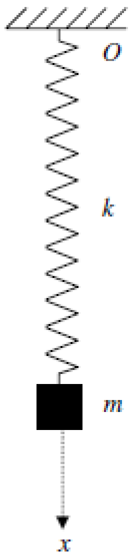
Devoir Surveillé n° 5

Durée : 4h00

Mécanique : (inspiré de CCP TSI 2008)

Dans l'ensemble du problème, $\vec{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur. On notera g sa norme.

A. Oscillateur harmonique non amorti



Considérons le système représenté ci-contre : une masse m est suspendue à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur k. L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O.
Soit l'axe (Ox), vertical et orienté vers le bas. La position de l'extrémité libre du ressort est repérée par son abscisse x.
Soit x_0 la longueur à vide du ressort et $x_{éq}$ sa longueur lorsque la masse m est accrochée au ressort et est à l'équilibre.

1) Déterminer à l'aide d'une analyse dimensionnelle, l'expression de la longueur $x_{éq}$ du ressort à l'équilibre en fonction de x_0, g, m et k.

2) A partir de considérations énergétiques, établir l'équation différentielle vérifiée par x. On admettra que l'énergie potentielle de pesanteur dans le cas d'une verticale descendante est $E_p = -mgx$.

3) Exprimer l'équation différentielle en fonction x, $x_{éq}$, m et k. En déduire la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de l'oscillateur ainsi obtenu.

4) A l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à $x_{éq}$. On communique alors à la masse m une vitesse v_0 verticale dirigée vers le bas. Déterminer dans ce cas la solution $x(t)$ de l'équation différentielle.

B. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

La masse m du système de la partie précédente est en fait une sphère homogène de masse volumique ρ et de rayon R faible.
Pour simplifier les calculs, on notera V le volume de la sphère et ρV sa masse.

1) <u>Pulsation de l'oscillateur non amorti</u> : en l'absence de frottements, les oscillations libres de la sphère ont une pulsation propre ω_1. En utilisant les résultats de la partie précédente, déterminer l'expression de ω_1 en fonction de k, V et ρ.

Dans la suite de cette deuxième partie, la sphère est placée dans un liquide de masse volumique ρ_l et de coefficient de viscosité, η.

Lorsqu'un corps est immergé dans un fluide de masse volumique ρ_l, ce corps est soumis, en plus de son poids, à une force de poussée dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède et telle que $\vec{F} = -\rho_l V_i \vec{g}$ où V_i désigne le volume du corps immergé dans le fluide.

On considèrera que la sphère est entièrement immergée dans le liquide quelle que soit la position de l'oscillateur. **La poussée d'Archimède est donc :** $\vec{F} = -\rho_l V \vec{g}$.

De plus, lorsque cette sphère est animée d'une vitesse $\vec{v}$ et plongée dans un liquide, elle est soumise, de la part du fluide, en plus de la poussée d'Archimède, à une **force de frottement** $\vec{f}$ donnée par la loi de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.
On négligera les interactions éventuelles entre le ressort et le liquide.

2) <u>Détermination de la masse volumique du liquide</u> : Lorsque la sphère est totalement immergée dans le liquide et est à l'équilibre, la longueur du ressort est égale à $x_{éq}'$.
   a) A l'aide d'un raisonnement similaire à celui de la partie A, exprimer la nouvelle position d'équilibre x_{eq}' en fonction de ρ, V, g, ρ_l, x_0 et k.
   b) En déduire l'expression de la masse volumique ρ_l du liquide en fonction de ρ, V, g, x_{eq}', x_0 et k.

3) <u>Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide :</u>
   a) A partir d'un bilan de forces sur la verticale, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur x du ressort à un instant quelconque t au cours du mouvement.
   b) L'exprimer en utilisant les grandeurs x, x_{eq}', ρ, V, k, R et η.
   c) Déterminer le facteur de qualité de l'oscillateur.
   d) A quelle condition portant sur k, constante de raideur du ressort, le mouvement de la sphère est-il pseudopériodique ? On exprimera la condition sous la forme $k > k_0$ où k_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de η, R, V et ρ.
   e) Déterminer dans ce cas la pseudo pulsation ω_2 des oscillations en fonction de k_0, k, ω_1.

C. <u>Oscillations forcées</u>

Soit un oscillateur amorti par frottement fluide constitué par une masse *m* suspendue à un ressort de masse négligeable. L'écart à la position d'équilibre de la masse *m* est repérée par son abscisse *x* .

L'oscillateur est soumis à une excitation extérieure sinusoïdale de pulsation ω donnée par : $\vec{F} = F_0\cos(\omega t)\vec{e_x}$, $F_0 > 0$ et $\vec{e_x}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses *x*.

Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0\cos(\omega t)}{m}$

ω_0 désigne la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

En régime permanent les oscillations forcées sont telles que $x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$ avec x_m et φ deux constantes.
On pourra dans cette question utiliser les notations complexes, si nécessaire. **Il faudra pour cela définir clairement les notations utilisées.**

1) En modifiant judicieusement l'équation différentielle, déterminer la grandeur complexe $\underline{x}$ en fonction de $\underline{F}$, m, α , ω et ω_0.

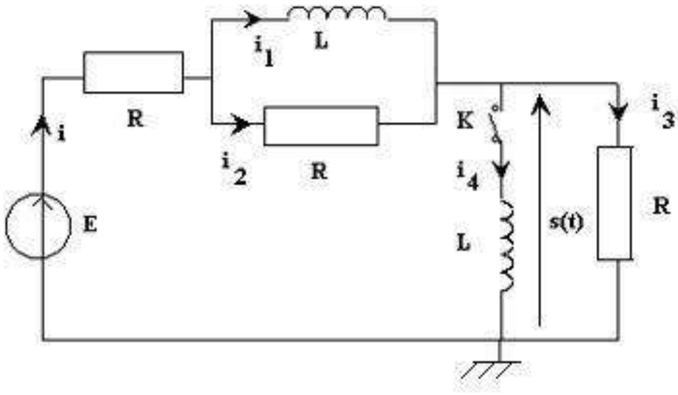
2) En déduire l'amplitude x_m des oscillations forcées en fonction de F_0, *m*, α , ω et ω_0.

3) φ représentant le déphasage entre la source d'excitation extérieure et la réponse de l'oscillateur, déterminer son expression en fonction de α , ω et ω_0.

4) Montrer qu'il peut y avoir résonance en amplitude des oscillations à une certaine condition sur le paramètre α à établir.

5) Proposer un phénomène électrique analogue.

Electricité (Agro-Véto 2004)



On considère maintenant le montage de la figure ci-contre où le générateur est un générateur idéal de tension continue de force électromotrice E, constante dans un premier temps. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant t = 0.

1) Déterminer les courants i_1, i_2, i_3 , i_4 et i et s à $t=0^+$.

2) Déterminer s et les courants i_1, i_2, i_3, i_4 et i quand t tend vers l'infini.

3) On montre que l'équation différentielle vérifiée par s peut se mettre sous la forme: $3\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{4}{\tau}\frac{ds}{dt}+\frac{1}{\tau^2}s=0$, en posant : $\tau=\frac{L}{R}$.
   - Déterminer la pulsation propre ainsi que le facteur de qualité de l'oscillateur.
   - En déduire la forme de s(t). *On ne demande pas de déterminer les constantes d'intégration.*
   - Tracer l'allure de s(t).

4) On remplace la source par une source sinusoïdal de tension e(t) = E cos(wt). On étudie le filtre associé à ce circuit, s(t) est la sortie.

   a) Comment se comporte le circuit à basses fréquences ?
   b) Comment se comporte le circuit à hautes fréquences ?
   c) En déduire la nature du filtre.
   d) Etablir l'expression du signal complexe $\underline{s}$ quand l'interrupteur est fermé.
   e) En déduire s(t).

Chimie (PSI 2012)

L'étude cinétique de la réaction suivante montre que la réaction admet un ordre vis-à-vis de chacun des réactifs.

$BrO_3^- + 5\ Br^- + 6\ H_3O^+ = 3\ Br_2 + 9\ H_2O$

On se propose de déterminer les ordres partiels de réaction ainsi que la constante de vitesse.
On notera respectivement a, b et c les ordres partiels des espèces BrO_3^-, Br^- et H_3O^+, et k la constante de vitesse de la réaction. On considérera que les ordres restent inchangés tout au long de la réaction.

1) Exprimer la vitesse volumique de la réaction en fonction des concentrations des espèces considérées, des ordres partiels et de la constante de vitesse.

Une première expérience est réalisée à 0°C à partir des concentrations initiales suivantes : $[BrO_3^-]0 = 1{,}0.10^{-3}$ mol.L^{-1} ; $[Br^-]0 = 1{,}4.\ 10^{-1}$ mol.L^{-1} ; $[H3O^+]0 = 1{,}0.\ 10^{-1}$ mol.L^{-1}
L'évolution de la concentration en ions bromate BrO_3^- (que l'on notera C par commodité) en fonction du temps est représentée sur la **figure 3 en annexe.**

2) Commenter les concentrations choisies pour réaliser cette expérience. Quelle approximation peut-on effectuer ? Sous quelle forme peut-on simplifier l'expression de la vitesse volumique de la réaction donnée à la question précédente ?

3) Définir et déterminer le temps de demi-réaction relatif aux ions bromate.

4) Etablir la relation reliant la concentration en ions bromate et le temps dans le cas où la réaction est d'ordre 1 par rapport aux ions bromate. Même question si la réaction est d'ordre 2 par rapport aux ions bromate.

5) En vous servant des **figures 4 et 5 en annexe**, en déduire l'ordre partiel de la réaction par rapport aux ions bromate. Justifier.

6) Plusieurs autres expériences ont été réalisées à 0°C pour une même concentration initiale en ions bromate [BrO3-]0 = $1{,}0.10^{-3}$ $mol.L^{-1}$ et pour des concentrations variables en ions bromure et oxonium. Dans chaque expérience, la vitesse initiale a été déterminée.
   Les *résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :*

Expériences	$[Br^-]_0$ ($mol.L^{-1}$)	$[H_3O^+]_0$ ($mol.L^{-1}$)	Vitesse initiale ($mol.L^{-1}.s^{-1}$)
N°1	0,10	0,10	$4{,}1.10^{-5}$
N°2	0,15	0,10	$6{,}2.10^{-5}$
N°3	0,10	0,20	$16{,}4.10^{-5}$

   Déterminer l'ordre partiel par rapport aux ions bromures et l'ordre partiel par rapport aux ions H_3O+.

7) Calculer la constante de vitesse k de la réaction. Préciser clairement son unité.

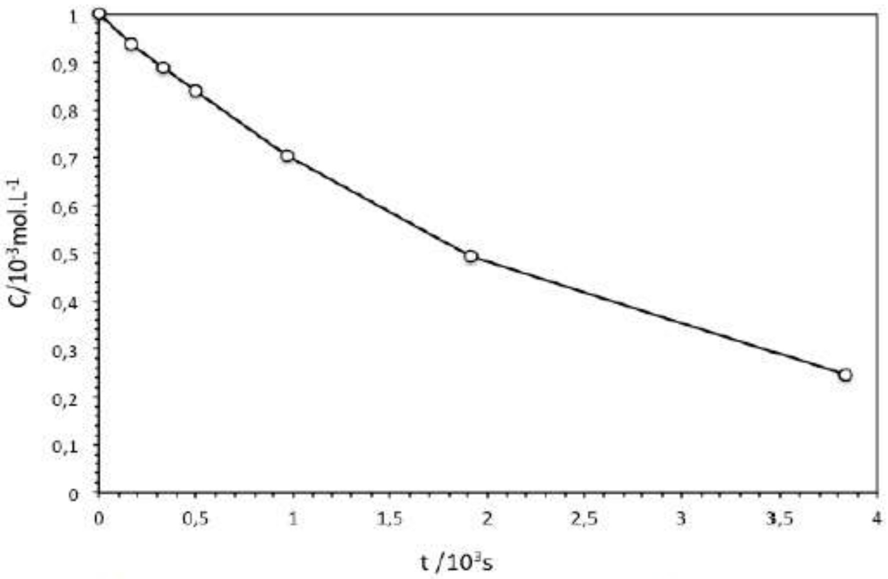


Figure 3 : Evolution de la concentration en ions bromate (mmol.L^{-1}) en fonction du temps (10^{3}s)

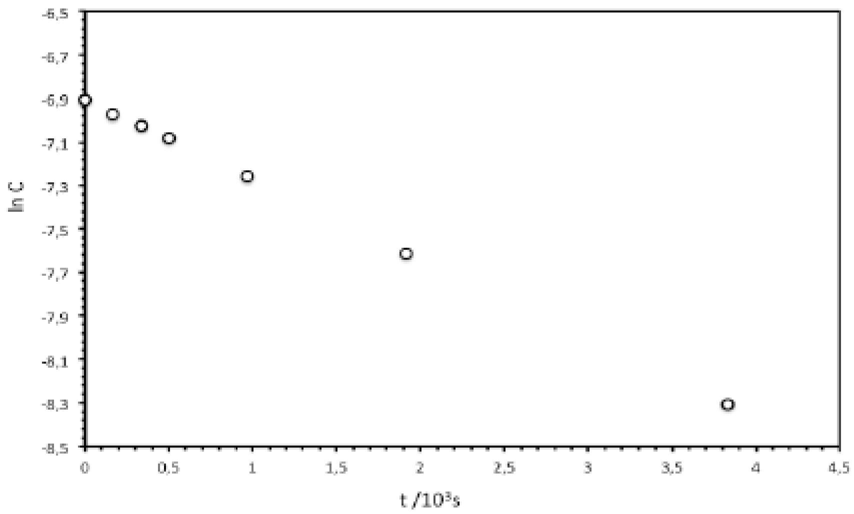


Figure 4 : Evolution du logarithme de la concentration en ions bromate en fonction du temps (10^{3}s).

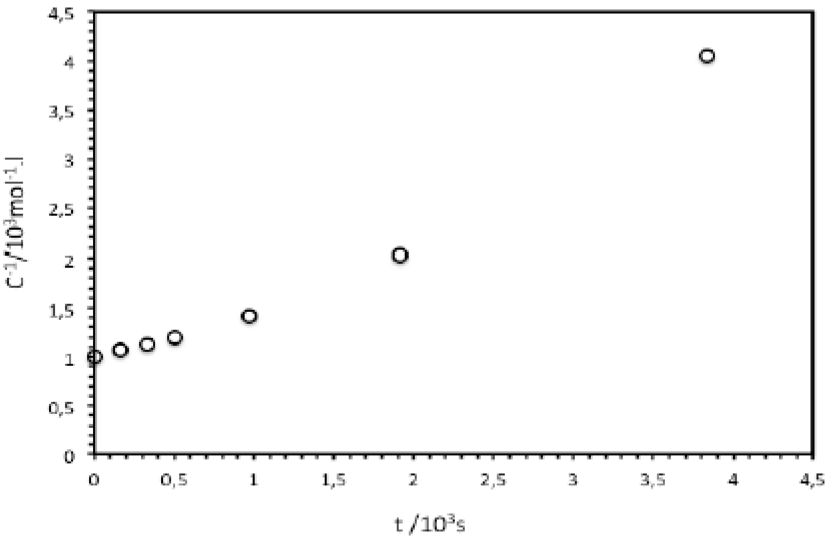


Figure 5 : Evolution de l'inverse de la concentration en ions bromate en fonction du temps (10^{3}s).