

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ A

PROBLÈME N°1 : PHYSIQUE STATISTIQUE. CAPACITÉS THERMIQUES

$$1. C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \text{ et } C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

$$H = U + PV = U + nRT$$

pour un gaz parfait donc

$$\boxed{C_P = C_V + nR}$$

C'est la relation de Mayer

2. a) Lorsque l'énergie d'une particule fait intervenir le carré d'une coordonnées d'espace ou de vitesse au carré, la moyenne de ce terme énergétique est $\frac{1}{2}k_B T$.
 b) Pour un gaz parfait l'énergie interne est l'énergie cinétique. S'il est monoatomique

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

d'où $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}k_B T$ et $E = \frac{3}{2}Nk_B T$

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}Nk_B}$$

c) On observe l'évolution suivante de $C_V(T)$ que l'on peut interpréter :

- A T ambiante, l'énergie cinétique d'une molécule est :

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$$

d'où $\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2}k_B T$ et $E = \frac{5}{2}Nk_B T$

- à basse T, les degrés de liberté de rotation sont gelés et la molécule diatomique se comporte comme un gaz monoatomique.

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}Nk_B}$$

- à haute T, on observe des vibrations de la molécules qui rajoute deux termes quadratiques : un d'énergie cinétique de translation et un d'énergie potentielle élastique.

$$\boxed{C_V = \frac{7}{2}Nk_B}$$

3. Un solide de N atomes peut être considéré comme un ensemble de N oscillateurs harmoniques (les interactions étant modélisées ainsi au voisinage des positions d'équilibre). Chaque atome possède une énergie

$$\varepsilon = e_c + e_p = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

L'énergie du solide est donc

$$E = N\varepsilon = 6N\frac{1}{2}k_B T$$

d'où

$$\boxed{C_v = 3N}$$

C'est la loi de Dulong et Petit.

4. a) On considère un système de particules pouvant être dans deux niveaux d'énergie. C'est le cas par exemple d'atomes pouvant avoir un moment magnétique $\pm \vec{\mathcal{M}}$ dans un champ magnétique \vec{B} . Le moment magnétique étant quantifié (expérience de Stern et Gerlach), l'énergie est quantifiée et prend deux valeurs $\pm \varepsilon$.
 b) la fonction de partition est $Z = 2 \operatorname{ch} E/kT$.

$$p_1 = \frac{e^{E/kT}}{2 \operatorname{ch} E/kT} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{e^{-E/kT}}{2 \operatorname{ch} E/kT}$$

- c) Il vient pour une particule

$$\bar{\varepsilon} = -E \operatorname{th} \left(\frac{E}{kT} \right)$$

Donc pour N particules

$$E_{tot} = -NE \operatorname{th} \left(\frac{E}{kT} \right)$$

On constate que si $T \rightarrow 0$, l'énergie est celle du fondamental alors que si $T \rightarrow \infty$ l'énergie moyenne est nulle car les états sont équiprobables.

- d) Pour un système de N atomes

$$C_V = N \frac{dE}{dT} = \frac{NE^2}{k_B T^2} \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{E}{kT} \right) \right)$$

La capacité thermique est nulle à faible et haute température.

- e)

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= p_1 \varepsilon^2 + p_2 \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \\ \Delta \varepsilon^2 &= \overline{\varepsilon^2} - (\bar{\varepsilon})^2 = E^2 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{E}{kT} \right) \right) = \frac{k_B T^2 C_V}{N} \end{aligned}$$

Pour le système global, $\Delta E^2 = k_B T^2 C_V$ On constate que les fluctuations sont proportionnelles à la capacité thermique ; c'est un exemple d'un théorème très général en physique : le Théorème de fluctuation-dissipation.

PROBLÈME N°2 : PHYSIQUE QUANTIQUE

1.1/1 Une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ est une grandeur complexe, dépendant a priori de \vec{r} et de t , qui caractérise l'état d'une particule. Par définition, la probabilité de trouver la particule dans un volume dx est

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx$$

Pour une particule à un degré de liberté :

$$\int_{\text{espace}} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

La connaissance de la fonction d'onde permet de calculer des valeurs moyennes ; par exemple la vitesse moyenne est

$$\langle v \rangle = \int_{\text{espace}} v(x, t) |\psi(x, t)|^2 dx$$

1.2/0,5 Schrödinger a postulé cette équation en 1925

1.3/2

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x) = C^{\text{te}}$$

Cette constante est homogène à une énergie et on l'appelle E. On constate que E est l'énergie de la particule.

On a alors l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi = E\varphi}$$

On peut déterminer aisément la fonction f

$$\boxed{f(t) = Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}}}$$

La densité de probabilité de présence est indépendante du temps :

$$\boxed{|\psi|^2 = |\varphi|^2}$$

2.1/2 L'équation de Schrodinger pour un état stationnaire s'écrit :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + E\varphi = 0$$

En choisissant $E > 0$, il vient, $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ en posant $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

En gardant un terme (OPPH se propageant selon les x croissants,

$$\boxed{\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}}$$

On remarque que l'état stationnaire est très loin de correspondre à une onde stationnaire car il s'agit d'une OPPH.

2.2/1 En identifiant la vitesse de groupe à la vitesse de la particule,

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}}$$

On retrouve la relation de De Broglie :

$$\boxed{p = mv = \hbar k = \frac{h}{\lambda}}$$

2.3/1 la fonction d'onde déterminée ne peut pas décrire l'état physique d'une particule car $\int_{espace} |\psi(x, t)|^2 dx$ diverge. En réalité l'état est défini par un paquet d'onde, superposition d'OPPH, défini par un spectre de largeur $\Delta\omega$ ou Δk (les deux étant bien sur reliés).

3.1/2 La résolution est

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0 \quad \text{avec} \quad k_n = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$$

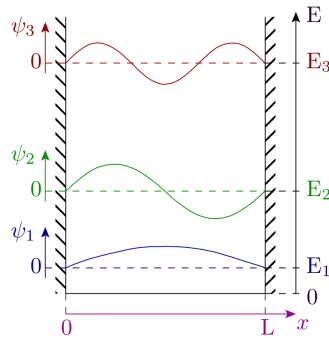
$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ Les solutions pour $E < 0$ ne permettent pas de réaliser les CL.

On trouve que $\varphi(x) = B_n \sin(k_n x)$ avec $k_n = n\frac{\pi}{L}$ est quantifié.

La normalisation donne $B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

3.2 et 3.3/1,5 L'énergie est donc quantifiée

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$



3.4/1,5 Le photon a une énergie $E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda}$. On trouve alors $\lambda = 3,3\mu\text{m}$ Il s'agit d'un rayonnement infra-rouge.

Les particules confinées dans le puits ont une énergie cinétique et donc une vitesse non nulle conformément au principe d'Heisenberg.

On constate que l'impulsion d'un niveau n est $p_n = \frac{n\hbar\pi}{L}$. L'incertitude sur l'impulsion est donc $\Delta p = \frac{n\hbar\pi}{L}$.

4.1/1,5 La résolution de l'équation de Schrödinger donne

$$\varphi(x) = Ae^{Kx} \quad x < -L/2$$

$$\varphi(x) = Be^{-Kx} \quad x > L/2$$

$$\varphi(x) = C \cos Kx + D \sin Kx \quad x \in [-L/2; L/2]$$

4.2/1,5 On sait que l'on doit avoir continuité de φ , ainsi que de φ' . De ce fait, il vient les quatre équations suivantes

$$Ae^{-KL/2} = C \cos(kL/2) - D \sin(kL/2) \quad (1)$$

$$Be^{-KL/2} = C \cos(kL/2) + D \sin(kL/2) \quad (2)$$

$$AKe^{-KL/2} = Ck \sin(kL/2) + Dk \cos(kL/2) \quad (3)$$

$$-BKe^{-KL/2} = -Ck \sin(kL/2) + Dk \cos(kL/2) \quad (4)$$

Notons que ces quatre équations imposent obligatoirement des valeurs d'énergies bien précises car on a un système homogène dont on ne veut pas la solution nulle. C'est le déterminant de la matrice du système

4.3.a/1,5 Pour une fonction d'onde spatiale recherchée paire, $A=B$ et $D=0$ Les quatre relations de la question précédente se réduisent à deux équations indépendantes donnant

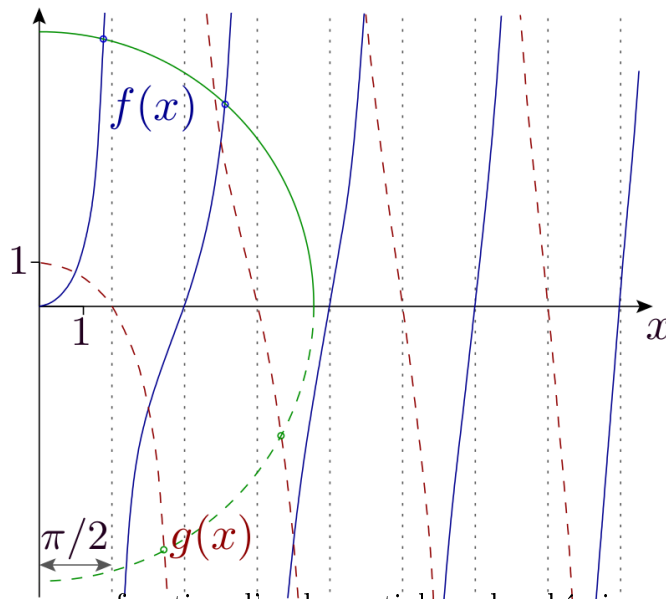
$$\frac{KL}{2} = \frac{kL}{2} \tan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

4.3.b/2 Les solutions vérifiant également la relation

$$K^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

On pose $x = kL/2$ et $y = KL/2$.

Il faut étudier l'intersection de la courbe de $f(x)$ avec le quart de cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{\frac{L^2 m V_0}{2\hbar^2}}$ On voit donc bien sur la figure suivante (en traits pleins) que pour V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini, chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : les énergies des états stationnaires symétriques sont quantifiées et de nombre fini. Notons au passage qu'il existe forcément au moins une solution.



4.4/2 Cette fois-ci, pour une fonction d'onde spatiale recherchée impaire, et $A = -B$ et $C=0$ donc

$$Ae^{-KL/2} = -D\sin(kL/2) \quad \text{et} \quad AKe^{-KL/2} = Dk\cos(kL/2)$$

Les constantes A et D ne sont pas nulles (sinon la fonction d'onde serait nulle) donc leur élimination permet de se ramener à

$$\frac{KL}{2} = -\frac{kL}{2} \cotan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

Il s'agit encore d'une équation transcendante que l'on traite graphiquement de façon analogue à ce qui précède (cette fois-ci sur le quadrant $(x > 0, y < 0)$). On a seulement à chercher les intersections entre le quart de cercle de rayon R dans ce domaine et la courbe d'équation $g(x) = x \cotan x$. On voit encore une fois que pour V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini (voire nul), chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : les énergies des états stationnaires antisymétriques sont quantifiées et de nombre fini. De plus, d'après le positionnement des intersections, les énergies des états stationnaires antisymétriques sont différentes de celles des états symétriques : les états sont alternés.

4.5/1 Supposons qu'il existe une fonction d'onde spatiale φ ni paire, ni impaire, solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Alors, celle-ci s'écrit sous la forme d'une somme de deux fonctions paire φ_S et impaire φ_{AS} . Par linéarité de l'équation de Schrödinger indépendante du temps, φ_S et φ_{AS} doivent en être solution mais les questions précédentes montrent qu'elles ne peuvent l'être pour une valeur commune d'énergie E . Par conséquent, il n'existe pas d'autre état stationnaire que les états stationnaires symétriques et antisymétriques déjà trouvés.

5.5/1 Il n'y a qu'un seul état stationnaire lié possible si les études graphiques précédentes ne fournissent qu'un seul point d'intersection. Or, il y a toujours une intersection dans le cas symétrique. Il ne faut retenir que celui-ci, d'où la condition

$$R < \pi/2 \quad \text{d'où} \quad V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

PROBLÈME N°3 : DIFFUSION THERMIQUE

IV.A.1 On considère que a et b sont infinis ainsi T ne dépend que de x et t .

IV.A.2 Démo vue plusieurs fois (en cours notamment). On montre à l'aide du bilan d'énergie et de la loi de Fourier

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\mu c}$$

IV.A.3 En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ et avec les conditions limites

$$T(x) = \frac{T_0 - T_1}{\ell} x + T_1$$

$$\phi = j_{thS} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} ab$$

$$\phi = (T_1 - T_0) \frac{\lambda ab}{\ell}$$

IV.A.4 Par analogie avec la conduction électrique $I = \frac{V_1 - V_0}{R}$,

$$\phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{th}} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{\ell}{\lambda ab}$$

IV.B.1 h s'exprime en $W.K^{-1}.m^{-2} = kg.K^{-1}.s^{-3}$

Par analogie avec la loi d'ohm on a

$$R_h = \frac{T_0 - T_a}{\phi_{cc}} = \frac{1}{hS}$$

IV.B.2 $R_{th}(Si) = 1, 1.10^{-2}K.W^{-1}$

$R_{th}(1Cu) = 0, 4.10^{-2}K.W^{-1}$

$R_h = \frac{1}{hab} = 35K.W^{-1}$ Les deux résistances sont en série et $R_{tot} \approx R_h$. C'est l'air qui limite le transfert thermique.

IV.D.1 On isole une tranche dx de la barre et on y fait un bilan d'énergie pendant dt . On dessine l'élément de volume et on remarque que la surface d'échange est $S = 4adx$. On trouve

$$dU = 0 = \phi(x)dt - \phi(x+dx)dt - \phi_{lat}dt$$

$$0 = \lambda e \ell_z \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (2e + 2\ell_z)h(T(x) - T_a)$$

On obtient alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2}(T - x) - T_a = 0 \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \frac{\lambda e \ell_z}{2(e + \ell_z)}$$

La résolution donne

$$T(x) - T_a = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$$

Comme la température ne peut diverger, $B=0$ et comme $T(x_1) = T_R = T_a + Ae^{-x_1/\delta}$ on trouve

$$T(x) = T_a + (T_R - T_a)e^{-(x-x_1)/\delta}$$

IV.D.2 La puissance évacuée par l'ailette est celle qui entre en x_1 car le régime est stationnaire.

$$P_{ailette} = \phi(x_1) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x_1) e \ell_z = (T_R - T_a) \lambda e \ell_z / \delta$$

d'où

$$P_{ailette} = (T_R - T_a) \sqrt{\lambda h (2e + 2l_z) e l_z}$$

et

$$P_{rad} = 6(T_R - T_a) \sqrt{\lambda h (2e + 2l_z) e l_z}$$

Application numérique :

$$P_{rad} = 44\text{W} \quad \text{et} \quad R_{rad} = 1,1\text{K.W}^{-1}$$

La puissance perdue est beaucoup plus grande grâce au radiateur qui permet d'évacuer la chaleur efficacement.