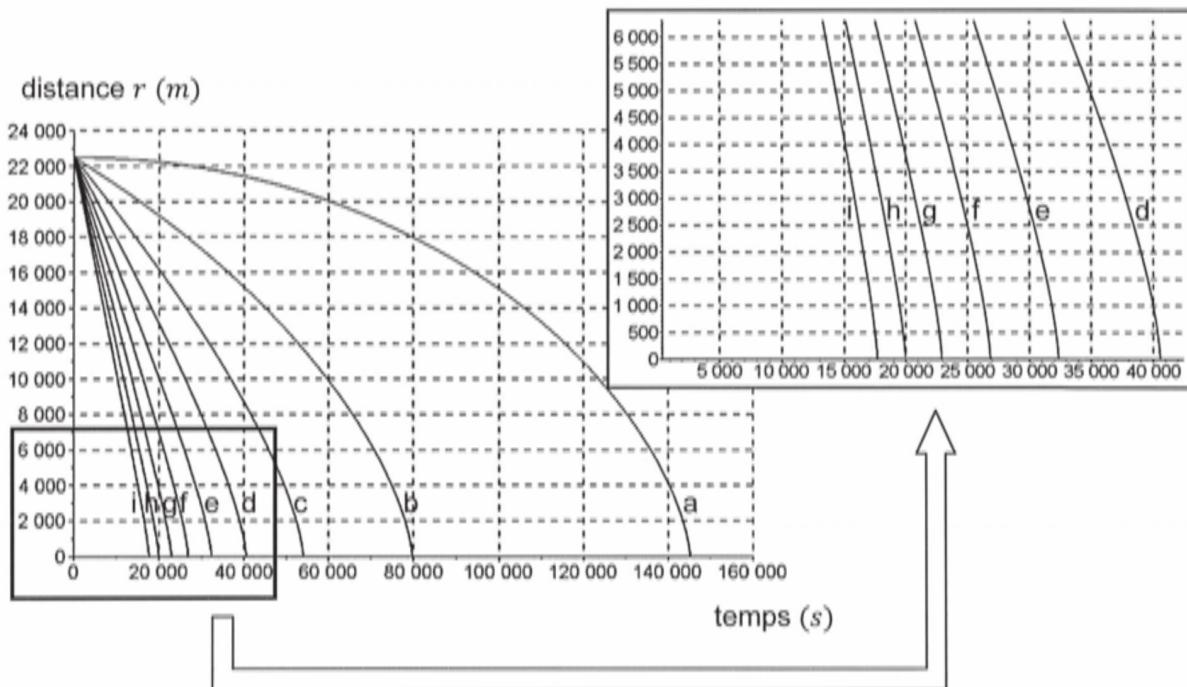


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :

$$\begin{array}{lll} a : v_0 = 0 \text{ } m \cdot s^{-1} & b : v_0 = -0,15 \text{ } m \cdot s^{-1} & c : v_0 = -0,30 \text{ } m \cdot s^{-1} \\ d : v_0 = -0,45 \text{ } m \cdot s^{-1} & e : v_0 = -0,60 \text{ } m \cdot s^{-1} & f : v_0 = -0,75 \text{ } m \cdot s^{-1} \\ g : v_0 = -0,90 \text{ } m \cdot s^{-1} & h : v_0 = -1,05 \text{ } m \cdot s^{-1} & i : v_0 = -1,20 \text{ } m \cdot s^{-1} \end{array}$$

- B2.** Déterminer la durée τ_0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.
- B3.** La durée réelle de la chute est $\tau \approx 7 \text{ h}$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale.

- B4.** Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

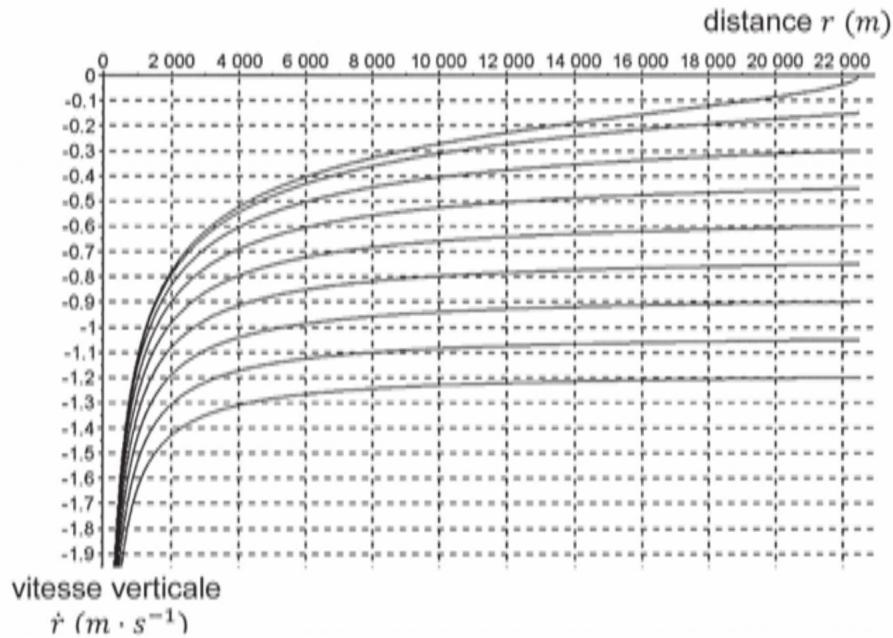


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

Approche énergétique

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète.

- B5.** Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p_{com}}$ d'un point matériel de masse m situé à la distance $r > r_{com}$ du centre de la comète, en fonction de G , m , m_{com} et r (on fixe $E_{p_{com}}(r \rightarrow \infty) = 0$).
- B6.** Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.
- B7.** En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

C / PHILAE A LA SURFACE DE LA COMETE

On s'intéresse à présent au module Philae, une fois celui-ci posé sur la surface de la comète.

- C1.** Lors du largage de Philae, le 12 novembre 2014, plusieurs journalistes commentent l'événement : « Philae pèse 1,7 g sur la comète ». Qu'en pensez-vous ?

La comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko tourne sur elle-même avec une période T_{com} dans le référentiel « cométocentrique » galiléen \mathcal{R}_0 , dont l'origine est le centre O de la comète et dont les axes pointent vers des directions fixes. Le référentiel \mathcal{R}_{com} lié à la comète n'est pas galiléen.

- C2.** Pour appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'atterrisseur Philae dans le référentiel \mathcal{R}_{com} lié à la comète, indiquer quelle force doit être ajoutée à la force gravitationnelle, ainsi que son nom usuel.
- C3.** Représenter sur un schéma la comète, son axe de rotation, le module Philae posé à sa surface et les deux forces (en plus de la réaction du sol) auxquelles il est soumis. Comment est modifié qualitativement le poids réel de l'atterrisseur, par rapport à celui calculé à la question C1 ?
- C4.** Exprimer littéralement, puis calculer numériquement la variation relative du poids due à la rotation propre de la comète (on suppose que Philae s'est posé dans le plan équatorial). Commenter.

D / ROSETTA AUTOUR DE LA COMÈTE

Avant de larguer l'atterrisseur Philae, la sonde Rosetta s'est rapprochée par paliers de la comète. Le 10 septembre 2014, elle se situe sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 30 \text{ km}$.

- D1.** Donner les expressions en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel M en mouvement circulaire.
- D2.** Exprimer la vitesse v_1 de la sonde en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la comète, en fonction de G , m_{com} et r_1 . Effectuer l'application numérique.
- D3.** En déduire sa période T_1 . Effectuer l'application numérique.

La sonde parcourt, à partir du 8 octobre 2014, une orbite elliptique avec un apocentre A situé à la distance $r_a = r_{max} = 20 \text{ km}$ du centre O de la comète et un péricentre P caractérisé par $r_p = r_{min} = 10 \text{ km}$. Le 15 octobre, la propulsion est utilisée pour placer la sonde sur une orbite circulaire de rayon $r_p = 10 \text{ km}$.

- D4.** Représenter sur un schéma l'orbite elliptique, en faisant apparaître le centre O de la comète, ainsi que les distances r_a et r_p .
- D5.** Exprimer l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite elliptique.
- D6.** Sur cette orbite, en déduire la vitesse v_p de Rosetta en P , en fonction de G , m_{com} , r_a et r_p . Effectuer l'application numérique.
- D7.** Pour placer la sonde en orbite circulaire de rayon r_p , la propulsion est utilisée lorsque Rosetta est au péricentre. Préciser numériquement la variation de vitesse nécessaire.

II. MINES MP 2009

On indique que $\overrightarrow{\text{grad}} U(r) = \frac{dU}{dr} \overrightarrow{u_r}$

I. — La comète 13P/Olbers

Les parties I.A et I.B de ce problème peuvent être abordées indépendamment.

I.A. — Mouvements cométaires

On étudie dans cette partie le mouvement d'un corps ponctuel M de masse m , soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine O des coordonnées d'un référentiel galiléen \mathcal{R} . On posera $r = \|\mathbf{OM}\|$. L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\mathbf{F} = -m \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U(r)$, où U est une fonction supposée connue. On note aussi \mathbf{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} , $\mathbf{L}_O = m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{v}$, $L = \|\mathbf{L}_O\| > 0$ et $C = L/m$

1 — Montrer que le mouvement de M est plan.

On choisira d'appeler (Oxy) ce plan, orienté par la convention $\mathbf{L}_O = L\mathbf{e}_z$; l'étude du mouvement de M dans (Oxy) s'effectuera en coordonnées polaires (r, φ) .

2 — On note $E = m\varepsilon$ l'énergie mécanique de M . Exprimer ε en fonction de r, C, \dot{r} et $U(r)$.

Le point M est en fait le centre d'une comète sphérique et homogène se déplaçant dans le champ de gravitation du Soleil (de masse M_\odot). Pour tout le reste de la partie I.A, on adopte l'expression $U(r) = -K/r$ où K est une constante, et l'on se place dans le référentiel supposé galiléen dans lequel le Soleil est fixe, homogène et sphérique. De plus, on néglige l'influence des tous les autres corps du système solaire.

3 — Exprimer K en fonction de la constante de la gravitation universelle G et de la masse du Soleil M_\odot .

4 — À quelle condition sur ε le mouvement de M vérifie-t-il $r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ avec $r_{\min} \neq r_{\max}$? Les constantes r_{\min} et r_{\max} sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition de la question 4 est vérifiée. L'origine des instants ($t = 0$) et des angles polaires ($\varphi = 0$) sera choisie de sorte que $r(t = 0) = r_{\min}$, $\varphi(t = 0) = 0$.

5 — Exprimer ε et C en fonction de K , r_{\min} et r_{\max} puis en fonction de K , $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ et $p = \frac{r_{\max}r_{\min}}{a}$.

6 — Quelle est, sans démonstration, la nature de la trajectoire de M ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des paramètres a , p et $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$? Représenter la trajectoire de M en précisant les points et dimensions remarquables.

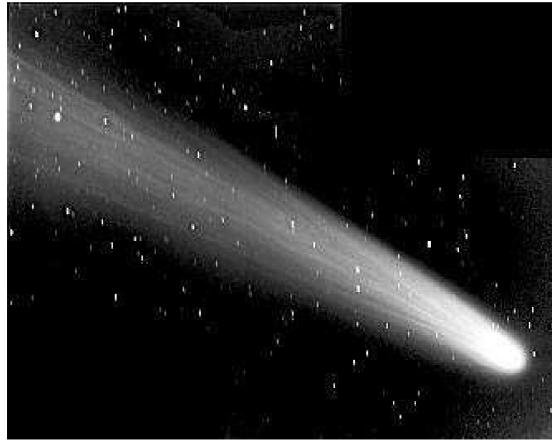
7 — On étudie la partie de la trajectoire pour laquelle $0 < \varphi < \pi$. Quel est alors le signe de \dot{r} ? Exprimer \dot{r} en fonction de ε , K , C et r . Montrer que la durée τ de parcours de r_{\min} à $r(\varphi)$ le long de cette trajectoire s'écrit

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} dr$$

8 — On effectue le changement de variable $r = a(1 - e \cos \xi)$. L'angle ξ est appelé *anomalie excentrique*. Exprimer la durée τ du trajet du mobile M depuis l'instant initial jusqu'à sa position actuelle repérée par ξ , en fonction de ξ , e , a et K puis de ξ , e et de la période T du mouvement de M . Quel est le nom de la relation qui lie T , K et a ?

On considère que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire, de rayon $a_0 = 1$ UA (unité astronomique) et de période $T_0 = 1$ année = 365,25 jours. Les caractéristiques orbitales, assez stables, de la comète 13P/Olbers sont les suivantes : excentricité $e = 0,930$; distance au Soleil au périhélie $r_{\min} = 1,18$ UA. On admettra que les relations $\tau(\xi)$ et $r(\xi)$ se généralisent à tout point de la trajectoire de cette comète.

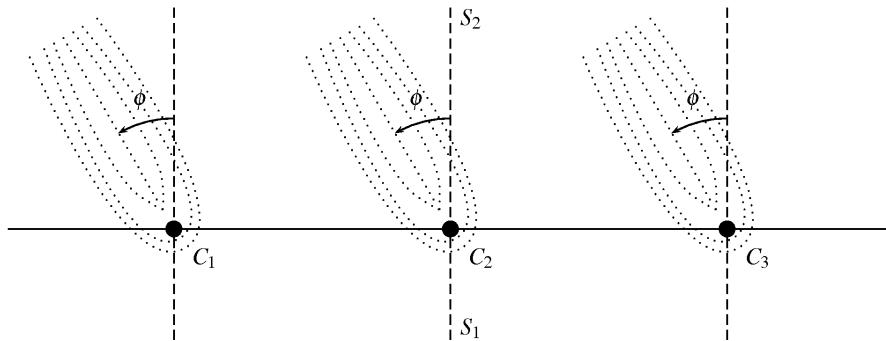
9 — À quelle date la comète reviendra-t-elle pour la prochaine fois au périhélie? À quelle date la comète se trouvera-t-elle la prochaine fois à la distance $r = 26,06$ UA du Soleil?



Comète Ikeya-Zhang photographiée en 2002 à l'observatoire de Haute-Provence.

I.B. — La queue de la comète

En 1811, OLBERS proposa pour la première fois une théorie quantitative pour expliquer la formation de la queue des comètes, en imaginant que les particules qui la composent sont soumises à une force répulsive d'origine électrique variant comme le carré de l'inverse de la distance au Soleil. On connaît aujourd'hui le mécanisme de formation de la queue de la comète, en particulier si elle est formée de poussières solides.



Les poussières sont entraînées par un flux de particules (le vent solaire) émises par le Soleil et se déplaçant à une vitesse de l'ordre de $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. On étudie pour simplifier (cf. ci-dessus) une comète se déplaçant en ligne droite à la vitesse de $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; la droite en traits pleins désigne la trajectoire de la comète, et les traits pointillés la direction du vent solaire.

□ 10 — En justifiant votre réponse, indiquer si le Soleil est disposé du côté S_1 ou du côté S_2 sur la figure ci-dessus.

□ 11 — En justifiant tout autant la réponse et sur cette même figure, la comète se déplace-t-elle dans le sens $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ ou dans le sens $C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$? Calculer l'angle ϕ entre la direction Soleil-comète et la direction moyenne de la queue de la comète.

Garçon sur igloo

Une petit esquimaï assimiée à un point matériel de masse m est en équilibre instable au sommet d'un igloo hémi-sphérique de rayon R . Cet igloo est tracté par un traineau; L'enfant quitte sa position verticale sans vitesse initiale et glisse sans frottement sur la demi-sphère. L'igloo est soumis à une accélération constante \vec{a}_0

- Appliquer le principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen. En choisissant une base de projection commode, vous en déduirez deux équations différentielles vérifiées par θ .
- En déduire une relation entre $\dot{\theta}$ et θ et la réaction normale en fonction de θ .
- En déduire que l'équation vérifiée par θ_1 , angle pour lequel la bille quitte la demi-sphère, est $mg(3 \cos \theta_1 - 2) = 3ma_0 \sin \theta_1$

