Equations différentielles linéaires à coefficients constants

I. Principe général de résolution

On se limite ici aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre n, dont la forme générale est : $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k f}{dt^k} = F(t)$.

Les termes a_k sont des coefficients constants et F(t) est le second membre de l'équation différentielle.

Pour résoudre ce type d'équation, on applique une méthode à connaître par cœur qui consiste à déterminer une **solution homogène** $y_H(t)$ et une **solution particulière** $y_P(t)$.

La solution générale est alors $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

1) Recherche de la solution homogène $y_H(t)$

On montre que les fonctions du type exp(rt), où r est une solution de **l'équation caractéristique** $\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$, sont solutions de l'équation différentielle sans second membre ou équation homogène associée.

La solution homogène est donc une combinaison linéaire de ces solutions : $\boxed{y_H(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \exp(r_i t)}$.

Les termes K_i sont des constantes d'intégration (elles se détermineront avec les conditions initiales).

2) Recherche d'une solution particulière $y_P(t)$ de l'équation complète

On se base sur le principe suivant *(suffisant pour les équations que nous rencontrerons)* : **il existe une solution particulière de la « même forme » que le second membre**.

Si F(t) est une constante : y_P = Cte, si F(t) est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, $y_P(t) = A \sin(\omega t+\varphi)$...

3) Détermination des constantes d'intégration

Si l'on a une équation différentielle d'ordre n, il existe n racines de l'équation caractéristique, il nous faudra donc déterminer n constantes d'intégration.
Pour cela, nous avons besoin de n équations indépendantes. Ces équations seront fournies par **les conditions initiales sur y et ses dérivées.**

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants usuelles

1) Equation d'ordre 1

Equation type : $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y = F(t)$

Solution de l'équation caractéristique : $r + \frac{1}{\tau} = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\tau}$

Solution homogène : $\boxed{y(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ **(A connaître par cœur)**

K se détermine avec la condition initiale y(0). *K a la même dimension que y et τ la même que t.*

Exemples : tension aux bornes d'un condensateur lors des régimes transitoires d'un circuit RC ou RL, vitesse d'un objet lors de sa chute avec une force de frottement proportionnelle à la vitesse.

2) Equation d'ordre 2

Equation type :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = F(t)$$

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2\right)$.

Le type de solution dépend du signe du discriminant.

- **$\Delta < 0$, régime pseudo périodique** : les 2 racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées.

$$r_1 = -\frac{1}{\tau} + i\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)} = -\frac{1}{\tau} + i\Omega \qquad r_2 = -\frac{1}{\tau} - i\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}\right)} = -\frac{1}{\tau} - i\Omega$$

Solution homogène :

$$y_H(t) = \exp(-\frac{t}{\tau})\left(K_1\cos\Omega t + K_2\sin\Omega t\right) \quad ou$$

$$y_H(t) = K\exp(-\frac{t}{\tau})\cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{où} \quad K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \ \ et\ \tan\varphi = -\frac{K_2}{K_1}$$

Il s'agit d'une fonction oscillante modulée par une enveloppe exponentielle décroissante si $\tau > 0$: oscillations amorties, la pseudo pulsation est Ω.

- **$\Delta > 0$, régime apériodique** : les 2 racines : r_1 et r_2 sont réelles et distinctes.

$$r_1 = -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2\right)} \qquad r_2 = -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2\right)}$$

Solution homogène : $y_H(t) = K_1\exp(r_1 t) + K_2\exp(r_2 t)$

- **$\Delta = 0$, régime critique** : on a une racine double $r_1 = r_2 = -1/\tau$.

Solution homogène : $y_H(t) = \left(K_1 + K_2 t\right)\exp(-\frac{t}{\tau})$

Exemples : tension aux bornes d'un condensateur lors du régime transitoire d'un circuit RLC série, étude d'un ressort avec amortissement fluide proportionnel à la vitesse…

- **Cas particulier : sans amortissement** : $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = F(t)$

Solution homogène :

$$y_H(t) = \left(K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t\right) \quad ou$$

$$y_H(t) = K\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{où} \quad K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\ \ et\ \tan\varphi = -\frac{K_2}{K_1}$$

Exemples : oscillations d'un pendule pesant ou élastique sans frottements.

Quelque soit le régime, on détermine les 2 constantes d'intégration à partir de deux conditions initiales, y(0) et $\frac{dy}{dt}(0)$.