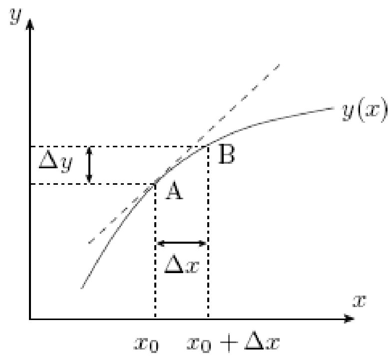
Variations et quantités élémentaires

I. Dérivée et différentielle

1) Fonction d'une seule variable

Soit une fonction $y : x \rightarrow y(x)$



Pour une variation arbitraire Δx de la variable x autour de la valeur x_0, on a une variation Δy telle que : $y(x_0+\Delta x) = y(x_0) + \Delta y$.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente la pente de la droite joignant $A(x_0 ; y_0)$ et $B(x_0 +\Delta x; y_0 +\Delta y)$. Lorsque Δx tend vers 0, le point B tend vers le point A et la droite reliant A à B tend vers la tangente à la courbe en x_0.

On définit la dérivée de la fonction y en x_0, $y'(x_0)$, par :

$$\boxed{y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Le nombre $y'(x_0)$ représente donc la pente de la tangente (en pointillé sur le dessin) en x_0.

Autre notation : $\boxed{y'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}}$ où dy et dx sont appelées les **différentielles** respectivement de y et de x.

Lorsque x varie de façon infinitésimale autour de x_0 d'une quantité dx, y varie de façon infinitésimale autour de y_0 d'une quantité dy telle que : $dy = y'(x_0)\, dx$.

2) Fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction de plusieurs variables : $f(x_1, ..., x_n)$.

Pour exprimer la quantité infinitésimale df, on s'intéresse à l'influence de chacune des variables sur f lorsque les autres sont gardées constantes.

La **dérivée partielle** d'une fonction est la dérivée par rapport à l'une de ces variables, les autres étant donc gardées constantes.
La dérivée partielle par rapport à la variable x_1 est notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2,\dots,x_n}$, où ∂ est appelé d rond, symbole de la dérivation partielle et où apparaissent en indice les variables maintenues constantes.

Si f est une fonction de x_1, ..., x_n et dx_1, ..., dx_n sont les différentielles de x_1, ..., x_n respectivement, alors la différentielle de f est :

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2,\dots,x_n} dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3\dots,x_n} dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{x_1,\dots,x_{n-1}} dx_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j\neq i}} dx_i\right)}$$

II. <u>Infiniment petit et variations</u>

- **Notation Δx :**

Elle représente la variation de la grandeur x, cette variation étant quelconque (pas nécessairement petite).

Exemple : distance entre 2 points.

- **Notation dx :**

Elle représente comme on l'a vu précédemment la variation infinitésimale ou variation élémentaire de la grandeur x. En math, on parle de différentielle.

Exemple : la vitesse instantanée d'un point mobile sur un axe (Ox) est v = dx/dt.

- **Notation δx :**

Elle représente une quantité infinitésimale ou quantité élémentaire.
Exemple : travail élémentaire δW.

Une quantité élémentaire peut dans certains cas être interprétée comme une variation élémentaire.
Exemple : une durée élémentaire δt peut également être décrite comme une variation élémentaire de la date t.

Mais ce n'est pas toujours le cas !!!

Exemple : En mécanique et en thermodynamique, on étudie les échanges d'énergie. Ces échanges sont de deux formes : par chaleur ou par travail. L'énergie est une quantité définie pour un état du système et qui varie lors d'une transformation alors que chaleur et travail sont des grandeurs qui ne sont définies que lors d'une transformation. On peut parler de variation d'énergie mais surtout pas de variation de travail ou de chaleur : les notations dW et dQ sont à proscrire !!!! Chaleur et travail sont des variations d'énergie.

- En physique on assimile souvent une petite variation à une variation infinitésimale ainsi qu'une petite quantité à une quantité élémentaire.

- Sommer les variations élémentaires dx d'une grandeur x entre deux états A et B revient à calculer la variation totale Δx entre A et B : $\boxed{\underset{A\to B}{\Delta} x = x_B - x_A = \int_A^B dx}$.

- Cette même opération sur une quantité élémentaire revient à calculer une quantité lors d'une transformation entre deux états A et B : $\boxed{\int_A^B \delta x = x_{A\to B}}$, comme pour le travail.