Corrigé du devoir surveillé n°6 B : ondes

Résolution de problème/3

La taille de l'antenne quart d'onde est

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 3 \text{ cm}$$

Pour calculer la puissance maximal délivrée par l'antenne on suppose le rayonnement isotrop ("omnidirectionnel"). On a donc

$$\mathrm{P}_{\max} = 4\pi r_{min}^2 \Pi_{\max}$$

On trouve alors

$$\mathrm{P}_{\max} \approx 0,1\mathrm{W}$$

On peut vérifier qu'on trouve approximativement la même valeur en utilisant les valeurs de E et B maximales.

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \mathrm{E}_0^2$$

Pour évaluer le DAS on peut supposer que la tête absorbe la moitié de la puissance de l'antenne et est une sphère de rayon 10 cm contenat de l'eau de masse volumique 1 kg/L ce qui fait une masse d'environ 4 kg.

Cela donne un DAS de 0,025 W/kg plus faible que la valeur limite de l'énoncé.

Problème n°1 : Etude d'un plasma

1. a) $\boxed{\mathbf{1}}$ L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} - \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

En notation complexe,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} = -i\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}}{\partial t} = i\omega \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}$$

d'où
$$\underline{\overrightarrow{j}} = i\left(-\frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}_0}{\mu_0} - \varepsilon_0 \omega \overrightarrow{\mathrm{E}}_0\right) e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}$$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{j}}(\overrightarrow{r}, t) = \underline{\overrightarrow{j}}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\overrightarrow{j}}_0 = -i\left(\frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}_0}{\mu_0} + \varepsilon_0 \omega \overrightarrow{\mathrm{E}}_0\right)}$$

$\overrightarrow{j}$ a la structure d'une OPPH.

b) $\boxed{\mathbf{0,5}}$ Le plasma est localement neutre donc div $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ de sorte que $\overrightarrow{k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{E}}_0$. Comme $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$, on en déduit que $\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $\overrightarrow{k}$.

c) $\boxed{\mathbf{0,5}}$ L'équation de maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

d'où
$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}}{\omega}}$$

d) $\boxed{\mathbf{1,5}}$ On a donc

$$\vec{k} \wedge \vec{\mathrm{B}}_0 = \vec{k} \wedge (\frac{\vec{k} \wedge \vec{\mathrm{E}}_0}{\omega}) = -\frac{k^2}{\omega}\vec{\mathrm{E}}_0$$

d'où
$$\underline{\vec{j}}_0 = i(\frac{k^2}{\mu_0\omega} - \varepsilon_0\omega)\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}_0$$

On a alors $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}$ avec

$$\boxed{\underline{\sigma} = i(\frac{k^2}{\mu_0\omega} - \varepsilon_0\omega)}$$

2. a) $\boxed{\mathbf{1}}$ La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e(\vec{\mathrm{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}})$$

Les électrons sont non relativistes et $\dfrac{v\mathrm{B}}{\mathrm{E}} \approx \dfrac{v}{c} \ll 1$ de sorte que la force magnétique est négligeable.

b) $\boxed{\mathbf{2}}$ En notation complexe l'équation devient :

$$\underline{v} = \frac{ie}{m\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

Les ions sont supposés fixes et

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad \text{d'où} \quad \underline{\vec{j}} = -\frac{ine^2}{m\omega}\underline{\vec{\mathrm{E}}}$$

soit
$$\boxed{\underline{\sigma} = -\frac{ine^2}{m\omega}}$$

La puissance volumique moyenne cédée aux charges est :

$$\langle \mathcal{P}_{\mathrm{vol}} \rangle = \left\langle \vec{j}\,.\,\vec{\mathrm{E}} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{j}}\,.\,\underline{\vec{\mathrm{E}}}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{E}_0^2\mathrm{Re}(\underline{\sigma}) = 0$$

puisque $\underline{\sigma}$ est imaginaire pure.

3. a) $\boxed{\mathbf{2}}$ En utilisant les deux expressions de $\underline{\sigma}$, on obtient :

$$\frac{k^2}{\mu_0\omega} - \varepsilon_0\omega = -\frac{ne^2}{m\omega}$$

soit
$$\omega^2 = \frac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0} + \frac{\mathrm{K}^2}{\varepsilon_0\mu_0}$$

Comme $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, il vient

$$\boxed{\omega^2 = c^2(k^2 + \mathrm{K}^2)}$$

Pour qu'il y ait propgation , il faut que ω et k soient réels.

d'où
$$\boxed{\omega = c\sqrt{k^2 + \mathrm{K}^2}}$$

b) $\boxed{2}$ Par définition,

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{\mathrm{K}^2}{k^2}}}$$

et

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{kc}{\sqrt{k^2+\mathrm{K}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mathrm{K}^2}{k^2}}}}$$

On constate que $v_\varphi > c$. Ceci ne viole pas les lois de la relativité car v_φ ne représente pas la vitesse d'une information. Par contre, $v_g < c$.
On a également $v_g v_\varphi = c^2$.

4. $\boxed{2}$ La différence de temps mise par les deux trains d'onde est

$$\delta t = \frac{\mathrm{L}}{v_{g2}} - \frac{\mathrm{L}}{v_{g1}}$$

Or,
$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\sqrt{1+\frac{\mathrm{K}^2}{k^2}} \approx \frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{K}^2}{k^2}\right)$$

d'où
$$\delta t \approx \frac{\mathrm{LK}^2}{2c}\left(1/k_2^2 - 1/k_1^2\right) \approx \frac{\mathrm{LK}^2}{8\pi^2 c}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)$$

Problème n°2 : Antenne demi-onde

$\boxed{\mathbf{1.1/1}}$ On appelle dipôle oscillant un ensemble neutre de particules dont le moment dipolaire électrique est :

$$\overrightarrow{p}(t) = \sum q_i \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} = q\overrightarrow{\mathrm{A}_-\mathrm{A}_+} = p_0 \cos\omega t \overrightarrow{u_z}$$

et dont l'extension géométrique $a = \max \mathrm{A}_-\mathrm{A}_+$ est faible devant la longueur d'onde et devant la distance r où on cherche le champ EM :

$$\boxed{a \ll \lambda \quad \text{et} \quad a \ll r}$$

$\boxed{\mathbf{1.2/1}}$ On remarque que $[\ddot{p}] = [q].\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{L} = \mathrm{I}.\mathrm{T}^{-1}.\mathrm{L}$ donc $[\mathrm{X}] = \dfrac{[\mu_0 \mathrm{I}]}{\mathrm{L}}[v] = [\mathrm{B}][v]$
On a donc $[\mathrm{X}] = [\mathrm{E}]$.
Il vient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})}{r}\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi}}$$

localement, nous avons la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{\mathrm{E}}}{c}}$$

caractéristique d'une OPP dans le vide. Cette relation est locale puisqu'elle dépend de la position du point M (par $\overrightarrow{u_r}$). On ne peut pas définir de direction de propgation

1.3.a/1

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = E\overrightarrow{u_\theta} \wedge \frac{E}{\mu_0 c}\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{\ddot{p}^2(t-\frac{r}{c})}{r^2 c}\sin^2\theta\overrightarrow{u_r}$$

Il représente le transport de l'énergie EM (puissance surfacique).

1.3.b/2 La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r s'obtient :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \oiint\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi\frac{\mu_0}{16\pi^2}\frac{\langle\ddot{p}^2\rangle}{r^2 c}\sin^2\theta r^2\sin\theta d\theta$$

Or,
$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

d'où
$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0\,\langle\ddot{p}^2\rangle}{6\pi c}}$$

$$\ddot{p} = -p_0\omega^2\cos\omega t$$

d'où
$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{12\pi c}}$$

La puissance rayonnée est indépendante de r. Ce fait est lié à la décroissance des champ en $1/r$ qui n'est pas lié à un phénomène d'absorption mais à la répartition de la puissance sur une surface en r^2.

1 Etude de l'antenne

2.1/0,5 L'intensité doit être nulle aux extrémités $I(z=\pm\ell/2)=0$. Cette condition est bien vérifiée.

2.2/1 Ici, la longueur d'onde est de l'ordre de la taille de l'antenne alors que pour un dipole oscillant, $\lambda \gg a$. Par contre, on se place dans la zone de rayonnement comme on l'avait fait dans le cours ($r \gg \lambda$).

2.3/2 Un élément de longueur dz parcouru par $I = \frac{dq}{dt}$ est assimilable à un dipole de moment dipolaire $dp = dqdz$. On a donc $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \mathrm{I}\mathrm{d}z$. Il suffit d'utiliser le résultat du cours rappelé en I en remplaçant $\ddot{p}$ par $\dot{\mathrm{I}}(z,t)\mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$. On a alors

$$\boxed{d\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sin\theta j\omega I_0\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\exp(j\omega(t-\mathrm{PM}/c))\mathrm{d}z\overrightarrow{u_\theta}}$$

2.4/2 Dans le terme de phase de $d\underline{\overrightarrow{E}}$, PM$\approx r - z\cos\theta$ (DL classique pour un dipole). On a donc

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\mu_0}{4\pi r}\sin\theta j\omega I_0\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\exp(j\omega(t-\mathrm{PM}/c))\mathrm{d}z\overrightarrow{u_\theta}$$

d'où
$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sin\theta j\omega I_0 exp(j\omega(t-r/c))\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\exp(j\omega\frac{z\cos\theta}{c})\mathrm{d}z}$$

Dans la zone de rayonnement,

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} = \frac{\overrightarrow{u_r} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}}{c}}$$

2.5/2 On pose $x = \dfrac{\omega z}{c}$ et on utilise l'intégrale fournie pour obtenir

$$\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp(j\omega \frac{z\cos\theta}{c})\mathrm{d}z = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \exp(jax)dx = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\cos\cos\theta\pi/2}{1-\cos^2\theta}$$

d'où

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \frac{\mu_0}{4\pi kr} j\omega \mathrm{I}_0 exp(j\omega(t-r/c))\frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\cos\cos\theta\pi/2}{\sin\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

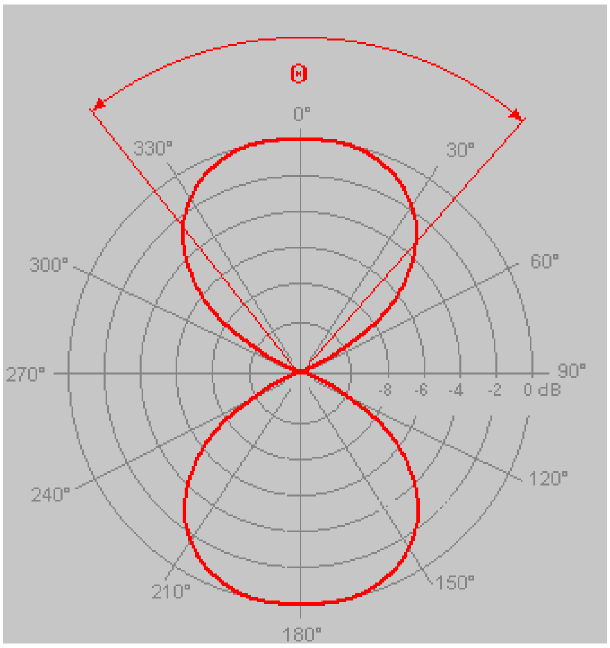
2.6/2

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{R}} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{E}^2}{\mu_0 c} \right\rangle \overrightarrow{u_r}$$

d'où

$$\boxed{\langle \mathrm{R} \rangle = \frac{\mu_0 c \mathrm{I}_0^2 \cos^2\left(\dfrac{\pi\cos\theta}{2}\right)}{8\pi^2 r^2 \sin^2\theta}}$$

2.7/2



2.8/2

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 c \mathrm{I}_0^2}{8\pi^2}\iint \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi\cos\theta}{2}\right)}{\sin^2\theta} 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1,22\mu_0 c \mathrm{I}_0^2}{4\pi}}$$

Comme $\mathrm{I}_{eff} = \mathrm{I}_0/\sqrt{2}$,

$$\boxed{r = \frac{1,22\mu_0 c}{2\pi}}$$

Ce n'est pas une veritable résistance car la puissance ne représente pas une perte par effet Joule. $\boxed{\textbf{2.9/1}}$ La puissance rayonnée doit etre la plus importante possible et il faut donc une résistance de rayonnement maximale.

Mines MP 2000

$\boxed{\textbf{16/0,5}}$ Un milieu peut être localement neutre et comporter des charges fixes et des charges mobiles. Il peut donc y avoir une densité de courant volumique non nulle.

$\boxed{\textbf{17/0,5}}$ Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

$\boxed{\textbf{18/1}}$ Il faut calculer le rapport $\dfrac{\varepsilon_0\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}}{\gamma \mathrm{E}} \approx \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma\omega}$. Ce rapport vaut à 1 GHz 10^-9 pour le cuivre et 185 pour le silicium.

On peut donc négliger le courant de déplacement dans le cuivre mais pas dans le silicium.

$\boxed{\textbf{19/1}}$ On établit de manière classique $\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = \gamma\mu_0\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$ et en notation complexe

$$\boxed{\Delta\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = \frac{2i}{\delta^2}\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}}$$

$\boxed{\textbf{20/2,5}}$ On résoud l'équation caractéristique $\alpha^2 = \dfrac{2i}{\delta^2}$

$$\alpha = \sqrt{\mu_0\gamma\omega}e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est continu et ne diverge pas en l'infini donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0 e^{-z/\delta}\cos(\omega t - z/\delta)\overrightarrow{u_y}}$$

On distingue dans cette expression

- le terme de propagation caractéristique d'une onde : $\cos(\omega t - z/\delta)$.
- le terme d'amortissement de l'amplitude : $e^{-z/\delta}$. L'amplitude du champ décroit quand on pénètre dans le conducteur. δ est appelé épaisseur de peau. Le champ EM n'est non nul que sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ.

AN : pour 100 MHz, $\delta = 6,7.10^{-5}$ m.

21/0,5 Pour un conducteur parfait $\gamma \to \infty$ et $\delta \to 0$. Les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont nuls dans un conducteurs parfait. Les courants sont localisés en surface.

22/1,5 Dans la zone II, on utilise $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$ et on obtient

$$\boxed{\mathrm{E}_{0x}(x) = \frac{kc^2}{\omega\varepsilon_r}\mathrm{B}_0(x) \quad \mathrm{E}_{0t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{0z}(x) = -\frac{ic^2}{\omega\varepsilon_r}\frac{\mathrm{dB}_0}{\mathrm{d}x}}$$

Dans la zone I, on utilise $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$ et on obtient

$$\boxed{\mathrm{E}_{0x}(x) = \frac{kc^2}{\omega}\mathrm{B}_0(x) \quad \mathrm{E}_{0t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{0z}(x) = -\frac{ic^2}{\omega}\frac{\mathrm{dB}_0}{\mathrm{d}x}}$$

23/1,5 Dans la zone I, $\Delta\mathrm{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial t^2}$ donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{B}_0}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\mathrm{B}_0 = 0}$$

Dans la zone II, $\Delta\mathrm{B} = \dfrac{\varepsilon_r}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial t^2}$ donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{B}_0}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\varepsilon_r\omega^2}{c^2} - k^2\right)\mathrm{B}_0 = 0}$$

24/2 Dans la zone I, $\mathrm{B}_0(x) = \mathrm{B_I}e^{-\alpha x}$ et à l'aide de la question 23, $k^2 = \alpha^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2}$

Dans la zone II, $\mathrm{B}_0(x) = \mathrm{B_{II}}\cos(\beta x + \Phi)$ et à l'aide de la question 23, $k^2 = -\beta^2 + \dfrac{\varepsilon_r\omega^2}{c^2}$.
par sosutraction, il vient

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\omega^2}{c^2}}$$

25/1 Analogie : dans la zone II, on a bien le guidage d'une onde électromagnétique comme dans un guide d'onde à parois métalliques. B est transverse, E ne l'est pas.

Quelques différences :

- dans la zone I, on aurait un métal parfait.
- dans la zone I, on aurait un champ électromagnétique nul. Ici, dans le vide, il s'amortit mais n'est pas nul.

26/0,5 On admet que les relations étudiées dans le cours sont toujours valables pour le champ magnétique. A l'interface vide - milieu isolant, les courants surfaciques sont nuls car le milieu est non conducteur. La composante tangentielle du champ magnétique est donc continue. La fonction $\mathrm{B}_0(x)$ est donc continue en $x = a$.

27/0,5 On traduit en $x = 0$, la continuité de la composante tangentielle du vecteur champ électrique. Elle se traduit par la relation

$\mathrm{E}_{0z}(0^+) = 0$ soit $\dfrac{\mathrm{dB}_0}{\mathrm{d}x} = 0$ ce qui donne $\Phi = 0$.

28/1 En $x = a$, on traduit

- la continuité de $\mathrm{B}_0(x)$ soit $\mathrm{B_I}e^{-\alpha a} = \mathrm{B_{II}}\cos\beta a$

- la continuité de la composante tangentielle de E

$$\frac{\mathrm{dB}_0}{\mathrm{d}x}(a^+) = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\mathrm{dB}_0}{\mathrm{d}x}(a^-) \quad \text{d'où} \quad \alpha \mathrm{B_I} e^{-\alpha a} = \mathrm{B_{II}}\frac{\beta}{\varepsilon_r}\sin\beta a$$

29/0,5 Les équations précédentes n'ont pas de solution si $\beta a = 0 \quad [\frac{\pi}{2}]$.

30/1 On combine les équations de la question 28 et on établit la relation (R2)

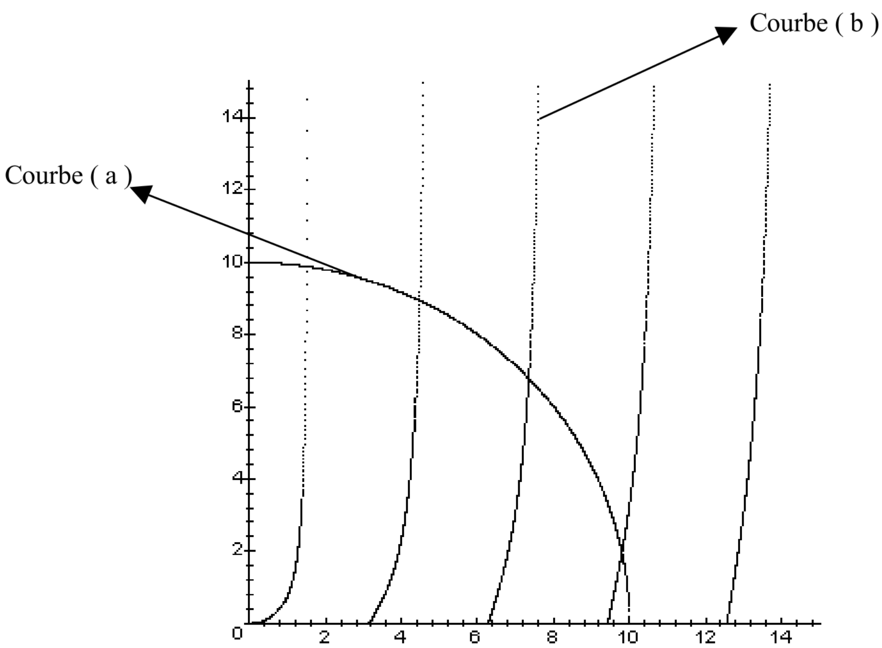
$$\beta \tan \beta a = \varepsilon_r \alpha$$

Il y a une erreur d'énoncé.

31/3 On pose $\mathrm{X} = \beta a$ et $\mathrm{Y} = \alpha a$ pour obtenir le système suivant

$$\begin{cases} \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \dfrac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon_r - 1) \quad \text{courbe (a)} = \\ \mathrm{X}\tan\mathrm{X} = \varepsilon_r \mathrm{Y} \quad \text{courbe (b)} = \end{cases}$$

On résoud graphiquement :



Le nombre de solution est $\mathrm{E}(\frac{\omega a}{c\pi}\sqrt{\varepsilon_r - 1}) + 1$

32/1 Un mode n est identifié si $\mathrm{E}(\frac{\omega a}{c\pi}\sqrt{\varepsilon_r - 1}) + 1 > n$ donc à la limite la pulsation de coupure est $\dfrac{\pi c(n-1)}{a\sqrt{\varepsilon_r - 1}}$ alors qu'elle vaut $\dfrac{n\pi c}{a}$ pour un guide d'onde à parois métalliques.