Corrigé du devoir surveillé B

Problème n°1 : Physique statistique. Capacités thermiques

1. $C_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ et $C_p = \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P$

$$H = U + PV = U + nRT$$

pour un gaz parfait donc

$$\boxed{C_P = C_V + nR}$$

C'est la relation de Mayer

2. a) Lorsque l'énergie d'une particule fait intervenir le carré d'une coordonnées d'espace ou de vitesse au carré, la moyenne de ce terme énergétique est $\dfrac{1}{2}k_bT$.

b) Pour un gaz parfait l'énergie interne est l'énergie cinétique. S'il est monoatomique

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

d'où $$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}k_BT \quad \text{et} \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT$$

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}Nk_B}$$

c) On observe l'évolution suivante de $C_V(T)$ que l'on peut interpréter :

- A T ambiante, l'énegie cinétique d'une molécule est :

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

d'où $$\langle\varepsilon\rangle = \frac{5}{2}k_BT \quad \text{et} \quad E = \frac{5}{2}Nk_BT$$

- à basse T, les degrés de liberté de rotation sont gelés et la molécule diatomique se comporte comme un gaz monoatomique.

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}Nk_B}$$

- à haute T, on observe des vibrations de la molécules qui rajoute deux termes quadratiques : un d'énergie cinétique de translation et un d'énergie potentielle élastique.

$$\boxed{C_V = \frac{7}{2}Nk_B}$$

3. Un solide de N atomes peut etre considéré comme un ensemble de N oscillateurs harmoniques (les interactions étant modélisées ainsi au voisinage des positions d'équilibre). Chaque atome possède une énergie

$$\varepsilon = e_c + e_p = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

L'énergie du solide est donc

$$E = N\varepsilon = 6N\frac{1}{2}k_bT$$

d'où $$\boxed{C_v = 3N}$$

C'est la loi de Dulong et Petit.

4. a) On calcule la fonction de partition

$$z = \sum_0^\infty \exp(-(n+\frac{1}{2})u) = \exp(-u/2)\sum_0^\infty \exp(-nu) = \frac{\exp(-u/2)}{1-\exp(-u)}$$

d'où
$$z = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(u/2)}$$

soit
$$\boxed{p_n(u) = \frac{\exp(-(n+\frac{1}{2})\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}})}{z} = 2\,\mathrm{sh}\,(u/2)\exp(-(n+\frac{1}{2})u}$$

b)
$$\overline{\varepsilon} = \sum_0^\infty p_n(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\overline{\varepsilon} = 2\hbar\omega\,\mathrm{sh}\;u/2\exp(-u/2)\sum_0^\infty ne^{-nu} + \frac{\hbar\omega}{2}\sum_0^\infty p_n$$

$$\overline{\varepsilon} = 2\hbar\omega\,\mathrm{sh}\;u/2\frac{\exp(-u/2)}{4\,\mathrm{sh}^2\,u/2} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

d'où
$$\boxed{\overline{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_b\mathrm{T}}\right)}$$

c)
$$\mathrm{C_V} = \mathrm{N}\frac{d\overline{\varepsilon}}{d\mathrm{T}} = \mathrm{N}\frac{\hbar^2\omega^2}{k_\mathrm{B}\mathrm{T}^2}\frac{1}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\hbar\omega}{2k_b\mathrm{T}}\right)}$$

d) A haute température l'argument du sh tend vers 0 et sh $x \approx x$ si $x \to 0$.

d'où
$$\boxed{\mathrm{C_V} \approx \mathrm{N}k_\mathrm{B}}$$

On retrouve l'application du théorème d'équipartition de l'énergie : il y a deux termes quadratiques dans l'énergie d'un cristal unidimensionnel. Un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentielle elastique.

Problème n°2 : Physique quantique

18/0,5 Pour une particule à un degré de liberté :

$$\boxed{\int_{espace} |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad [\psi] = \mathrm{L}^{-1/2}}$$

19/0,5 La probabilité de trouver une particule qui existe dans l'espace est bien entendu de 1.

20/1 $\rho = \frac{d\mathrm{P}}{dx}$ est la densité de probabilité de présence. Par analogie, on a

$$\boxed{\mathrm{div}\;\overrightarrow{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

21/1,5 Une particule non relativiste a une vitesse faible devant c.

On injecte la solution dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mathrm{V}(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Cette constante est homogène à une énergie et on l'appelle $\mathcal{E}$. On constate que c'est l'énergie de la particule.

On a alors l'équation de Schrödinger indepéndante du temps :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mathrm{V}(x)\varphi = \mathcal{E}\varphi}$$

On peut déterminer aisément la fonction f

$$\boxed{f(t) = \mathrm{A}e^{-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}}}$$

La densité de probabilité de présence est indépendante du temps :

$$\boxed{|\psi|^2 = |\varphi|^2}$$

dP est indépendante de t.

22/1 L'équation de Schrodinger pour un état stationnaire s'écrit :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mathcal{E}\varphi = 0$$

En choisissant $\mathcal{E} > 0$, il vient, $\varphi(x) = \mathrm{A}e^{ikx}$ en posant $k^2 = \dfrac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$.

Finaement la fonction d'onde de la particule libre est

$$\boxed{\psi(x,t) = \mathrm{A}e^{i(kx-\omega t)} + \mathrm{B}^{i(kx+\omega t)}}$$

On remarque que l'état stationnaire est très loin de correspondre à une onde stationnaire car il s'agit d'une OPPH.

23/1

$$k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

$p = \hbar k$ est la relation de De Broglie.

24/0,5 La particule rebondirait sur la barrière de façon certaine.

25/1

$$\varphi(x,t) = \mathrm{A}\exp i(kx) + \mathrm{B}\exp i(-kx) \quad \text{pour} \quad x < 0$$

$$\varphi(x,t) = \mathrm{C}\exp i(kx) \quad \text{pour} \quad x > a$$

26/1

$$\varphi(x,t) = \mathrm{D}\exp^{(qx)} + \mathrm{F}\exp^{(-qx)} \quad \text{pour} \quad 0 < x < a$$

27/1 En utilisant les continuité de φ et φ' en 0 et a on a 4 relations. La normalisation de la fonction d'onde donne la dernière relation.

28/2 On pose dans la région III, $\underline{\psi} = |\mathrm{C}|\, e^{i(kx-\omega t+\varphi)}$

$$j_{\mathrm{III}} = \frac{i\hbar}{2m}\left(|\mathrm{C}|^2(-ik) - |\mathrm{C}|^2\, ik\right) = \frac{\hbar^2 k}{m}|\mathrm{C}|^2$$

Dans la région I, $j_{incident} = \dfrac{\hbar^2 k}{m} |A|^2$ et $j_{reflechi} = \dfrac{\hbar^2 k}{m} |B|^2$

d'où
$$\boxed{R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{|C|^2}{|A|^2}}$$

29/3 $q = 5,14.10^9 m^{-1}$ On obtient les AN suivantes

a (m)	0,50	1,00	2,00
qa	2,57	5,14	10,3
T	$2{,}32.10^{-2}$	$1,37.10^{-4}$	$4,52.10^{-9}$

Une barrière est épaisse si $qa \gg 1$ on a alors $sh^2 qa \approx e^{2qa}/4$. On a alors

$$T \approx \frac{16\mathcal{E}(V_0 - \mathcal{E})}{V_0^2} e^{-2qa}$$

d'où
$$\boxed{T_0(\mathcal{E}, V_0) = \frac{16\mathcal{E}(V_0 - \mathcal{E})}{V_0^2}}$$

En posant $x = \mathcal{E}/V_0$, on voit que T_0 varie entre 0 et 2 (maximum en $x = 1/2$). On a donc

$$\boxed{T_0 \approx 1 \quad \text{et} \quad T \approx e^{-2qa}}$$

29/2 L'énergie potentielle électrostatique est $V(x) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}$ avec $q_1 q_2 = 2(Z-2)e^2$

d'où
$$\boxed{V_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_m}}$$

Application numérique :
$$\boxed{V_0 = 73,9\text{MeV} \quad \text{et} \quad x_m = 6,46.10^{-14} m}$$

La largeur de la barrière est donc $a = x_m - x_0 = 61.10^{-15}$ m. On calcule qa pour savoir si la barrière est épaisse :

$$q = 6,67.10^{15} m^{-1} \quad \text{et} \quad qa = 224$$

On peut donc considérer que la barrière est épaisse (mais franchissable).

31/3 En utilisant 29, on a

$$T(x + dx) = T(x)e^{-2qdx} \quad \text{avec} \quad q(x) = \frac{\sqrt{2m(V(x) - \mathcal{E}}}{\hbar}$$

d'où
$$T(x + dx) = T(x)(1 - 2qdx)$$

$$\frac{T(x + dx) - T(x)}{T(x)} = -2qdx \quad \text{d'où} \quad dln T = -2qdx$$

d'où
$$\ln T = -2\int_{x_0}^{x_m} q(x)dx = -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x} - \mathcal{E}\right)}$$

32/3 $x_m = \dfrac{K}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\ln T = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1}dx = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}}\right)$$

en utilisant l'expression de l'énoncé. En remplaçant x_m par sa valeur, on trouve

$$\boxed{\ln \mathrm{T} = a - \frac{b}{\sqrt{\mathcal{E}}} \quad \text{avec} \quad a = \frac{4}{\hbar}\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{4\pi\varepsilon_0}2mx_0} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathrm{K}}{\hbar 4\varepsilon_0}\sqrt{2m}}$$

33/3 $v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m_\alpha}} = 14,9.10^3 m.s^{-1}$ Entre 2 rebonds sur la barrière la particule parcourt $4x_0$ donc $t_m = \dfrac{4x_0}{v}$
Nombre moyen de rebonds par seconde :

$$\mathrm{N} = \frac{1}{t_m} = \frac{v}{x_0}$$

On a donc la probabilité de départ des particules α pendant dt :

$$\boxed{dp = \mathrm{NT}dt}$$

Le nombre de particule α n est donc tel que $\dfrac{dn}{dt} = -\mathrm{NT}n$. On trouve donc $quen(t) = n_0 e^{-t/\mathrm{NT}}$. Il vient alors

$$\boxed{\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mathrm{NT}} \quad \text{d'où} \quad \ln \tau_{1/2} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} + \frac{b}{\sqrt{\mathcal{E}}}}$$

34/1 Le résultat précédent est bien en accord avec le résultat précédent : $\ln \tau_{1/2}$ et donc $\log \tau_{1/2}$ augmente linéairement avec $\mathrm{E}^{-1/2}$.

Problème n°3 : Diffusion thermique

IV.A.1 On considère que a et b sont infinis ainsi T ne dépend que de x et t.

IV.A.2 Démo vue plusieurs fois (en cours notamment). On montre à l'aide du bilan d'énergie et de la loi de Fourier

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\mu c}}$$

IV.A.3 En régime stationnaire $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = 0$ donc $\dfrac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2} = 0$ et avec les conditions limites

$$\boxed{\mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_1}{\ell}x + \mathrm{T}_1}$$

$$\phi = j_{th}\mathrm{S} = -\lambda\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}ab$$

$$\boxed{\phi = (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0)\frac{\lambda ab}{\ell}}$$

IV.A.4 Par analogie avec la conduction électrique $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0}{\mathrm{R}}$,

$$\boxed{\phi = \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0}{\mathrm{R}_{th}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_{th} = \frac{\ell}{\lambda ab}}$$

IV.B.1 h s'exprime en $\mathrm{W.K}^{-1}.m^{-2} = kg.\mathrm{K}^{-1}.s^{-3}$
Par analogie avec la loi d'ohm on a

$$\boxed{R_h = \frac{T_0 - T_a}{\phi_{cc}} = \frac{1}{hS}}$$

IV.B.2 $R_{th}(Si) = 1,1.10^{-2}\text{K.W}^{-1}$

$R_{th}(1Cu) = 0,4.10^{-2}\text{K.W}^{-1}$

$R_h = \dfrac{1}{hab} = 35\text{K.W}^{-1}$ Les deux résistances sont en série et $R_{tot} \approx R_h$. C'est l'air qui limite le transfert thermique.

IV.D.1 On isole une tranche dx de la barre et on y fait un bilan d'énergie pendant dt. On dessine l'élément de volume et on remarque que la surface d'échange est $S = 4a\text{d}x$. On trouve

$$dU = 0 = \phi(x)\text{d}t - \phi(x+dx)\text{d}t - \phi_{lat}\text{d}t$$

$$0 = \lambda e\ell_z \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (2e + 2\ell_z)h(T(x) - T_a)$$

On obtient alors

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2}(T - x) - T_a) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \frac{\lambda e\ell_z}{2(e+\ell_z)}}$$

La résolution donne

$$T(x) - T_a = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$$

Comme la température ne peut diverger, B=0 et comme $T(x_1) = T_R = T_a + Ae^{-x_1/\delta}$ on trouve

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_R - T_a)e^{-(x-x_1)/\delta}}$$

IV.D.2 La puissance évacuée par l'ailette est celle qui entre en x_1 car le régime est stationnaire.

$$P_{ailette} = \phi(x_1) = -\lambda\frac{\text{d}T}{\text{d}x}(x_1)e\ell_z = (T_R - T_a)\lambda e\ell_z/\delta$$

d'où $$P_{ailette} = (T_R - T_a)\sqrt{\lambda h(2e + 2\ell_z)e\ell_z}$$

et $$\boxed{P_{rad} = 6(T_R - T_a)\sqrt{\lambda h(2e + 2\ell_z)e\ell_z}}$$

Application numérique : $$\boxed{P_{rad} = 44\text{W} \quad \text{et} \quad R_{rad} = 1,1\text{K.W}^{-1}}$$

La puissance perdue est beaucoup plus grande grâce au radiateur qui permet d'évacuer la chaluer efficacement.