Corrigé du devoir maison n°3

A Expérience de Stern et Gerlach

I. Analyse du jet d'atomes d'argent

Q.1 $m_{Ag} = \dfrac{m}{N} = \dfrac{nM_{Ag}}{N} \Rightarrow \boxed{m_{Ag} = \dfrac{M_{Ag}}{\mathcal{N}_A}}$

$e_c = \dfrac{1}{2} m_{Ag} v_0^2 = \dfrac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m_{Ag}}} = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m\ /\ N}} = \sqrt{\dfrac{3Nk_B T}{nM_{Ag}}} = \sqrt{\dfrac{3\mathcal{N}_A k_B T}{M_{Ag}}}$

Finalement $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_{Ag}}}}$ A.N. : $\boxed{v_0 = 541\ m.s^{-1}}$

Q.2 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m_{Ag} v} = \dfrac{\mathcal{N}_A h}{M_{Ag} v} \Rightarrow \boxed{\lambda = 6{,}80\ pm}$

Avec une fente de $1\ mm \gg \lambda$, il n'y aura pas de phénomène de diffraction en entrée.

Q.3 $n^* = \dfrac{N}{V} = \dfrac{n\mathcal{N}_A}{V} = \dfrac{\mathcal{N}_A P}{RT} \Rightarrow \boxed{n^* = \dfrac{P}{k_B T}}$ A.N. : $\boxed{n^* = 5{,}7.10^{16}\ m^{-3}}$

Q.4 $\boxed{\ell^* = \dfrac{1}{4\pi {r_{Ag}}^2 n^*} = 54\ m}$

$\ell^* >> D\ ou\ \ell$: les atomes n'interagissent pas entre eux dans l'enceinte, le modèle du gaz parfait est ici bien approprié.

II. Analyse de la déflexion magnétique

II.1. Magnéton de Bohr

Q.5 $\boxed{\vec{f}_e = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_H^2} \vec{u}_r}$

$\dfrac{\left\|\vec{P}\right\|}{\left\|\vec{f}_e\right\|} = \dfrac{m_e g}{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_H^2}} \simeq 10^{-22} \ll 1$ le poids de l'électron est négligeable devant la force électrostatique.

Q.6 En coordonnées polaires, le PFD donne : $m_e\vec{a} = \vec{f}_e \Leftrightarrow -m_e R_H \omega^2 \vec{u}_r = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_H^2}\vec{u}_r \Leftrightarrow \boxed{\omega = \dfrac{e}{2\sqrt{\pi m_e \varepsilon_0 R_H^3}}}$

Q.7 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{4\sqrt{\pi^3 m_e \varepsilon_0 R_H^3}}{e} \Rightarrow \boxed{T = 1{,}5.10^{-16}\ s}$

Q.8 $I = \dfrac{\delta q}{dt} = \dfrac{-e}{T} \Rightarrow \boxed{I = -\dfrac{e}{2\pi}\omega}$

Q.9 $\vec{m} = IS\vec{n} \Rightarrow \boxed{\vec{m} = -\dfrac{e}{2}R_H^2 \omega \vec{e}_\Delta}$

Q.10 $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v} = R_H\vec{u}_r \wedge m_e R_H \omega \vec{u}_\theta = m_e R_H^2 \omega \vec{e}_\Delta$

On a donc : $\vec{m} = \gamma\vec{L}$ avec $\boxed{\gamma = -\dfrac{e}{2m_e}}$ rapport gyromagnétique

Q.11 $\left\|\vec{L}\right\| = \hbar \Rightarrow \boxed{\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}}$ A.N. : $\mu_B = 9{,}2.10^{-24}\ A.m^2$

II.2. Cas d'un champ magnétique uniforme dans l'entrefer

Q.12 $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{d\vec{m}}{dt} = \gamma\vec{m} \wedge \vec{B}}$

En projection selon $\vec{e}_z$, on a : $\boxed{\dfrac{dm_z}{dt} = \left(\gamma\vec{m} \wedge \vec{B}\right).\vec{e}_z = 0}$

En multipliant par $\vec{m}$ dans les deux membres, on obtient aussi : $\vec{m}.\dfrac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m}.\left(\gamma\vec{m} \wedge \vec{B}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m^2}{2}\right) = 0}$

Q.13 $\dfrac{d\vec{m}}{dt} = \gamma\vec{m} \wedge \vec{B} = -\gamma\vec{B} \wedge \vec{m}$ de la forme $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ pour un point M tournant autour du point O à la vitesse Ω.

L'extrémité de $\vec{m}$ tourne donc autour de $\left(Oz\right)$ en décrivant un cercle à la pulsation $\boxed{\Omega_L = \frac{eB}{2m_e}}$ dite pulsation de Larmor.

Q.14 Période de rotation autour de Oz : $T_L = \frac{2\pi}{\Omega_L} = \frac{4\pi m_e}{eB} = 7{,}1.10^{-11} s$

Durée de passage dans l'entrefer : $\tau \approx \frac{\ell}{v_0} = 6,5.10^{-6} s$

$\tau \gg T_L$: les composantes de $\vec{m}$ ne peuvent donc intervenir que par leur valeur moyenne sur la durée τ, qui est nulle pour m_x et m_y (qui décrivent un cercle) et constante pour m_z.

Q.15 $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_p = \overrightarrow{grad}\left(\vec{m}.\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(m_z B\right) = m_z \overrightarrow{grad}\left(B\right)$

Comme B est uniforme, alors $\boxed{\vec{F} = \vec{0}}$.
D'où la nécessité d'utiliser un champ non uniforme.

II.3. Cas d'un champ magnétique non uniforme dans l'entrefer

Q.16 Le flux du champ magnétique à travers toute section d'un tube de champ est le même.

Q.17 D'après la remarque précédente, la section du tube de champ étant plus grande au niveau du pôle sud qu'au niveau du pôle nord, le champ est donc plus intense au pôle nord qu'au pôle sud.
$\overrightarrow{grad}\ B_z$ est donc selon $-\vec{e}_z$.

Q.18 $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{m}.\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(m_z B_z\right) = m_z \frac{dB_z}{dz}\vec{e}_z$.

$$\boxed{\left\|\vec{F}\right\| \simeq \mu_B \times \frac{dB_z}{dz} = 4{,}6.10^{-21}\ N}$$

Q.19 L'ensemble des N moments magnétiques des atomes d'argent sont soumis chacun à une force différente oscillant de $+m_0\frac{dB}{dz}$ à $-m_0\frac{dB}{dz}$ avec m_0 la valeur de m_z maximale (cas où $\vec{m}$ est exactement selon $\vec{B}$). On doit donc observer un ensemble de points d'impact sur l'écran alignés uniformément entre deux valeurs maximales (**figure A3b**).

Q.20 Le PFD appliqué à un atome d'argent s'écrit : $m_{Ag}\frac{d\vec{v}}{dt} = m_z \frac{dB_z}{dz}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_z}{m_{Ag}}\frac{dB_z}{dz}t\vec{e}_z + \vec{v}_0$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\frac{m_z}{m_{Ag}}\frac{dB_z}{dz}t^2\vec{e}_z + \vec{v}_0 t \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ z(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_z}{m_{Ag}}\dfrac{dB_z}{dz}t^2 \end{cases}}$$

D'où l'équation de la trajectoire avec $t = \dfrac{x}{v_0}$: $\boxed{z(x) = \dfrac{m_z}{2m_{Ag}v_0^2}\dfrac{dB_z}{dz}x^2}$

Q.21 Après l'entrefer, les atomes ne sont soumis à aucune force (en négligeant le poids), les atomes suivent donc une trajectoire rectiligne uniforme. La pente de cette trajectoire est la même que celle en sortie de l'entrefer en $x = \ell$:

$$\boxed{a = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=\ell} = \frac{m_z}{m_{Ag}v_0^2}\frac{dB_z}{dz}\ell}$$

Q.22 La déflexion sur l'écran s'écrit à l'aide de la pente :

$$a = \frac{Z - z(x = l)}{D - \ell / 2} \Leftrightarrow Z = z_\ell + a\left(D - \frac{l}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{m_z}{2m_{Ag}v_0^2}\frac{dB_z}{dz}l^2 + \frac{m_z}{m_{Ag}v_0^2}\frac{dB_z}{dz}\ell\left(D - \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{m_z}{m_{Ag}v_0^2}\frac{dB_z}{dz}\ell D$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Z = \frac{m_z}{3k_B T}\frac{dB_z}{dz}\ell D} \text{ comme } e_c = \frac{1}{2}m_{Ag}v_0^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Q.23 $Z = \pm\dfrac{2}{20}\text{ mm} \Rightarrow \boxed{Z = \pm 0{,}1\text{ mm}}$

On obtient avec la formule précédente : $\boxed{m_z = \pm 2.10^{-23} A.m^2}$

C'est du même ordre de grandeur que le magnéton de Bohr $\mu_B \simeq 10^{-23}\ A.m^2$ conformément aux affirmations de l'énoncé.

Q.24 $Ag(\mathcal{Z} = 47) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1$ (attention à l'exception dans le remplissage de l'atome).
L'atome d'argent ne possède donc qu'un électron de valence, qui lui confère le moment magnétique précédent similaire à celui de l'atome d'hydrogène μ_B dans son état fondamental.

Q.25 L'apparition de deux taches plutôt qu'une suite continue de tache montre que m_z ne peut prendre n'importe quelle valeur possible : l'expérience de Stern et Gerlach révèle ainsi que la projection du moment cinétique sur l'axe du champ est quantifié. La mécanique classique ne permet pas d'expliquer un tel résultat : c'est l'un des grands succès de la mécanique quantique d'avoir montré en 1927 l'existence du spin pour interpréter définitivement cette expérience.