Devoir maison n°5 : corrigé

I. Ondes

I Modèle de l'électron élastiquement lié

1. (a) Charge e uniformément répartie $\Longrightarrow \rho(\mathrm{N}) = \dfrac{3e}{4\pi a^3}$ pour $r \leqslant a$.

   (b) Il n'y a pas de formulaire d'analyse vectorielle donc on utilise le théorème de Gauss.
   - Symétries : tous les plans contenant PN sont plans de symétries de la répartition de charges. Donc le champ électrique est radial.
   - Invariances : la distribution de charges est invariante par une rotation quelconque autour de O. Donc $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{N}) = \mathrm{E}(r)\overrightarrow{u}_r$.
   - Surface de Gauss : sphère de centre P, de rayon r et passant par N.
   - Charge intérieure : $\mathrm{Q_{int}}(r) = e\dfrac{r^3}{a^3}$ pour $r \leqslant a$.
   - Synthèse : grâce au théorème de Gauss, il vient $\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{N}) = \dfrac{er}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{u}r = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{\mathrm{PN}}$.

   (c) Force électrique ressentie par l'électron : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -e\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{N}) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{\mathrm{PN}}$.

   D'après le principe des actions réciproques, l'électron exerce la force $-\overrightarrow{\mathrm{F}}$ sur le noyau.

2. $m\ddot{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = -\mu\omega_0^2\overrightarrow{\mathrm{R}}$ avec $m\omega_0^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$.

   D'où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{m}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$.

   Remarque : cet oscillateur spatial isotrope est un cas particulier de mouvement à force centrale : le mouvement est plan. Les trajectoires sont ici des ellipses de centre O.

3. $\omega_0 \approx 1,6.10^{16} rad.s^{-1}$.

   La longueur d'onde associée vaut $\lambda \approx 0,1 \mu m$: c'est dans l'ultraviolet.

4. $\overrightarrow{p}(t)$ représente le moment dipolaire instantané de l'atome.

   (a) La présence de $\dfrac{\mu_0}{4\pi}$ suggère fortement qu'il s'agit d'un champ magnétique. Vérifions si notre intuition est bonne. D'après l'équation de Maxwell - Ampère, on sait que $\overrightarrow{\mathrm{B}}/\mu_0$ est homogène à des $\mathrm{A}.m^{-1}$.

   Ici $\ddot{p}$ est homogène à des $\mathrm{C}.m.s^{-2}$ donc à des $\mathrm{A}.m.s^{-1}$. Finalement, l'expression proposée est bien un champ magnétique.

   (b) Structure locale d'onde plane progressive : $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{B}} \wedge c\overrightarrow{e}r$ soit $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \dfrac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\ddot{p}(t - r/c)\overrightarrow{e}\theta$.

   (c) Echelles spatiales : $\langle \mathrm{R}(t)\rangle \ll \lambda \ll r$. La première inégalité signifie le mouvement des charges n'est pas relativiste.

   La deuxième est celle de l'approximation dipolaire.

5. Vecteur de Poynting : $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu_0}$. Soit, après calculs, $\overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\mu_0}{16\pi^2}\dfrac{\sin^2\theta}{cr^2}\ddot{p}^2(t - r/c)\overrightarrow{e}r$.

   Moyenne temporelle : $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \dfrac{\mu_0 e^2}{16\pi^2}\dfrac{\sin^2\theta}{cr^2}\langle \ddot{x}^2\rangle\ \overrightarrow{e}r$.

6. L'élément de surface orienté d'une sphère de rayon r s'écrit $\delta \mathrm{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Donc la puissance moyenne rayonnée (flux sortant du vecteur de Poynting moyen) à travers une sphère de rayon r vaut $\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \langle \ddot{x}^2 \rangle \displaystyle\iint \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi$.

   Il vient $\langle \mathcal{P} \rangle = \dfrac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \langle \ddot{x}^2 \rangle \dfrac{4}{3} \cdot 2\pi = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle \ddot{x}^2 \rangle$ car $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

7. (a) Il suffit donc d'identifier : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dddot{x} \, \overrightarrow{e}x$.

   (b) Nouvelle équation différentielle, projetée sur $\overrightarrow{e}x$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = -\dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 \mu c^3} \dddot{x}$.

   Remarque : en fait c'est la force $-\overrightarrow{\mathrm{F}}$ qui s'exerce sur la particule fictive puisque le système perd de l'énergie par rayonnement.

   (c) i. En notation complexe, il vient $-\omega^2 + \omega_0^2 = -i \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 \mu c^3} \omega^3$.

   Calculs approchés : $\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 + 2\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$ et $\omega^3 \approx \omega_0^3 \left(1 + 3\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$.

   La correction due au terme $3\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}$ ne sera pas prise en compte car elle fournira un terme d'ordre 2. Finalement, il vient $-2\omega_0 \delta\omega \approx -i \dfrac{e^2 \omega_0^3}{6\pi\varepsilon_0 \mu c^3}$ d'où le résultat de l'énoncé.

   ii. On a $\Gamma = \dfrac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 \mu c^3}$.

   iii. En assimilant $\mu \approx m$ (approximation encore meilleure pour le rubidium), on trouve $\Gamma \approx 3,66.10^7 s^{-1}$. C'est très proche de la valeur tabulée.

   Remarque : les données numériques sont données avec au moins 3 chiffres significatifs donc il faut essayer de conserver cette précision numérique.

II Interaction d'un atome avec une onde électromagnétique

1. (a) Équation différentielle du mouvement, en négligeant le poids : $\mu \overrightarrow{\ddot{\mathrm{R}}} = -\mu\omega_0^2 \overrightarrow{\mathrm{R}} - \mu\Gamma \overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}} = e\overrightarrow{\mathrm{E}} + e\overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$.

   Comme l'amplitude du mouvement est petite devant la longueur d'onde, on remplace $\overrightarrow{\mathrm{E}}(z,t)$ par $\overrightarrow{\mathrm{E}}(0,t)$. De même pour $\overrightarrow{\mathrm{B}}$. D'autre part, les vitesses n'étant pas relativistes, la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

   Finalement, on obtient l'équation différentielle de l'énoncé.

   (b) En notation complexe, $\underline{\overrightarrow{p}} = e\underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = \dfrac{e^2 \mathrm{E}_0}{\mu} \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \overrightarrow{e}x$.

   D'où $\alpha(\omega) = \dfrac{e^2}{\mu} \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2}}$ et $\sin(\psi) = \dfrac{-\Gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2}}$.

2. (a) Force de Lorentz sur l'électron : $\overrightarrow{\mathrm{F}}e = -e\overrightarrow{\mathrm{E}}(\overrightarrow{\mathrm{R}}-,t) - e\overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}}- \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}(\overrightarrow{\mathrm{R}}-,t)$.

   Force de Lorentz sur le noyau : $\overrightarrow{\mathrm{F}}noyau = e\overrightarrow{\mathrm{E}}(\overrightarrow{\mathrm{R}}+,t) + e\overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}}+ \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}(\overrightarrow{\mathrm{R}}+,t)$.

   Dans la mesure où le champ électromagnétique est à peu près uniforme à l'échelle des déplacements des deux charges, les deux forces électriques se compensent et $\overrightarrow{\mathrm{F}}rad = \overrightarrow{\mathrm{F}}e + \overrightarrow{\mathrm{F}}noyau \approx e\left(\overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}}+ - \overrightarrow{\dot{\mathrm{R}}}-\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{O},t)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{F}}rad = \overrightarrow{\dot{p}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$.

(b) Produit vectoriel : $\overrightarrow{\mathrm{F}}rad = -\omega\alpha(\omega)\mathrm{E}_0\cos(\omega t+\psi)\cdot\dfrac{\mathrm{E}_0}{c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e}y$.

Moyenne temporelle : $\left\langle\overrightarrow{\mathrm{F}}rad\right\rangle = -\omega\alpha(\omega)\sin\psi\dfrac{\mathrm{E}_0^2}{2c}\overrightarrow{e}z$.

Il vient $\left\langle\overrightarrow{\mathrm{F}}rad\right\rangle = -\alpha(\omega)\sin\psi\dfrac{\mathrm{I}}{\varepsilon_0 c}\overrightarrow{k}$.

(c) i. Après remplacement, $\left\langle\overrightarrow{\mathrm{F}}rad\right\rangle = \dfrac{e^2\mathrm{I}}{\varepsilon_0 c\mu\omega_0\Gamma^2}\dfrac{\Gamma}{1+4\Delta^2/\Gamma^2}\overrightarrow{k}$. Par identification, $\mathrm{I}_s = \hbar\omega_0\dfrac{\varepsilon_0 c\mu\Gamma^2}{e^2}$.

ii. L'intensité de la force est maximale pour $\Delta = 0$. Elle vaut alors $\mathrm{F}_{\mathrm{rad}} = \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_s}\hbar\Gamma$.

III Ralentissement Doppler des atomes

1. (a) Pulsations apparentes : pour le vecteur d'onde $+\overrightarrow{k}$, $\omega'_{(+)} = \omega - \dfrac{\omega}{c}v(t)$. Pour le vecteur d'onde $-\overrightarrow{k}$, $\omega'_{(-)} = \omega + \dfrac{\omega}{c}v(t)$.

(b) C'est l'onde de vecteur d'onde $-\overrightarrow{k}$ qui produira l'onde ayant la pulsation apparente se rapprochant le plus de ω_0 : $\omega'_{(-)} = \omega_0 + \Delta + \dfrac{\omega_0+\Delta}{c}v(t)$.
La force radiative la plus intense correspond à la pulsation apparente $\omega'_{(-)}$. Elle est dirigée dans le sens de $\overrightarrow{k}$: l'atome sera ralenti.
Pour $v(t) < 0$, c'est avec l'onde de vecteur d'onde $+\overrightarrow{k}$ que l'atome interagit le plus intensément. La force se comporte encore comme une force de frottement.
En revanche, si $\Delta > 0$, les conclusions sont différentes et l'atome sera accéléré.

(c) On doit avoir $\beta < 0$ pour avoir un ralentissement de l'atome. C'est cohérent avec $\Delta < 0$ (Ouf !).

(d) Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{dE}_c}{\mathrm{d}t} = \beta v^2$ soit $\dfrac{\mathrm{dE}_c}{\mathrm{d}t} - \dfrac{2\beta}{\mathrm{M_{Rb}}}\mathrm{E}_c = 0$. Le temps caractéristique de décroissance de l'énergie cinétique est donc $\tau = \dfrac{\mathrm{M_{Rb}}}{2\,|\beta|}$.

2. (a) On a $\dfrac{1}{2}\mathrm{M_{Rb}}v_q^2 = \dfrac{3}{2}k_\mathrm{B}\mathrm{T}_0$ d'où $v_q = \dfrac{3k_\mathrm{B}\mathrm{T}_0}{\mathrm{M_{Rb}}}$.
AN : $v_q = 1,91 m.s^{-1}$.

(b) i. Il vient $\mathrm{T}_{min} = \dfrac{\hbar\Gamma}{k_\mathrm{B}}$. AN : $\mathrm{T}_{min} = 0,281 m\mathrm{K}$. C'est vraiment très faible. Que dire de plus ? Pour obtenir des températures plus basses encore, il faut déployer d'autres techniques. Le record actuel est de l'ordre de $0,5 n\mathrm{K}$.

ii. Après simplification, $\tau = \dfrac{\mathrm{M_{Rb}}\,c^2}{4\hbar\omega_0^2}$. AN : $\tau = 5,16\mu s$. C'est un dispositif très efficace au sens où il est rapide.

(c) Il suffit de rajouter des dispositifs analogues selon les axes Ox et Oy. Cela fait en tout 6 lasers. D'autre part, il faut qu'ils soient accordables pour adapter Δ au fur et à mesure que les vitesses des atomes diminuent. Il s'agit d'engluer une population d'atomes dans un piège optique, d'où le terme de *mélasse*.

II. Résolution de problème

Le four à micro-ondes est une cavité électromagnétique pour laquelle le champ EM est maximal aux ventres. C'est là où le chocolat fond en premier. Ces ventres sont séparés de $\dfrac{\lambda}{2} \approx 5$ cm.

On a donc $\lambda \approx$10cm et $f = \dfrac{c}{\lambda} \approx 3$ GHz. La valeur réelle est de 2,5 GHz et l'ordre de grandeur est correct.