Correction du devoir maison n°1

I. CCP MP 2014

I.1 La force étant centrale le théorème du moment cinétique montre que le moment cinétique de P se conserve et donc que $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ est perpendiculaire à un vecteur constant. Le mouvement de P est donc plan.

I.2 Calculons le moment cinétique en coordonnées polaires ;

$$\overrightarrow{\mathrm{L_O}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge m\overrightarrow{v}(\mathrm{P}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

Ce vecteur étant constant, il vient $\mathrm{C} = \mathrm{C^{te}}$.

I.3 On applique le PFD en projection selon $\overrightarrow{e_r}$:

$$-\mathrm{C}^2u^2\left(u“ + u\right) = -\mathrm{GM}u^2 \quad \text{d'où} \quad u'' + u = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{C}^2}$$

qui donne par intégration

$$u = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{C}^2} + \mathrm{A}\cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{r}$$

On a bien

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon e\cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{GM}}}$$

On a noté la contante $\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{GM}} = \varepsilon e$.

I.4 $r(\theta_0) + r(\theta_0 + \pi) = \dfrac{p}{1+e} + \dfrac{p}{1-e} = \dfrac{2p}{1-e^2} = 2a$

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

I.5 L'énergie potentielle est telle que $\delta\mathrm{W} = \mathrm{F}(r).dr = \mathrm{G}m\mathrm{M}d(1/r)$

d'où
$$\boxed{\mathrm{E}_p = -\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M}}{r} + \mathrm{K} \quad \text{avec} \quad \mathrm{K} = 0}$$

puisque $\mathrm{E}_p \to 0$ si $r \to \infty$.

I.6 $\mathrm{E} = -\dfrac{\mathrm{GM}m}{2a}$

I.7 Il s'agit de la loi de Kepler qu'il s'agit de rappeler

$$\boxed{\mathrm{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathrm{MG}}}a^{3/2}}$$

Rappelons que pour cette question ainsi que la précédente, on retrouve ces résultats très rapidement en traitant le cas du mouvement circulaire et en remplaçant le rayon de l'orbite par a.

I.8 $v_{\mathrm{T}} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{GM}_s}{r_{\mathrm{T}}}} = 29,8\ \mathrm{km.s^{-1}}$

$v_{\mathrm{M}} = 24,2\ \mathrm{km.s^{-1}}$

I.9 $a = \dfrac{r_{\mathrm{T}} + r_{\mathrm{M}}}{2} = 1,25\mathrm{UA}$

$$\mathrm{E}_m = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}{}^2 - \mathrm{G}\frac{m\mathrm{M}}{r_{\mathrm{T}}} = -\frac{\mathrm{G}m\mathrm{M}}{2a}$$

d'où
$$\boxed{v_p = \sqrt{2\mathrm{GM}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{T}}} - \frac{1}{2a}\right)}}$$

I.10 En utilisant la loi de Kepler,

$$\boxed{\Delta\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathrm{MG}}}a^{3/2} = 258j16h}$$

Pendant que la sonde va de la terre à Mars, Mars parcourt l'arc de cercle caractérisé par l'angle

$$\boxed{\beta = \frac{v_{\mathrm{M}}\Delta\mathrm{T}}{r_{\mathrm{M}}} = 0,377rad = 21,6°}$$

I.11 Le PFD pour un mouvemement circulaire donne

$$mr_0\omega^2 = \frac{\mathrm{G}mm_{\mathrm{M}}}{r_0^2}$$

d'où
$$\boxed{\omega = \sqrt{\mathrm{G}\frac{m_{\mathrm{M}}}{r_0^3}} = 0,99.10^{-3}\ \mathrm{rad.s^{-1}}}$$

I.12 D'après le PFD appliqué à P_1, on a

$$\frac{m}{2}(r_0 - h)\omega^2 = \mathrm{G}\frac{mm_{\mathrm{M}}}{2(r_0-h)^2} - \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} = \mathrm{G}\frac{mm_{\mathrm{M}}}{2}\left(\frac{r_0-h}{r_0^3} - \frac{1}{(r_0-h)^2}\right)$$

Au premier ordre,

$$\mathcal{R} \approx \mathrm{G}\frac{mm_{\mathrm{M}}(r_0-h)}{r_0^3}\left(1 - (1 - 3\frac{h}{r_0})\right) \approx 10^{-2}\mathrm{N}$$

Cette force est effectivement très faible.

II. Centrale MP 2009

I.B.3 En coordonnées polaires,

$$\overrightarrow{r}_{\mathrm{A}} = r\,\overrightarrow{e}_r \quad \overrightarrow{v}^*_{\mathrm{A}} = \dot{r}\,\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e}_\theta \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C} = r^2\dot{\theta}$$

On peut alors écrire

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{G}\frac{\mathrm{M}}{r^2}\overrightarrow{e}_r \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\mathcal{G}\frac{\mathrm{M}}{r^2\dot{\theta}}\overrightarrow{e}_r$$

soit
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathcal{G}\mathrm{M}}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{e}_\theta\right) = \overrightarrow{0} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mathrm{C}}{\mathcal{G}\mathrm{M}}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e}$ est un vecteur du plan défini par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e}_\theta$, donc du plan du mouvement. Dans ce plan, le choix des axes (Ox) et (Oy) étant arbitraire, on peut imposer $\overrightarrow{e} = e\,\overrightarrow{e}_y$ sans perte de généralité.

I.B.4 On en déduit
$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{e}_\theta = r\dot\theta = \frac{1}{\alpha}\left(e\cos\theta+1\right)$$
qui prend la forme demandée si on remarque que $r\dot\theta=\frac{\mathrm{C}}{r}$; il vient donc
$$\boxed{p=\mathrm{C}\alpha=\frac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\mathrm{M}}}$$

On reconnaît l'équation d'une conique, qui est une hyperbole si $e>1$.

I.C.1 $\overrightarrow{\sigma}_\mathrm{A}=m\left(b\overrightarrow{e}_y-\ell\overrightarrow{e}_x\right)\wedge v_0\overrightarrow{e}_x=m\mathrm{C}\overrightarrow{e_z}$ donc
$$\boxed{\mathrm{C}=-bv_0<0}$$

le signe de C est aussi celui de $\dot\theta$, cf. figure de l'énoncé.

I.C.2 La conservation de l'énergie mécanique $\mathrm{E}_m=\mathrm{E}_c-\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}m}{r}$ impose $\mathrm{E}_{c0}=\mathrm{E}_{c1}$ puisque $r_0\to\infty$ et $e_1\to\infty$; on a donc
$$\boxed{v_1=v_0}$$

I.C.3
$$\overrightarrow{e}(t\to-\infty)=\alpha\overrightarrow{v}_0-(-\overrightarrow{e}_y)\quad\text{donc}\quad\overrightarrow{e}(t\to-\infty)=\alpha v_0\overrightarrow{e}_x+\overrightarrow{e}_y$$

De même pour $t\to+\infty$, $\overrightarrow{v}\to v_0(\cos\Phi\overrightarrow{e}_x+\sin\Phi\overrightarrow{e}_y)$ et $\overrightarrow{e}_\theta\to\cos\Phi\overrightarrow{e}_y-\sin\Phi\overrightarrow{e}_x$ donc
$$\boxed{\overrightarrow{e}(t\to+\infty)=\overrightarrow{e}_x\left[\alpha v_0\cos\Phi+\sin\Phi\right]-\overrightarrow{e}_y\left[\cos\Phi-\alpha v_0\sin\Phi\right]}$$

On déduit de la conservation de $\overrightarrow{e}$ les deux relations
$$\alpha v_0(1-\cos\Phi)=\sin\Phi\quad\text{et}\quad 1+\cos\Phi=\alpha v_0\sin\Phi$$
qui sont équivalentes à
$$\tan\frac{\Phi}{2}=\frac{1}{\alpha v_0}$$
d'où
$$\boxed{\tan\frac{\Phi}{2}=\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{\mathrm{C}v_0}<0}$$

I.C.4 La conservation de l'énergie impose
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}m}{d}$$
où v est la vitesse à l'instant du passage à la distance minimale d. Comme $r=r_\mathrm{min}$, $\dot r=0$ et la vitesse est alors orthoradiale donc la conservation du moment cinétique impose aussi $\mathrm{C}=-bv_0=-dv$. On élimine v pour écrire
$$\frac{1}{d^2}-2\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{v_0^2b^2}\frac{1}{d}-\frac{1}{b^2}=0$$
le discriminant réduit de cette équation est
$$\Delta'=\frac{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2}{v_0^4b^4}+\frac{1}{b^2}>0$$
et on retient la seule racine positive
$$\frac{1}{d}=\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{v_0^2b^2}+\sqrt{\frac{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2}{v_0^4b^4}+\frac{1}{b^2}}$$
d'où
$$\boxed{d=\frac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\mathrm{M}+\sqrt{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2+\mathrm{C}^2v_0^2}}}$$

$\boxed{\textbf{I.C.5}}$ La relation ci-dessus s'écrit aussi

$$\frac{1}{d} = \frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{b^2 v_0^2} + \sqrt{\frac{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2}{b^4 v_0^4} + \frac{1}{b^2}}$$

$\frac{1}{d}$ est une fonction croissante de $\frac{1}{b}$, donc d une fonction croissante de b. On peut recopier l'expression de la question précédente sous la forme $\tan\frac{|\Phi|}{2} = \frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{bv_0^2}$; $|\Phi|$ est donc une fonction décroissante de b. On relie ces deux affirmations pour conclure

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}|\Phi|}{\mathrm{d}d} < 0}$$

Si la particule A s'approche très près de E, d diminue donc Φ augmente : la déviation est aussi plus importante.

$\boxed{\textbf{I.C.6}}$ Si $d = \mathrm{R}$, on en déduit

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathcal{G}\mathrm{M} + \sqrt{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2 + \mathrm{C}^2 v_0^2}} = \frac{\sqrt{\mathcal{G}^2\mathrm{M}^2 + \mathrm{C}^2 v_0^2} - \mathcal{G}\mathrm{M}}{v_0^2}$$

d'où
$$(\mathrm{R}v_0^2 + \mathcal{G}\mathrm{M})^2 = \mathcal{G}^2\mathrm{M}^2 + \mathrm{C}^2 v_0^2$$

comme $\tan\frac{\Phi}{2} = -\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{\mathrm{C}v_0}$, on exprime alors $\mathrm{C}v_0 = -\sqrt{\mathrm{C}^2 v_0^2}$ sous la forme

$$\mathrm{C}v_0 = -\sqrt{(\mathrm{R}v_0^2 + \mathcal{G}\mathrm{M})^2 - \mathcal{G}^2\mathrm{M}^2}$$

d'où
$$\mathrm{C}v_0 = -\sqrt{\mathrm{R}^2 v_0^4 + 2\mathcal{G}\mathrm{M}\mathrm{R}v_0^2}$$

soit
$$\boxed{-\mathrm{C}v_0 = v_0^2\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R}+\rho)} \quad \text{avec} \quad \rho = 2\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{v_0^2}}$$

$\boxed{\textbf{I.C.7}}$

Application numérique :
$$\boxed{\rho = 2\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{c^2} = 2,95\,\mathrm{km}}$$

.

$\boxed{\textbf{I.D.1}}$ Puisque $\mathrm{R} \gg \rho$, $\tan\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}\mathrm{M}}{v_0^2\mathrm{R}}$ donc

$$\boxed{\Phi_0 = 0,88''}$$

.

$\boxed{\textbf{I.D.2}}$ L'éclipse de Soleil permet de distinguer la lumière beaucoup plus faible provenant de l'étoile E au moment où la déviation a lieu, donc au moment où l'étoile est au bord du disque solaire. La valeur de $\Phi_e \neq \Phi_0$ résulte de phénomènes relativistes ; la mesure de 1919 constitua la première confirmation expérimentale de la relativité générale.

$\boxed{\textbf{I.E.1}}$ On peut écrire $\Phi = \kappa\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}m}{b}\frac{1}{mc^2}$, la grandeur mc^2 ayant la dimension d'une énergie (cinétique), et $\frac{\mathcal{G}\mathrm{M}m}{b}$ celle d'une énergie (potentielle) ; κ est donc (comme Φ) sans dimension et donc s'exprime sans unité.

$\boxed{\textbf{I.E.2}}$ Dans une lentille ordinaire, la dérivation Φ d'un faisceau parallèle vérifie (cf. schéma page suivante) $\Phi = \frac{b}{f'}$, où f' est la distance focale de la lentille ; la déviation gravitationnelle de la lumière se comporte donc comme une lentille convergente de focale

$$\boxed{f' = \frac{c^2 b^2}{\kappa\mathcal{G}\mathrm{M}}}$$

.

$\boxed{\textbf{I.E.3}}$

Application numérique : $$\boxed{f' = \frac{c^2\mathrm{R}^2}{2\mathcal{G}\mathrm{M}} = 0,017\,\mathrm{AL}}$$

$\boxed{\textbf{I.E.4}}$ Il y a focalisation du faisceau de lumière émis par l'étoile lointaine ; si le faisceau converge en direction de l'observateur, l'étoile observée semblera plus lumineuse qu'elle n'est en réalité.