

Correction du devoir maison induction

CADRES TOURNANTS

1/1 Le flux exercé par le champ \vec{B} sur le cadre est $\Phi = B_0 \cos \theta S$. En appliquant la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \omega \sin \theta S$$

d'où

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B_0 \omega \sin \theta S}{R}$$

2/3 Le couple exercé sur le cadre est

$$\vec{\Gamma}_A = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0 = -i S B_0 \sin \theta \vec{k}$$

d'où

$$\vec{\Gamma}_A = -\frac{(B_0 \sin \theta S)^2}{R} \omega \vec{k}$$

Ce couple s'oppose à la vitesse de rotation conformément à la loi de Lenz. On peut retrouver ce résultat avec la relation $\mathcal{P}_\ell = \Gamma_A \omega = -ei$

Pour l'autre cadre, le calcul est identique mais il faut remplacer θ par $\theta + \pi/2$ de sorte que $\vec{\Gamma}_C = -\frac{(S B_0 \cos \theta)^2}{R} \omega \vec{k}$

Le couple total est la somme de ces deux couples et on obtient, puisque $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

$$\vec{\Gamma} = -\frac{(B_0 S)^2}{R} \omega \vec{k}$$

3/2 On applique le théorème du moment cinétique au système constitué des deux cadres :

$$2J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{(B_0 S)^2}{R} \omega$$

On pose $\tau = \frac{2JR}{(B_0 S)^2}$ et on intègre la relation en

$$\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$$

4/2 On multiplie les équations électriques par i_A et i_c :

$$R i_A^2 = e_A i_A = \frac{(B_0 \omega \sin \theta S)^2}{R}$$

$$R i_C^2 = e_C i_C = \frac{(B_0 \omega \cos \theta S)^2}{R}$$

On multiplie le TMC par ω et on obtient

$$-\frac{d(\frac{1}{2}(2J)\omega^2)}{dt} = R i_A^2 + R i_C^2$$

L'énergie cinétique décroît du fait de la dissipation par effet Joule.

A. les fréquences utilisées en RFID

1. Le physicien HERTZ est célèbre pour avoir mis en évidence l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière, émises par une antenne et captées par une antenne réceptrice. Cette expérience va inciter Maxwell à intégrer le terme de courant de déplacement dans ses équations pour expliquer leur existence (et également vérifier la conservation locale de la charge électrique).
2. Bande Haute Fréquence et bande Ultra Haute Fréquence (ou encore *hyperfréquence*). Les ondes HF sont utilisées par la radiodiffusion (ondes courtes), les militaires, les communications maritimes ou aéronautiques, tandis que les ondes UHF (ou centimétriques) sont utilisées par la téléphonie portable, la WiFi, le GPS ...
Pour la fréquence $f = 2,45$ GHz, la longueur d'onde est $\lambda = c/f = 12$ cm. On parle également d'ondes centimétriques, ce qui est plus approprié au domaine de longueur d'onde (des longueurs d'onde de $1 \mu\text{m}$ correspondent à de la lumière infrarouge!). Le terme de "micro-ondes" vient initialement du fait que ces ondes avaient une longueur d'onde très petites devant les ondes radio manipulées jusqu'alors.
3. Il n'y a pas vraiment de différence au niveau de l'absorption tant que l'on reste en-deça de l'ionosphère. Les ondes UHF sont par contre plus directionnelles (elles diffractent moins sur les objets rencontrés, étant de λ plus faible, elles vont plutôt s'y réfléchir).
4. C'est une conséquence de l'effet de peau : l'épaisseur de peau dans un métal de conductivité γ est $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, la pénétration de l'onde dans le métal diminue donc lorsque la fréquence augmente.
5. Pour compatibilité, de plus les autres fréquences HF sont réservées à d'autres applications : il faut éviter les interférences.

B. Modélisation d'un système RFID à 13,56 MHz : la carte à puce sans contact

1. On peut appliquer l'ARQS tant que l'on peut négliger les retards (déphasages) dus à la propagation des ondes électromagnétiques à l'intérieur du système considéré : on considère alors les grandeurs électromagnétiques (champ électrique, magnétique, courant...) indépendantes de la position.

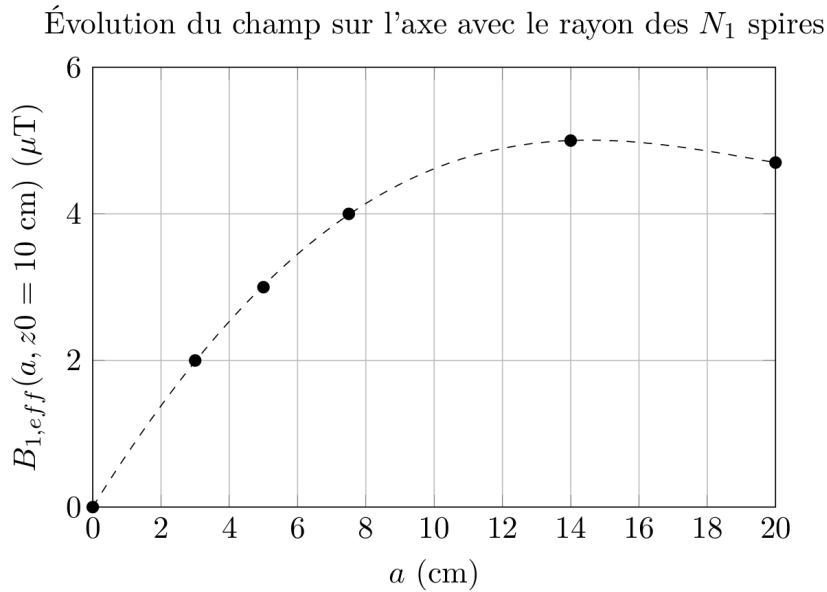
Le temps de propagation dans le système est ici de l'ordre de $\frac{OM}{c} \sim 0,3$ ns, qui est bien très petit devant la période temporelle $T = 1/f \sim 70$ ns. De façon équivalente, on peut appliquer l'ARQS tant que la taille du système $OM \ll \lambda$, la longueur d'onde. Ici, $OM = 10$ cm $\ll \lambda = c/f \sim 22$ m pour des ondes à 13,56 MHz : l'ARQS est bien vérifiée.

2. Tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie des courants : le champ $\vec{B}_1(M, t)$ est donc porté par \vec{u}_z .

On lit les valeurs (approximatives) suivantes sur le graphe fourni :

a (cm)	0	3	5	7,5	14	20	$+\infty$
$B_{1,eff}$ (μT)	0	2,0	3,0	4,0	5,0	4,7	0

On obtient le graphe suivant :



Le maximum est obtenue pour $a = 14$ cm, alors $B_{1,eff}(a = 14\text{cm}, z = 10\text{cm}) = 5 \mu\text{T}$.

Remarque : l'énoncé semble suggérer qu'il faut multiplier le résultat par le nombre de spires N_1 . Cependant, en reprenant la valeur du champ créé par une spire sur l'axe, vue sous un angle α , on se rend compte que les valeurs fournies dans la figure 3 sont cohérentes avec N_1 spires.

3. Le plan de la spire est plan de symétrie des courants : $\vec{B}(\text{M})$ est donc perpendiculaire à ce plan dans le plan de la spire. Par définition,

$$\Phi_1 = \iint \vec{B}_1(\text{M}) \cdot d\vec{S} = \int_0^a 2\pi r B(r, z=0) dr$$

Remarque : Toute portion de fil de la spire peut être assimilée à un fil quasi-infini si le point M est suffisamment proche de sa surface. Si le fil est considéré infiniment fin, la norme du champ magnétique diverge, et donc le flux Φ_1 également ... il faut en réalité revenir à la distribution volumique du courant dans le fil pour éviter ces divergences apparentes.

4. Par définition, $\Phi_1(t) = L_1 i_1(t)$
5. On peut considérer si la bobine b_2 est de faible rayon que les lignes de champ de \vec{B}_1 sont quasi-parallèles à l'axe Oz et que le champ $\vec{B}_1(\text{M}, t)$ est presque égal à sa valeur sur l'axe.

Remarque : on peut calculer la valeur de b à partir de S_2 fourni. La valeur de $b = 3$ cm obtenue est un peu élevée par rapport à 10 cm pour que cette approximation soit vraiment satisfaisante ici !

On aurait alors :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = \iint_{b_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \simeq B_1(r=0, z=d, t) \times N_2 S_2 = B_{1,eff}(a, z=d) \sqrt{2} \sin(\omega t) N_2 S_2$$

Or par définition, $\Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) = M I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t)$. D'où la relation approchée :

$$M \simeq \frac{N_2 S_2}{I_1} B_{1,eff}(a, z=d)$$

M ne dépend que des caractéristiques géométriques des circuits, car $B_{1,eff}$ est proportionnel à I_1 . Pour N_1, N_2 et d fixés, la valeur qui optimise la mutuelle est celle qui maximise le champ $B_{1,eff}$, soit pour $d = 10$ cm, $a = 14$ cm.

6. La bobine est le siège d'une f.é.m. $e_1(t)$, qui vaut en convention générateur $e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt}$, où $\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$. On a donc :

$$u_1(t) = R_1 i_1(t) - e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1(t)$$

De même,

$$u_2(t) = -R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

7. En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω , on obtient :

$$\begin{cases} U_1 = (jL_1\omega + R_1)I_1 + jM\omega I_2 & (1) \\ -U_2 = (jL_2\omega + R_2)I_2 + jM\omega I_1 & (2) \\ U_2 = R_L I_2 & (3) \end{cases}$$

8. En additionnant les équations (2) et (3), on obtient :

$$(R_2 + R_L + jL_2\omega)I_2 = -jM\omega I_1$$

En éliminant I_2 dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} U_1 = \underline{Z}_{11} I_1 = \left[R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_L + R_2 + jL_2\omega} \right] I_1 \\ U_2 = \underline{Z}_{21} I_1 = \frac{-jMR_L\omega}{R_L + R_2 + jL_2\omega} I_1 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{a = R_1 \quad b = L_1\omega}$.

La valeur efficace de $u_2(t)$ est :

$$|U_2| = I_1 \frac{MR_L 2\pi f}{\sqrt{(R_L + R_2)^2 + (L_2 2\pi f)^2}}$$

Or $R_L \gg R_2$, et $2\pi f L_2 = 536\Omega \ll R_L$. On peut donc déterminer l'ordre de grandeur de $|U_2|$ par :

$$\boxed{|U_2| \simeq I_1 M 2\pi f \simeq 0,17V}$$

Cette tension est trop faible pour alimenter les circuits électroniques du TAG.

9. On peut remplacer la résistance R_L par une impédance \underline{Z}_L équivalente à R_L et C_2 en parallèle :

$$\underline{Z}_L = \frac{R_L \underline{Z}(C_2)}{R_L + \underline{Z}(C_2)} = \frac{R_L}{1 + jR_L C_2 \omega}$$

La loi d'Ohm se généralise à $U_2 = \underline{Z}_L I_2$, qui remplace l'équation (3), les deux premières restant inchangées. On obtient une nouvelle relation entre I_1 et I_2 :

$$\left(\frac{R_L}{1 + jR_L C_2 \omega} + R_2 + jL_2\omega \right) I_2 = -jM\omega I_1$$

On obtient après quelques calculs :

$$Z'_{21} = \frac{-jM\omega}{1 + \frac{R_2}{R_L} + jR_2 C_2 \omega + j\frac{L_2}{R_L} \omega - L_2 C_2 \omega^2} \simeq \frac{-jM\omega}{1 + jR_2 C_2 \omega + j\frac{L_2}{R_L} \omega - L_2 C_2 \omega^2}$$

En introduisant les facteurs de qualité,

$$Z'_{21} = \frac{-jM\omega}{1 + j \left(\frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_L} \right) \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

La forme de la fonction Z'_{21} fournie (de type passe-bande), peut se mettre sous la forme :

$$Z'_{21} = -R_{21} \frac{jx/Q_T}{1 - x^2 + jx/Q_T}$$

où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite.

En identifiant, on obtient $\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_L}$ et $R_{21} = M\omega_0 Q_T$.

Numériquement, on a ainsi $Q_T \simeq 27$ et $R_{21} \simeq 230 \Omega$.

On est à résonance ($\omega = \omega_0$), on a donc $Z'_{21} = -R_{12}$. On obtient $|U_2| = 4,6 \text{ V}$ (la valeur de $|U_2|$ a été

multipliée par Q_T par rapport au cas sans condensateur !), et un courant efficace $I_2 \simeq \frac{|U_2|}{L_2 2\pi f} \simeq 8,6 \text{ mA}$.

Ces valeurs sont beaucoup plus exploitables que celles obtenues sans circuit résonant. Cependant, comme le montrent les questions suivantes, elles ne sont pas encore tout à fait suffisantes pour mettre le TAG en conditions de fonctionnement : il faut ajouter un circuit résonnant au niveau de l'émetteur.

10. $u_2(t) \simeq -\frac{d^2\Phi_2}{dt^2} \Rightarrow U_{2,eff} \simeq N_2 S_2 B_{\min,eff} \omega$. On en déduit $B_{\min,eff} \simeq 4,5 \mu\text{T}$.

En utilisant le graphe de la question I.B.2, on en déduit que le RFID peut être utilisé jusqu'à une distance de quelques dizaines de centimètres (à courte distance, l'approximation $b \ll a, d$ n'est plus valable, on ne peut pas conclure directement).

11. On rappelle que pour un dipôle d'impédance \underline{Z} , en régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne reçue en convention générateur s'écrit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle u(t)i(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u} \cdot \underline{i}^*)$$

Pour obtenir les équations de puissance, on part des équations de maille que l'on multiplie par les intensités.

Pour le primaire, (1) donne :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}_1 \underline{i}_1^*)}_{\langle \mathcal{P}_g \rangle} = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Re}(jL_1 \omega |\underline{i}_1|^2)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{Re}(jM\omega \underline{i}_2 \underline{i}_1^*)}_{\langle \mathcal{P}_{12} \rangle} + R_1 \underbrace{\frac{|\underline{i}_1|^2}{2}}_{=R_1 I_1^2}$$

Pour le secondaire, (2) donne de même :

$$0 = (R_2 + \text{Re}(\underline{Z}_L)) I_2^2 + \underbrace{\text{Re}(jL_2 \omega I_2^2)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{Re}(jM\omega \underline{i}_1 \underline{i}_2^*)}_{=-\langle \mathcal{P}_{12} \rangle}$$

où $\langle \mathcal{P}_{12} \rangle$ est la puissance moyenne transférée du circuit 1 (lecteur RFID) au circuit 2 (TAG), et $\langle \mathcal{P}_g \rangle$ la puissance moyenne fournie par le générateur du lecteur.

On obtient bien en faisant la somme :

$$\langle \mathcal{P}_g \rangle = R_1 I_1^2 + (R_2 + \text{Re}(\underline{Z}_L)) I_2^2 = R_1 I_1^2 + \left(R_2 + \frac{R_L}{1 + \left(Q_L \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right) I_2^2$$

La puissance fournie par le générateur est ainsi intégralement dissipée dans les parties résistives des impédances du circuit.

12. On a les relations :

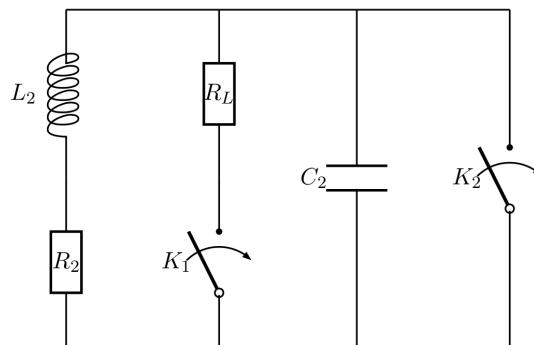
$$\begin{cases} U_0 = \left(\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega + R_1 \right) I_1 + jM\omega I_2 \\ -U_2 = (jL_2\omega + R_2)I_2 + jM\omega I_1 \\ U_2 = Z_L I_2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$U_0 = \left(\underbrace{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega + R_1}_{=0 \text{ } (\omega=\omega_0)} + \frac{(M\omega)^2}{\underbrace{R_2 + jL_2\omega + Z_L}_{Z(\omega_0)}} \right) I_1$$

- Pour $R_L = 0$, $Z(\omega_0) = Z_1 = \frac{(M\omega_0)^2}{R_2 + jL_2\omega_0}$
soit $|Z_1| = 0,14 \Omega$ et $\arg(Z_1) \simeq -\pi/2$.
- Pour $R_L \rightarrow +\infty$, $Z(\omega_0) = Z_2 = \frac{(M\omega_0)^2}{R_2}$, soit $|Z_2| = 7,3 \Omega$, et $\arg(Z_2) = 0$.

On peut obtenir ce comportement avec les interrupteurs suivants :



- K_1, K_2 ouverts : $R_L \rightarrow +\infty$
- K_1 fermé, K_2 ouvert : $R_L = 30 \text{ k}\Omega$
- K_2 fermé : $R_L = 0$

13. D'après un pont diviseur de tension dans le primaire, on a :

$$U_0 = \frac{|R_1 + Z(\omega_0)|}{|R_G + R_1 + Z(\omega_0)|} E$$

où E est l'amplitude efficace de la tension délivrée par le générateur idéal.

Les variations de $Z(\omega_0)$ n'étant pas négligeable devant R_1 , on détectera deux niveaux de tension U_0 différents suivant l'état choisi pour R_L , ce qui permet bien la communication dans les deux sens.