Physique quantique

21 Un état stationnaire est représenté par une fonction d'onde $\psi(x,t) = \Phi(x) f(t)$

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mathrm{V}(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Cette constante est homogène à une énergie et on l'appelle E. On constate que E est l'énergie de la particule.

On a alors l'équation de Schrödinger indepéndante du temps :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mathrm{V}(x)\Phi = \mathrm{E}\Phi}$$

On peut déterminer aisément la fonction f

$$\boxed{f(t) = \mathrm{A}e^{-i\frac{\mathrm{E}t}{\hbar}}}$$

La densité de probabilité de présence est indépendante du temps :

$$\boxed{|\psi|^2 = |\Phi|^2}$$

22 On injecte la solution dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps et on obtient $\mathrm{E} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

23 La relation de De Broglie s'écrit $p = \hbar k$. On trouve donc $\mathrm{E} = \dfrac{p^2}{2m}$ qui correspond à l'énergie cinétique et donc à une énergie potentielle nulle.

24 L'onde réfléchie s'écrit $\Phi_r(x) = \mathrm{A}_r e^{i(-kx-\omega t)}$

25 Pour $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} - q^2\Phi = 0 \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{\frac{2m(\mathrm{V}_0 - \mathrm{E})}{\hbar^2}}$$

La solution est

$$\Phi(x,t) = \mathrm{F}\exp^{qx} + \mathrm{G}\exp^{-qx}$$

F=0 car la probabilité de présence ne peut diverger. L'onde transmise est donc du type :$\psi(x,t) = \mathrm{A}_t \exp^{-qx} \exp -i\omega$

26 Il s'agit d'une onde évanescente analogue à celle produite dans un plasma pour $\omega < \omega_p$.

27 Φ et sa dérivée sont continue en $x = 0$.

28 La continuité de Φ et de sa dérivée en 0 donnent

$$\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_r = \mathrm{A}_t \quad \text{et} \quad ik(\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_r) = -q\mathrm{A}_t$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{A}_r = \frac{k - iq}{k + iq}\mathrm{A}_i}$$

Comme le module de ce rapport est 1 on peut écrire ce complexe sous la forme $e^{i\theta}$.

On trouve alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{A}_t}{\mathrm{A}_i} = \frac{2k}{k + iq}}$$

29 On a vu que la densité volumique de charge est analogue à $|\psi|^2$. On définit donc pour une particule libre de vitesse v, la densité de courant de probabilité

$$\boxed{\vec{j} = |\psi|^2 \vec{v}}$$

On trouve alors

$$\boxed{\vec{j} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}}$$

30 On définit les coefficents de réflexion et de transmission des courants de probabilités :

$$\mathrm{R} = \frac{|\mathrm{J}_r|}{|\mathrm{J}_i|} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = \frac{|\mathrm{J}_t|}{|\mathrm{J}_i|}$$

31 On trouve alors

$$\boxed{\mathrm{R} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = 0}$$

32 La densité de probabilité de présence pour $x < 0$ s'écrit

$$\rho(x) = \left|\mathrm{A}_i e^{ikx} + \mathrm{A}_r e^{-ikx}\right|^2 = \left|\mathrm{A}_i e^{ikx} + \mathrm{A}_i e^{i(\theta - kx)}\right|^2$$

d'où
$$\rho(x) = |\mathrm{A}_i|^2 \left(e^{ikx} + e^{i(\theta-kx)}\right)\left(e^{-ikx} + e^{-i(\theta-kx)}\right)$$

soit
$$\boxed{\rho(x) = 2\,|\mathrm{A}_i|^2 \left(1 + \cos(2kx - \theta)\right)}$$

Pour $x > 0$,

$$\boxed{\rho(x) = |\mathrm{A}_t|^2 e^{-2qx}}$$

La densité de probabilité de présence n'est pas nulle bien que T=0 car les électrons ont une probabilité non nulle de se trouver en $x > 0$ mais on une chance nulle de franchir la marche.

33 Pour cette situation, les phénomènes classiques et quantiques se rejoignent (T=0) bien que la densité de probabilité de présence soit non nulle pour $x > 0$ en quantique (ce qui est inconcevable en physique classique).

34 On considère que l'onde dans la zone $0 < x < d$ est du type $\mathrm{A}e^{-qx}$ puisqu'on néglige l'onde réfléchie dans cette zone.

L'onde en $x > d$ est du type $\mathrm{B}e^{ik(x-d)}$. La continuité en $x = d$ implique

$$\mathrm{B} = \frac{k - iq}{k + iq}\mathrm{A}e^{-qd}$$

Le coefficient de transmission s'écrit alors

$$\mathrm{T}_b = \frac{|\mathrm{J}(d^+|}{|\mathrm{J}_i(x = 0^-)|} = \left|\frac{k - iq}{k + iq}\right|^2 \left(e^{-qd}\right)^2$$

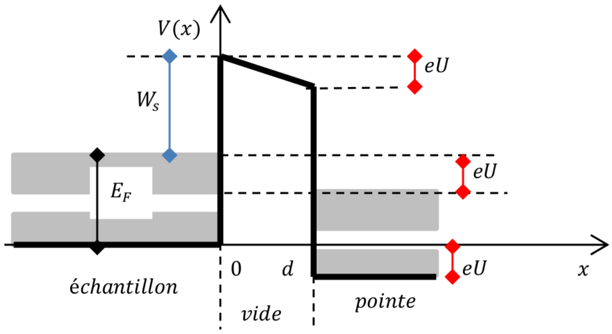
On trouve bien que T_b varie comme e^{-2qd}

35 Dans la question 32 la densité de probabilité de présence de la particule n'est pas nulle sur une distance d'environ $1/q$. La particule va rebondir en $x = d$ et créer une onde en $\exp(qd)$. La combinaison de ces deux ondes va créer un courant de probabilité non nul capable de franchir la barrière ce qui est impossible pour une particule classique.

36 L'énergie de Fermi $\mathrm{E_F}$ est l'énergie maximale des électrons. On la lit sur la figure comme étant la hauteur maximale de la zone grisée. Le travail de sortie W_s est l'énergie qu'il faut donner à l'électron pour l'extraire. Il correspond à la différence entre $\mathrm{V}(x = 0)$ et $\mathrm{E_F}$. La différence de potentiel crée un champ électrique entre l'échantillon et la pointe. Les électrons subissent une force électrique$-e\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et ont une différence d'énergie potentielle :

$$\mathrm{E}_p(x=0^+)-\mathrm{E}_p(x=d^-)=e\mathrm{U}$$

La grandeur $e\mathrm{U}$ se lit sur le graphique entre $\mathrm{V}(x=0)$ et $\mathrm{V}(x=d)$, entre le niveau fondamental de l'échantillon et celui de la pointe et entre l'énergie de Fermi de l'échantillon et celle de la pointe.



37 Les électrons de l'échantillon qui vont passer par effet tunnel ne peuvent pas avoir une énergie d'un électron de la pointe d'après le principe d'exclusion de Pauli. Il faut donc que leur énergie soit comprise entre$\mathrm{E_F}-e\mathrm{U}$ et $\mathrm{E_F}$ puisqu'aucun électron de la pointe ne possède cette gamme d'énergie.

38 Le nombre d'électrons par unité de volume pouvant franchir la barrière correspond au nombre d'électrons par unité de volume dont l'énergie est comprise entre E et E$+d$E vaut $\rho(\mathrm{E})d\mathrm{E}$. Ici comme $e\mathrm{U}$ est faible devant E_f, on peut considérer que le nombre d'électron pouvant franchir (i.e, d'énergie comprise entre $\mathrm{E}_f-e\mathrm{U}$ et$\mathrm{E_F}$ est environ

$$n\approx\rho(\mathrm{E}_f)e\mathrm{U}$$

On peut aussi faire l'hypothèse que la barrière est rectangulaire et $\mathrm{V}_0-\mathrm{E}\approx\mathrm{W}_s$. L'intensité du courant est ensuite proportionnel à $n\mathrm{T}_b$ soit

$$\boxed{\mathrm{I}\propto\rho(\mathrm{E}_f)e\mathrm{U}\exp\left(-2d\frac{\sqrt{2m\mathrm{W}_s}}{\hbar}\right)}$$

39 Si on appelle $\delta(d)$ la précision du microscope, on a

$$\frac{\delta\mathrm{I}}{\mathrm{I}}=0,1=2\delta(d)\frac{\sqrt{2m\mathrm{W}_s}}{\hbar}\quad\text{d'où}\quad\delta(d)=0,1\hbar\frac{1}{2\sqrt{2m\mathrm{W}_s}}$$

d'où $$\boxed{\delta(d)=1,3.10^{-12}m}$$

ce qui correspond à l'ordre de grandeur de l'énoncé.

40 La sensibilité verticale du microscope est limitée par la pointe. La dimension de la pointe est de 0,1 nm ; mesurer une distance plus faible semble délicat.

1. $\mathbf{f_v} - \mathbf{grad}P = \mathbf{0}$. $\mu.\mathbf{g} = \mathbf{grad}P$. **2.** $\mathbf{F_A} = -\mu_f.v.\mathbf{g}$.

3. $\mathbf{P_{ap}} = \Delta\mu.v.\mathbf{g}$. $dE_{pap} = -\delta W_{ap} = -\mathbf{P_{ap}}.d\mathbf{OM} = \Delta\mu.v.g.dz$ d'où $E_{pap} = \Delta\mu.v.g.z$ et $\Delta E_{pap} = (\Delta\mu.v.g)\Delta z$.

4. La loi de Boltzmann s'écrit : $n(z) = n(0).\exp\left(-\frac{E_{ap}}{k_BT}\right) = n(0).\exp\left(-\frac{\Delta\mu.v.g.z}{k_BT}\right)$.

La longueur caractéristique vaut $L = \frac{k_BT}{\Delta\mu.v.g} = \frac{3k_BT}{4\pi\Delta\mu.a^3.g} = 44\ \mu m$.

5. $d\mathscr{P} = A.\exp\left(-\frac{z}{L}\right)dz$. $\int_0^H A.\exp\left(-\frac{z}{L}\right)dz = 1$ donne $A = \frac{1}{L}$. $d\mathscr{P} = \exp\left(-\frac{z}{L}\right)\frac{dz}{L}$.

6. Le rayon critique est défini par $L(a_c) = a_c = \frac{3k_BT}{4\pi\Delta\mu.a_c^3.g}$. $a_c = \left(\frac{3k_BT}{4\pi\Delta\mu.g}\right)^{\frac{1}{4}} = 272$ nm.

7. $\frac{L}{a} = \frac{k_BT}{\Delta\mu.v.g.a} = \frac{v_c.a_c}{v.a}$, alors $\frac{L}{a} = \left(\frac{a_c}{a}\right)^4$.

$\frac{L}{a} = \frac{k_BT}{\Delta\mu.v.g.a} = \frac{k_BT}{\Delta E_{ap}(a)}$ avec $\Delta E_{ap}(a)$ la variation d'énergie potentielle d'une particule lorsqu'elle s'élève de son propre rayon a. k_BT représente l'énergie d'agitation thermique à la température T.

Ici, $\left(\frac{a_c}{a}\right)^4 = \frac{k_BT}{\Delta E_{ap}(a)} \approx 9.10^2$, l'agitation thermique l'emporte, on observe un état de suspension.

8. Pour considérer les colloïdes indépendants, il faut qu'ils soient suffisamment éloignés les uns des autres pour négliger les interactions électrostatiques, i.e. que la distance moyenne entre colloïdes soit très supérieure à leur taille, $n^{-\frac{1}{3}} >> a$ ou $n.a^3 << 1$. Avec les valeurs fournies, on obtient $n.a^3 \approx 10^{-4} << 1$. La condition est bien vérifiée.

9. Pour définir la concentration locale, il faut que $n(z) \approx n(z + \delta z)$ ou $\exp\left(\frac{z}{L}\right) \approx \exp\left(\frac{z+\delta z}{L}\right)$, i.e. $\delta z << L$.

10. Il faut aussi travailler sur une échelle mésoscopique, i.e. δz est très grand devant la distance moyenne entre deux colloïdes, $\delta z >> n^{-\frac{1}{3}}$.

11. Un colloïde est soumis à son poids « apparent » et à la force de Strokes.

Le PFD donne : $\mu_{or}.v\frac{d\mathbf{v}_{col}}{dt} = \Delta\mu.v.\mathbf{g} - 6\pi.a.\eta.\mathbf{v_{col}}$.

En projection sur l'axe Oz, on obtient l'équation canonique : $\frac{dv_{col}}{dt} + \frac{v_{col}}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$ où τ est le temps caractéristique d'évolution de la vitesse des colloïdes qui tend vers une vitesse limite $\mathbf{v}_\infty$.

$\tau = \frac{2\mu_{or}a^2}{9\eta} \approx 10^{-8}$ s. Ce temps est extrêmement court devant le temps de l'expérience.

$\mathbf{v}_\infty$ est atteint instantanément.

12. En reprenant le PFD, on obtient $\mathbf{v}_\infty = \frac{\Delta\mu.v}{6\pi\eta a}\mathbf{g} = \frac{2}{9}\frac{\Delta\mu.a^2}{\eta}\mathbf{g}$. $v_\infty \approx 10^{-7}\ m.s^{-1}$.

$\Delta t \approx 10^6$ s ≈ 12 jours. On peut considérer les colloïdes immobiles et en suspension puisque la sédimentation nécessite plus de 10 jours.

Deuxième Problème

13. La fonction d'onde définit l'état physique de la particule. $\rho = |\Psi|^2$ représente la densité de probabilité de présence de la particule. Elle doit être normalisée : $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,t)|^2dx = 1$.