

Principes de la dynamique newtonienne

15

Dans le chapitre de cinématique du point, on ne s'est intéressé qu'à l'analyse du mouvement et à la description des liens entre les divers vecteurs décrivant ce dernier (position, vitesse et accélération). On n'a jamais cherché à en déterminer les causes. C'est ce point qui va être envisagé ici. Cela conduit à introduire la notion de force ainsi qu'à énoncer les trois lois de Newton. Avant cela, il est nécessaire de définir les éléments cinétiques du système.

1 Éléments cinétiques d'un point matériel

1.1 Masse

D'un point de vue cinématique, un point matériel est décrit à l'aide des vecteurs position, vitesse et accélération. Cependant quelques exemples de la vie courante mettent en évidence que le comportement d'un corps ne dépend pas uniquement de ces paramètres cinématiques. Ainsi un joueur de ping-pong sera dans l'impossibilité de renvoyer la balle si celle-ci est remplacée par une boule de billard. De même, si un enfant joue avec des boules de pétanque, il ne pourra pas lancer celles-ci très loin. Il est donc nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité du corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Cette propriété s'appelle l'**inertie** du système.

La grandeur introduite est fondamentale au niveau dynamique et s'appelle **masse inerte** ou **masse inertielle** du corps. Il s'agit d'un scalaire positif qui est d'autant plus grand que le corps s'oppose au mouvement. Son unité légale est le kilogramme, de symbole kg. On constate expérimentalement que cette grandeur est proportionnelle à la quantité de matière composant le corps. C'est une grandeur additive, c'est-à-dire que la masse de l'ensemble formé par deux corps est égale à la somme des masses de chacun d'entre eux.

La mesure de cette grandeur s'obtient en pratique à l'aide d'une balance en utilisant la mesure du poids du corps : $\vec{P} = m\vec{g}$ où m est alors la **masse pesante**. Plusieurs problèmes apparaissent avec cette méthode. Tout d'abord, le champ de pesanteur \vec{g} varie à la surface de la Terre. Il est donc *a priori* nécessaire d'effectuer des réglages à chaque déplacement de la

balance grâce à une référence. Le deuxième point est l'hypothèse selon laquelle masse inertielle et masse pesante (celle qui apparaît dans l'expression du poids) ne sont qu'une seule et même grandeur. Cette égalité, posée en principe appelé « principe d'équivalence » est vérifiée expérimentalement avec une précision relative de 10^{-12} . Par conséquent, on ne fera pas de différence entre masse inerte et masse pesante.

Remarque

La référence universelle de masse est un étalon cylindrique de platine iridié conservé au Pavillon de Breteuil au sein du *Bureau International des Poids et Mesures*. À l'heure actuelle, la masse est la dernière grandeur dont l'unité est définie par un étalon.

Les premières expériences pour établir l'équivalence entre masse inertielle m_i et masse gravitationnelle m_g sont dues à Galilée. Cette équivalence a été confirmée par différentes expériences. En 1890, le hongrois L. von Eötvös a obtenu une précision relative de 10^{-6} à l'aide d'une adaptation de la balance de H. Cavendish. Dans les années 1960, R. H. Dicke et V. B. Brazinsky ont obtenu une précision relative de 10^{-12} avec une méthode basée sur l'étude de l'accélération du Soleil.

La grandeur qui mesure la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement est sa masse mesurée en kg. La masse est un scalaire d'autant plus grand que le corps est inerte. C'est une grandeur extensive (additive) et intrinsèque (liée uniquement au corps considéré).

1.2 Quantité de mouvement

a) Quantité de mouvement d'un point matériel

La **quantité de mouvement** est une grandeur introduite par Isaac Newton pour formuler les lois de la mécanique portant son nom. Elle est définie par le vecteur :

$$\vec{p} = m \vec{v},$$

pour un point M de masse m et de vecteur vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Contrairement à la masse, cette quantité dépend du référentiel dans lequel on travaille puisqu'elle est fonction de la vitesse dans ce référentiel.

b) Quantité de mouvement d'un système de points matériel

Lorsque le système est constitué de plusieurs points matériels, on peut définir sa quantité de mouvement comme la somme des quantités de mouvement de chacun des points qui le constituent. Pour fixer les idées, on se place dans le cas où le système est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 et de vitesses respectives \vec{v}_1 et \vec{v}_2 dans le référentiel \mathcal{R} . La quantité de mouvement \vec{p} du système est définie comme la somme des quantités de mouvement de chacun des deux points :

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

La position du centre de gravité G du système de point est définie par la relation barycentrique

$$(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2,$$

d'où l'on déduit en dérivant terme à terme :

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{OG}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{OM}_2}{dt} \iff (m_1 + m_2) \vec{v}_G = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

En posant $m = m_1 + m_2$ la masse du système, la quantité de mouvement du système est ainsi égale à la quantité de mouvement de son centre de gravité G affecté de la masse totale m et animé de la vitesse \vec{v}_G :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G.$$

Il s'agit d'un résultat général, qui reste vrai pour un système constitué de plus de deux points matériels et par exemple pour un solide de masse m . On peut alors revenir sur notre définition initiale du point matériel en mécanique : on peut assimiler un solide à un point matériel s'il suffit d'étudier le mouvement de son centre de gravité pour comprendre son mouvement.

2 Les trois lois de Newton

Ces trois lois constituent les fondements de la mécanique classique.

2.1 Première loi de Newton : Principe d'inertie

a) Point matériel isolé

Un point matériel est **isolé** s'il n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur.

Il s'agit d'un cas limite utilisé en mécanique. En pratique, un point matériel est considéré comme isolé lorsque l'on peut négliger les forces auxquelles il est soumis.

Exemple

Les sondes Pioneer 10 et 11 et Voyager 1 et 2 qui se dirigent vers les confins du système solaire sont approximativement des systèmes isolés.

b) Énoncé du principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** dans lesquels **tout** point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le principe d'inertie formule l'existence de référentiels particuliers, les référentiels galiléens, dont il fournit une définition à partir du mouvement des points matériels isolés. On constate la différence essentielle apportée par la dynamique vis-à-vis de la cinématique : les référentiels ne jouent plus tous le même rôle.

Cependant, si l'on considère deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, tout point matériel animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R}_1 sera également en translation rectiligne et uniforme par rapport à \mathcal{R}_2 . Lorsque l'un est galiléen alors l'autre l'est également.

Les **référentiels galiléens** sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

c) Détermination pratique d'un référentiel galiléen

Tout comme la notion de point isolé, à partir de laquelle elle est définie, la notion de référentiel galiléen est un cas limite. En pratique, on utilise principalement trois référentiels en fonction de la durée du phénomène étudié :

- le **référentiel terrestre** ou **référentiel du laboratoire** est lié à la Terre. Son origine est située au point de la surface du globe où se déroule l'expérience et ses axes sont fixes par rapport à la Terre. Il est considéré comme galiléen lorsque l'on peut négliger la rotation de la Terre autour de l'axe des ses pôles. Il est adapté à l'étude des mouvements se déroulant sur Terre et dont la durée est faible devant la durée d'un jour ;
- le **référentiel géocentrique** a son origine au centre de la Terre et des axes pointant vers des étoiles lointaines fixes. Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe de ses pôles. Il est considéré comme galiléen lorsque l'on peut négliger le mouvement orbital de la Terre dont la durée caractéristique est un an. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites autour de la Terre ;
- le **référentiel héliocentrique** a son origine au centre du Soleil et des axes pointant vers des étoiles lointaines fixes. Il est considéré comme galiléen tant que l'on peut négliger le mouvement orbital du Soleil autour du centre de notre galaxie, la Voie lactée, dont la durée caractéristique est estimée à environ 230 millions d'années. Il est adapté à l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil.

2.2 Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . À l'instant t , on note \overrightarrow{OM} , \vec{v} , $\vec{p} = m\vec{v}$ et \vec{a} les vecteurs position, vitesse, quantité de mouvement et accélération de M dans \mathcal{R} . On s'intéresse aux causes des mouvements et/ou de leur modification, c'est-à-dire aux interactions mécaniques entre le système et le milieu extérieur.

a) Notion de force

Un système peut être mis en mouvement ou, s'il est déjà en mouvement, ce dernier peut être modifié. Les causes de cette « modification » doivent être recherchées dans ses interactions avec l'extérieur. Cela conduit à définir la notion de forces.

Une **force** est une grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement ou une déformation du système.

La force est décrite par un vecteur ; le caractère vectoriel de la force apparaît dans des expériences simples. Par exemple, lorsque l'on tire sur un ressort, on constate que ce dernier s'allonge le long d'une direction et dans un sens qui sont ceux de l'effort ou de la force qu'on exerce sur lui. Son allongement est d'autant plus grand que la force est importante. Trois paramètres : direction, sens et intensité interviennent pour déterminer l'action exercée sur

le ressort. Un vecteur défini par ces trois mêmes paramètres décrit la force. Il faudra donc donner la direction, le sens et la norme d'une force pour la connaître parfaitement.

On distingue deux grandes catégories de forces : les forces à distance et les forces de contact. On abordera plus tard en détail ces deux types d'interactions.

b) Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Ayant admis l'existence d'un référentiel galiléen et de forces caractérisant les interactions du système avec l'extérieur, on se place dans ce référentiel et on modélise les effets des forces extérieures sur le système.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système. Mathématiquement, cela se traduit par la relation :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i. \quad (15.1)$$

Interprétation Ce principe relie la dérivée d'un terme cinétique, le vecteur quantité de mouvement, à un terme dynamique, la somme des forces extérieures traduisant les interactions subies par le point matériel. Cette relation peut être utilisée dans les deux sens :

- obtenir la description cinématique du mouvement connaissant les forces subies par le point matériel,
- déterminer la somme des forces s'exerçant sur le point matériel à partir de la connaissance du mouvement.

Remarque

Le principe fondamental de la dynamique est également appelé « relation fondamentale de la dynamique » ou « théorème de la quantité de mouvement ».

La somme des forces extérieures est également appelée « résultante des forces ».

c) Première conséquence : cas des systèmes pseudo-isolés

Les systèmes **pseudo-isolés** sont définis comme les systèmes pour lesquels la somme des forces extérieures appliquées est nulle :

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{0} \quad \implies \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}.$$

Pour de tels systèmes, le principe fondamental de la dynamique montre que la quantité de mouvement \vec{p} , et donc la vitesse \vec{v} , sont constantes au cours du temps. Ces systèmes sont animés d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Ceci explique leur dénomination : tout se passe comme s'ils étaient isolés.

d) Cas particulier d'un système à masse constante :

Dans ce cas, il est possible de « sortir » la masse de la dérivée de la quantité de mouvement

puisque'il s'agit d'une constante : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors sous la forme :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i.$$

Remarque

Il faut se méfier de cette formulation qui ne s'applique qu'aux systèmes de masse constante. Le cas d'une fusée qui consomme du carburant et voit sa masse diminuer ou encore celui d'une goutte d'eau qui tombe dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau et grossit au cours du mouvement ne peuvent pas être traités avec cette relation. Il est donc fortement conseillé de retenir le principe fondamental de la dynamique sous la forme générale de l'équation (15.1).

e) Cas particulier d'un système à l'équilibre :

La quantité de mouvement des systèmes à l'équilibre est nulle à tout instant :

$$\vec{p} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}.$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{0},$$

que l'on appelle parfois principe fondamental de la statique.

2.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

a) Énoncé du principe des actions réciproques

Ce principe, qui constitue la troisième loi de Newton, est également appelé « principe de l'action et de la réaction ».

Si le milieu extérieur exerce la force $\vec{f}_{ext \rightarrow M}$ sur M , alors M exerce la force $\vec{f}_{M \rightarrow ext}$ sur le milieu extérieur telle que $\vec{f}_{M \rightarrow ext} = -\vec{f}_{ext \rightarrow M}$. Les actions de M sur l'extérieur et de l'extérieur sur M sont opposées donc de même norme et de sens différents.

Exemple

Lorsque l'on réalise un coup au tennis, les cordes de la raquette appliquent une force sur la balle pour la mettre en mouvement. Par réaction, la balle applique une force sur les cordes. À la longue, ces forces provoquent l'usure des cordes qui finissent par casser.

b) Cas de l'interaction avec un milieu extérieur réduit à un point

Si le système et le milieu extérieur avec lequel a lieu l'interaction sont tous deux ponctuels et nommés M et M_{ext} , les forces $\overrightarrow{f_{M \rightarrow ext}}$ et $\overrightarrow{f_{ext \rightarrow M}}$ s'exercent de plus sur la même droite d'action qui relie les deux points (MM_{ext}). En effet, dans ce cas, le problème présente une symétrie d'axe (MM_{ext}). Les forces doivent présenter la même symétrie en vertu du principe de Curie¹. Elles sont donc portées par le même axe.

3 Limite de validité de la mécanique classique

3.1 Qu'est-ce qu'un principe ?

Les trois lois de Newton constituent la base de la dynamique newtonienne et de la mécanique classique. Il s'agit de principes au sens où ces lois sont postulées et non démontrées théoriquement. Elles sont considérées comme valables tant que l'expérience ne les a pas contredit. Ce sont les écarts entre certaines observations expérimentales et les prédictions théoriques issues des principes de Newton, qui ont conduit à l'édification des théories de la mécanique quantique et de la mécanique relativiste, en posant des principes différents de ceux de I. Newton. Pour les problèmes envisagés ici, ceux-ci sont bien évidemment valables mais on va détailler les limites de validité de ces principes.

3.2 Les hypothèses de la mécanique classique

Les hypothèses de la mécanique ne sont pas souvent formulées car elles paraissent évidentes. Cependant, la physique moderne limite la portée de la mécanique classique en remettant en cause ces évidences. Il n'est donc pas inutile de les énoncer :

- le temps est universel, il ne dépend pas de l'observateur ;
- l'espace est euclidien ;
- le comportement des systèmes mécaniques est déterministe : deux objets identiques placés dans des conditions identiques (mêmes conditions initiales et forces appliquées identiques) suivent un mouvement identique ;
- l'espace et le temps sont des grandeurs continues.

3.3 Les limites de la mécanique classique

À la fin du XIX^e siècle, certaines observations ne sont pas explicables par la théorie classique. Au début du XX^e siècle, de nouvelles théories voient le jour. Ces nouvelles théories ne remettent pas en cause les résultats de la mécanique classique mais elles en fixent les limites de validité et la complètent.

- La théorie classique est valide tant que le système ne va pas trop vite. Pour quantifier la notion de « trop vite », on compare la vitesse v du système à celle de la lumière c . Si $v \ll c$, la théorie classique est valide. Sinon, il faut tenir compte de la théorie de la relativité restreinte énoncée par A. Einstein en 1905. Le temps perd son caractère absolu, il devient relatif et dépend du référentiel dans lequel on réalise l'étude.
- La théorie classique est valide tant que l'on n'est pas trop proche d'un objet massif. Pour

1. Ce principe stipule que les effets présentent au minimum les mêmes symétries que les causes.

quantifier la notion de « trop proche », on compare la distance R séparant le système et l'objet massif à une distance caractéristique R_S appelée rayon de Schwartzchild². Si $R \gg R_S$, la théorie classique s'applique. Sinon, il faut tenir compte de la relativité générale énoncée par A. Einstein en 1916. L'espace perd son caractère euclidien, il peut être courbé par une très grande masse (étoile massive, trou noir).

- La théorie classique est valide pour des objets de taille suffisante. Pour quantifier la notion de « taille suffisante », on compare la taille l du système à la longueur d'onde de de Broglie λ définie dans le chapitre *Introduction au monde quantique*. Si $l \gg \lambda$, la théorie classique s'applique. Sinon, il faut tenir compte de la théorie de la mécanique quantique énoncée par N. Bohr, L. de Broglie, P. Dirac, A. Einstein, W.K. Heisenberg, M. Planck, E. Schrodinger et bien d'autres dans la première moitié du XX^e siècle. Le déterminisme classique doit être abandonné au profit d'une approche probabiliste.

4 Premières applications : détermination d'une loi de force

On a vu dans le chapitre de cinématique, qu'on est capable d'observer le mouvement d'un point et de déterminer son accélération. À partir de là, le principe fondamental de la dynamique va nous permettre de déterminer l'expression des forces usuelles.

4.1 Détermination dynamique d'une force : mesure de g

Lors de l'étude cinématique du mouvement, on a observé, dans le référentiel terrestre, le mouvement d'un corps de masse $m = (50 \pm 1)\text{g}$ soumis à la pesanteur terrestre. On a trouvé que l'accélération était verticale, dirigée vers le bas et de norme :

$$a = (10,1 \pm 0,4)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Les incertitudes sur les valeurs ci-dessus sont à prendre au sens d'incertitudes élargies à un niveau de confiance identique de 95%. On suppose que le référentiel terrestre est galiléen et qu'on peut négliger toutes les forces autres que le poids. Le système est soumis uniquement à son poids \vec{P} et en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique, on trouve :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g},$$

qui correspond à un mouvement à accélération constante. On en déduit que l'accélération de la pesanteur \vec{g} est verticale, dirigée vers le bas et de norme $g = a$. On trouve l'incertitude sur le poids $P = mg$ en sommant les incertitudes relatives sur m et sur g :

$$\frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{50}\right)^2 + \left(\frac{0,4}{10,1}\right)^2} = 5\%.$$

On en déduit que la norme du poids qui s'applique sur le système est, avec un niveau de confiance de 95% :

$$P = mg = (0,505 \pm 0,025)\text{N}.$$

2. Le rayon de Schwartzchild d'un corps céleste de masse M est défini par la relation $R_S = 2\mathcal{G}M/c^2$ où $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Remarque

Cette démarche permet à I. Newton de déterminer l'expression de la force d'attraction gravitationnelle en déterminant l'accélération des planètes autour du Soleil grâce aux observations de J. Kepler.

4.2 Détermination statique d'une force

Une fois que l'on connaît une force (par exemple le poids), on peut déterminer les autres forces par comparaison. C'est la méthode de mesure statique qui permet, à partir de situations d'équilibre, de déterminer des égalités de forces.

Pour clarifier le problème, on étudie la situation suivante : on attache un ressort à un support et on le laisse évoluer vers un état d'équilibre. Dans un premier temps, l'extrémité libre est laissée à vide et on mesure une longueur à vide l_0 . Dans un deuxième temps, on accroche une masse connue m à son extrémité libre et on mesure une longueur à l'équilibre l_{eq} . Lorsque la masse est à l'équilibre dans le référentiel terrestre, son accélération est nulle. Or elle est soumise à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- la force de rappel exercée par le ressort \vec{T}_{eq} .

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T}_{\text{eq}} \Leftrightarrow \vec{T}_{\text{eq}} = -m\vec{g}.$$

En faisant varier la masse m suspendue au ressort, on observe alors que plus m est grand, plus le ressort est étiré à l'équilibre. On dispose ainsi d'une méthode qui permet d'étudier le lien entre la force exercée par le ressort \vec{T}_{eq} et son allongement $\Delta l = l_{\text{eq}} - l_0$. On peut alors montrer que la force exercée par le ressort est proportionnelle à son allongement (voir paragraphe 5.3).

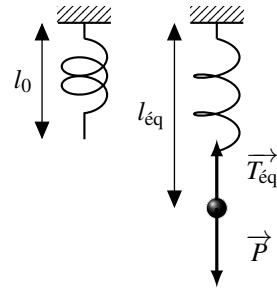


Figure 15.1 – Allongement d'un ressort auquel on suspend une masse.

Remarque

La mesure de force en statique est actuellement utilisée pour mesurer des forces à l'aide d'un dynamomètre. Historiquement, ce type de démarche permet à H. Cavendish de déterminer la valeur de la constante de gravitation \mathcal{G} par comparaison avec la force connue exercée par un pendule de torsion.

5 Classification des forces

En mécanique, au niveau macroscopique, on observe deux grands types de forces : les **forces de contact** et les **forces à distances**. Dans cette partie, on va décrire les forces usuelles que le milieu extérieur peut exercer sur le système étudié. Toutes ces forces sont des modèles traduisant au niveau macroscopique les effets de quatre **interactions fondamentales** que l'on va très brièvement présenter.

5.1 Les quatre interactions fondamentales

Interaction	Particules concernées	Portée	Principale manifestation
Forte	quarks et dérivés	$\simeq 10^{-15}$ m	cohésion des noyaux
Faible	constituants des noyaux	$\simeq 10^{-18}$ m	radioactivité β
Electromagnétique	particules chargées	infinie	existence des atomes réactions chimiques
Gravitationnelle	particules massiques	infinie	existence et trajectoires des astres, des planètes

Tableau 15.1 – Les interactions fondamentales et leurs principales manifestations.

Au niveau des particules élémentaires de la matière, les interactions sont au nombre de quatre. Le tableau 15.1 les décrit très brièvement. Pour lire ce tableau, on rappelle que les particules dérivées des quarks les plus connues sont les protons et les neutrons (les électrons et les neutrinos font partie de la famille des leptons). Par ailleurs, l'interaction faible est dénommée ainsi car elle est 10^5 fois plus faible que l'interaction forte.

Remarque

Le souhait d'obtenir une théorie unique pour rendre compte de l'ensemble de ces quatre interactions est très ancien. Dans les années 1960, S.H. Glashow, A. Salam et S. Weinberg (prix Nobel en 1979) ont proposé un modèle électrofaible unifiant les interactions faible et électromagnétique. Cette théorie a été vérifiée expérimentalement en 1983. À ce jour, aucune théorie unificatrice n'a été établie malgré de nombreuses recherches.

Les interactions forte et faible sont négligeables au niveau macroscopique. Dans la suite, on n'en tiendra pas compte puisqu'on se placera à cette échelle. Il suffit ici de savoir que ces interactions existent et permettent d'expliquer des phénomènes du noyau incompréhensibles à l'aide des interactions électromagnétique et gravitationnelle.

5.2 Forces à distance

Ces forces s'appliquent sans qu'il y ait de contact entre le milieu extérieur et le système.

a) Force gravitationnelle

Cette force s'applique au centre de gravité G du système de masse m situé dans un champ gravitationnel \vec{g}_{gravi} créé en M par le milieu extérieur. On se restreint au cas le plus simple où le champ gravitationnel est créé par une masse ponctuelle m_p placée en P et où le système est réduit à un point $M = G$.

La force gravitationnelle entre deux masses m_p et m placées en P et M est :

- attractive,
- de norme proportionnelle à m et m_p , ainsi qu'à l'inverse du carré de la distance PM .

Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = -\vec{F}_{M \rightarrow P} = -\mathcal{G} m_p m \frac{\vec{PM}}{PM^3} = -\frac{\mathcal{G} m_p m}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

où \vec{u}_{PM} est le vecteur unitaire dirigé de P vers M et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle**.

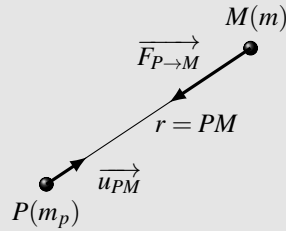


Figure 15.2 – Force gravitationnelle entre deux masses m_p et m placées en P et M .

Remarque

On peut aussi écrire $\vec{F}_{P \rightarrow M} = m \left(-\frac{\mathcal{G} m_p}{PM^2} \vec{u}_{PM} \right) = m \vec{g}_{\text{gravi}}$ en introduisant le champ gravitationnel créé en M par la masse m_p placée en P : $\vec{g}_{\text{gravi}} = -\frac{\mathcal{G} m_p}{PM^2} \vec{u}_{PM}$. Cette notation présente l'avantage de séparer ce qui dépend de la masse m de ce qui dépend du milieu extérieur. De ce fait le champ gravitationnel \vec{g}_{gravi} existe en M même si la masse m n'est pas présente au point M . Cela permet de généraliser au cas où le milieu extérieur est plus compliqué qu'une masse ponctuelle placée en P . Le champ gravitationnel a alors une expression différente.

b) Le poids

Lorsqu'on étudie des mouvements dans le référentiel terrestre, on tient compte d'une force à distance appelée le **poids**. Cette force est définie dans le référentiel terrestre local comme la force exercée sur un système de masse m par la Terre. Elle s'applique au centre de gravité du système de masse m lorsqu'on étudie son mouvement au voisinage de la Terre dans le référentiel terrestre. La verticale est définie par la direction du poids : pour la repérer, on utilise un fil à plomb qui se place verticalement à l'équilibre. Le poids est vertical, dirigé vers le bas et de norme mg .

La force de pesanteur terrestre exercée sur un système de masse m au voisinage de la Terre s'applique au centre de gravité du système et vaut :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

où \vec{g} est l'accélération de la pesanteur, verticale vers le bas. $\|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Modélisation du poids Dans ce qui suit, on se restreint au cas le plus simple où le système est réduit à un point matériel M de masse m qui coïncide alors avec son centre de gravité. En admettant que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur M est la même que si

toute la masse de la Terre était concentrée en son centre P , la force gravitationnelle exercée par la Terre est alors $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow M} = m \vec{g}_{\text{gravi, Terre}} \simeq m \left(-\frac{\mathcal{G} m_{\text{Terre}}}{R_T^2} \vec{u}_{PM} \right)$ au voisinage du sol. En

gardant trois chiffres significatifs pour :

- $R_T = 6371 \text{ km} \simeq 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, le rayon terrestre moyen ;
- $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, la constante gravitationnelle ;
- $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, la masse de la Terre,

on trouve $\|\vec{g}_{\text{gravi, Terre}}\| = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ce modèle explique le champ de pesanteur avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} .



En référentiel terrestre, on tient compte du poids qui inclue l'attraction gravitationnelle terrestre. Il ne faut jamais compter les deux forces en même temps.

Remarque

Pour modéliser l'accélération de la pesanteur g avec une précision relative supérieure 10^{-3} , il faut tenir compte de la rotation de la Terre sur elle-même autour de son axe Nord-Sud en 1 jour qui a deux effets d'intensité comparable. En premier lieu, la rotation entraîne un aplatissement de la Terre au niveau des pôles. L'aplatissement est de 21 km : son rayon équatorial vaut 6378 km et son rayon polaire 6357 km. En second lieu, la rotation provoque l'apparition d'une « force centrifuge » que l'on doit ajouter vectoriellement à la force gravitationnelle. Au final, g varie en fonction de la latitude λ selon une formule adoptée en 1967 par l'*Union Géodésique et Géophysique Internationale* :

$$g = g_0 (1 + k_1 \sin^2(\lambda) + k_2 \sin^2(2\lambda))$$

avec $g_0 = 9,780318 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $k_1 = 5,3024 \cdot 10^{-3}$, $k_2 = -5,8 \cdot 10^{-6}$.

Par ailleurs, g diminue de $3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ par mètre d'altitude .

c) Force électrostatique

Cette force s'applique au point matériel M de charge q placé dans un champ électrostatique \vec{E}_{ext} créé en M par le milieu extérieur. Elle est proportionnelle à la charge du point matériel M est s'annule lorsque le point M n'est pas chargé :

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}}$$

Cas de l'interaction coulombienne Dans le cas où le milieu extérieur est réduit à une charge ponctuelle, on parle d'**interaction coulombienne**.

La force coulombienne exercée par une charge q_p placée en P sur la charge q placée en M est :

- attractive si q et q_p sont de signes opposés ;
- répulsive si q et q_p sont de même signe ;
- de norme proportionnelle à q et q_p , ainsi qu'à l'inverse du carré de la distance PM .

Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

où \vec{u}_{PM} est le vecteur unitaire dirigé de P vers M et $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ la **permittivité du vide**.

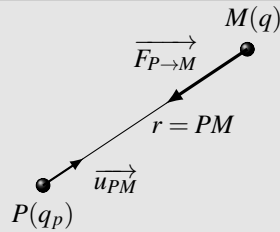


Figure 15.3 – Interaction coulombienne entre deux charges q_p et q placées en P et M . Sur le schéma, q_p et q sont de signes opposés.

Remarque

On peut aussi écrire $\vec{F}_{P \rightarrow M} = q \left(\frac{q_p}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM} \right) = q \vec{E}_{\text{ext}}$ en introduisant le champ électrique créé en M par la charge q_p placée en P : $\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{q_p}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$. Cette notation présente l'avantage de séparer ce qui dépend de la charge q de ce qui dépend du milieu extérieur. De ce fait le champ électrostatique \vec{E}_{ext} existe même si la charge q n'est pas présente au point M . On peut alors généraliser cette expression au cas où le milieu extérieur est plus compliqué qu'une charge ponctuelle placée en P . Le champ électrique a alors une expression différente qui sera donné.


d) Généralisation : force électromagnétique ou force de Lorentz

Cette force s'applique au point matériel M de charge q placé dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) créé par le milieu extérieur. Cette force généralise le cas précédent dans le cas où il y a à la fois un champ électrique et un champ magnétique. Elle fera l'objet d'une étude spécifique dans un prochain chapitre. À ce niveau du cours, les champs \vec{E} et \vec{B} seront donnés.

La force de Lorentz exercée sur un système M de charge q par le milieu extérieur s'écrit :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right),$$

où \vec{v} est la vitesse de M , \vec{E} le champ électrostatique créé en M , \vec{B} le champ magnétique créé en M .

 $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est le produit vectoriel de \vec{v} par \vec{B} défini dans l'appendice mathématique.

5.3 Forces de contact

Par opposition aux forces étudiées au paragraphe précédent qui avaient une action à distance, on s'intéresse maintenant aux actions qui n'existent que lors d'un contact entre systèmes.

a) Définition des forces de contact

Lorsqu'un point matériel n'est soumis qu'à des forces à distance, on dit qu'il est libre : sa trajectoire n'est pas astreinte à rester dans une zone plus ou moins confinée de l'espace. C'est le cas par exemple d'un corps qui tombe dans le champ de pesanteur en l'absence de tout frottement. On s'intéresse maintenant aux forces qui n'interviennent qu'en présence d'un contact du point matériel avec un solide ou un fluide. On aura alors essentiellement des forces de liaison et des forces de frottement.

Il n'existe pas de théorie permettant de déterminer les forces de contact à l'aide de considérations microscopiques que l'on pourrait étendre à l'échelle macroscopique. Tout ce qui va suivre ne sera donc qu'une approche phénoménologique, c'est-à-dire obtenue expérimentalement, et valable uniquement dans le même contexte.

b) Tension d'un fil

Un fil de masse négligeable prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu. Il exerce alors sur un objet accroché à une de ses extrémités une **tension** notée \vec{T} . La direction de cette force est celle du fil. Elle est toujours dirigée d'une extrémité du fil vers l'autre : un fil peut tirer un objet mais pas le repousser. La norme de la tension est *a priori* indéterminée, sa valeur dépend des autres forces. Dans le cas où le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

La force de tension exercée par un fil tendu sur un objet accroché à l'une de ses extrémités vaut :

$$\vec{T} = -T\vec{u}_{\text{ext}} \quad \text{où :}$$

- \vec{u}_{ext} est un vecteur unitaire parallèle au fil tendu, toujours orienté vers l'extérieur du fil,
- $T > 0$ est la norme de cette tension.

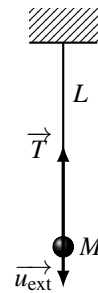


Figure 15.4
– Le point M accroché à un fil tendu subit la tension \vec{T} du fil.

c) Force de rappel élastique exercée par un ressort

Les ressorts envisagés sont supposés idéaux : on peut négliger leur masse devant celle du point M attaché à leur extrémité et, après une élongation ou une compression, ils reprennent leur forme et leur longueur initiales. La force qu'un ressort exerce sur un objet auquel il est accroché s'applique au point d'attache, le long du ressort, dans une direction opposée à son « allongement » (qui pourra être un réel allongement ou une compression) et son intensité est proportionnelle à l'allongement.

L'allongement $\Delta l = l - l_0$ est une grandeur algébrique :

- elle est positive si le ressort est étiré : $\Delta l = l - l_0 > 0$;
- elle est négative si le ressort est comprimé : $\Delta l = l - l_0 < 0$.

La force s'oppose à la déformation du ressort par rapport à sa forme au repos (c'est-à-dire sans déformation) : c'est une force de rappel.

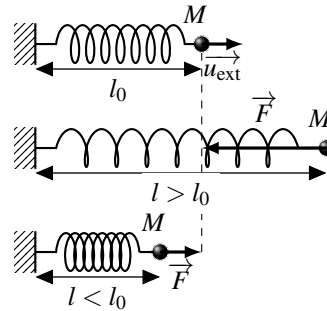


Figure 15.5 – Tension d'un ressort.

La force de rappel élastique vaut : $\vec{F} = -k\Delta l\vec{u}_{\text{ext}}$ où :

- \vec{u}_{ext} est un vecteur unitaire parallèle au ressort, orienté vers l'extérieur du ressort,
- $\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort en notant respectivement l et l_0 la longueur du ressort et sa longueur à l'origine,
- k est une constante de proportionnalité caractéristique du ressort utilisé et appelée **raideur du ressort**, exprimée en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ dans les unités du système international.

d) Action exercée par un support solide

Cette force s'applique au point matériel M de masse m en contact avec le milieu extérieur par un contact solide. Le point M peut être posé sur un support ou enfilé sur une tige.



Figure 15.6 – À gauche, la force \vec{f} est insuffisante pour mettre le solide en mouvement sur son support horizontal. Elle est compensée par les frottements solides \vec{R}_T . À droite, la force de poussée \vec{f} est plus grande et on a dépassé le seuil d'adhérence. Le solide glisse sur son support.

Exemple introductif On étudie un solide posé sur un plan horizontal que l'on pousse avec une force \vec{f} (figure 15.6). Lorsque la poussée est faible le solide ne se met pas en mouvement : la force de frottement solide l'empêche de se déplacer. Si l'on pousse plus fort, la force de frottement solide s'adapte et empêche le mouvement. Lorsque l'on pousse encore plus fort, on arrive à une force seuil au delà de laquelle le solide se met à glisser. On parle de seuil d'adhérence. Au delà de ce seuil, la force de frottement solide est constante et le solide glisse.

Paramétrisation de la force de contact On considère que le contact entre l'objet M et le support solide permet de définir un point de contact I et un plan de contact \mathcal{P} . On caractérise le plan de contact par son vecteur normal unitaire \vec{n} que l'on oriente du support vers l'objet.

On décompose alors la force de contact \vec{R} en deux :

$$\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N,$$

où les composantes tangentielle \vec{R}_T et normale \vec{R}_N de la force de contact ont les propriétés suivantes :

- \vec{R}_N est la réaction normale du support. Sa norme est indéterminée *a priori* et dépend des autres forces. Sa direction et son sens sont ceux de \vec{n} : elle s'oppose à la pénétration de l'objet dans le support. Elle est orientée du support vers le système.
- \vec{R}_T est la réaction tangentielle du support. Elle appartient au plan de contact. Elle correspond à une force de frottement solide entre les surfaces en contact. Comme toute force de frottement, elle s'oppose au mouvement.

Pour déterminer la composante normale de la force, on utilise le principe fondamental de la dynamique en projection sur \vec{n} . Quant aux forces de frottement, elles seront données si nécessaire.



Les forces de frottement dépendent de la nature des matériaux et de l'état de rugosité des surfaces. Lorsqu'il n'y a pas de frottements, la force de contact est réduite à \vec{R}_N . Elle est donc perpendiculaire au support.

Remarque

La force de contact est une force de liaison entre le mobile et le support. Pour un anneau enfilé sur une tige par exemple, c'est elle qui guide le mobile le long de la tige. Pour un mobile se déplaçant sur un plan horizontal, c'est elle qui assure la planéité du mouvement en s'opposant aux autres forces verticales telles que le poids.



Lorsque l'on cherche à montrer que le contact est rompu entre le système et son support, on peut déterminer la **rupture de contact** par le fait que $\vec{R} = \vec{0}$.

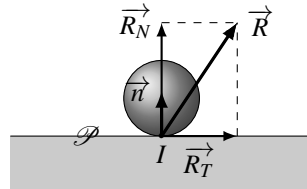


Figure 15.7 – Force de contact entre un système et un support. Le point de contact I , le plan de contact \mathcal{P} et sa normale \vec{n} sont représentés, ainsi que la force de contact $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$.

e) Action exercée par un fluide

Il existe principalement trois forces exercées par un fluide sur un solide plongé dans ce fluide : **la poussée d'Archimède, la force de traînée, la force de portance**. Ces forces sont toutes dues au contact du fluide environnant sur le corps immergé. La poussée d'Archimède, qui s'exerce sur les solides plongés dans un fluide, existe même si le solide est au repos par rapport au fluide. Les forces de traînée et de portance n'existent que lorsque le solide est en mouvement par rapport au fluide. Elles dépendent de la vitesse relative \vec{v} du solide par rapport au fluide.

La poussée d'Archimède Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement ou partiellement immergé dans celui-ci, subit une force appelée « poussée d'Archimède ». Cette force verticale, dirigée de bas en haut est de norme égale au poids du volume de fluide déplacé. En posant $V_{\text{immergé}}$, le volume du corps immergé dans le fluide de masse volumique ρ_{fluide} , elle s'exprime alors :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}.$$

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression qui agissent sur le corps immergé.

Si système est entièrement immergé, le volume immergé $V_{\text{immergé}}$ est égal au volume V du corps. Il est alors souvent intéressant d'exprimer la poussée d'Archimède en fonction du poids du système.

Pour cela, on exprime le volume $V_{\text{immergé}}$ en fonction de la masse volumique moyenne ρ du système :

$$V_{\text{immergé}} = V = \frac{m}{\rho} \implies \vec{\Pi} = -\frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho} m \vec{g}.$$

On peut alors sommer le poids et la poussée d'Archimède pour obtenir :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = m \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho} \right) \vec{g} = m \vec{g}'$$

avec $\vec{g}' = \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho} \right) \vec{g}$ la gravité réduite dans le fluide.

On peut alors tenir compte du poids et de la poussée d'Archimède en remplaçant \vec{g} par \vec{g}' . Pour un solide plein plongé dans l'eau, la masse volumique du fluide vaut $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et celle du système est comprise entre 10^3 et $10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ d'où $\vec{g}' \neq \vec{g}$. La poussée d'Archimède est importante.

Exemple

Le corps humain étant essentiellement constitué d'eau, sa masse volumique est voisine de $10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Plongé dans l'eau, on ressent une gravité réduite quasiment nulle, c'est-à-dire un état d'apesanteur.

Pour un solide plein plongé dans l'air, la masse volumique du fluide vaut $\rho_{\text{air}} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et celle du système est comprise entre 10^3 et $10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ d'où $\vec{g}' \simeq \vec{g}$. La poussée d'Archimède est négligeable.

Exemple

Pour flotter dans l'air à l'aide de la poussée d'Archimède, il faut réussir à annuler \vec{g}' donc à obtenir une masse volumique moyenne ρ du système égale à la densité de l'air. Il faut donc éviter le solide pour obtenir un solide creux de grand volume et de faible masse. C'est le principe de fonctionnement des montgolfières et des dirigeables.

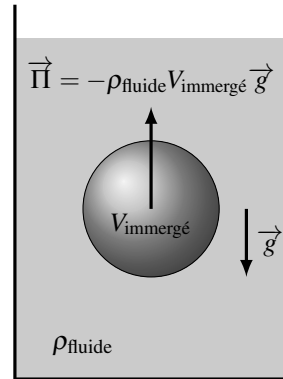


Figure 15.8 –
Poussée
d'Archimède.

Forces de traînée et de portance Un corps en mouvement relatif par rapport à un fluide subit des forces aérodynamiques (dans l'air) ou hydrodynamiques (dans l'eau) : la force de traînée et la force de portance.

- La traînée est opposée au mouvement du mobile par rapport au fluide. C'est la force principale contre laquelle on lutte quand on roule en vélo. Elle est d'autant plus grande que la vitesse relative est grande : plus on roule vite, plus il faut pédaler fort.
- La portance est perpendiculaire au mouvement du mobile par rapport au fluide. C'est grâce à elle que les avions volent.

La force de traînée exercée sur M par le milieu fluide environnant a pour expression :

- $\vec{f} = -k_1 \vec{v}$ avec $k_1 > 0$ à faible vitesse.
 k_1 est ici un **coefficient de frottement fluide** qui s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
- $\vec{f} = -k_2 \|\vec{v}\| \vec{v}$ avec $k_2 > 0$ à haute vitesse.
 k_2 est ici un **coefficient de frottement fluide** qui s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

Les coefficients de frottement k_1 et k_2 dépendent de l'écoulement autour du système. Ils sont déterminés expérimentalement parfois à l'aide d'essais en soufflerie. On peut aussi les évaluer grâce à des simulations numériques. *A priori*, dans les gaz, les frottements sont proportionnels au carré de la vitesse. Dans les liquides, on peut assez souvent utiliser des frottements proportionnels à la vitesse. Dans le doute, on peut toujours essayer un modèle avec des frottements proportionnels à la vitesse qui a l'avantage d'être linéaire. Si les résultats obtenus par ce modèle linéaire ne sont pas satisfaisants, on doit utiliser la deuxième forme. Dans ce cas, il faut souvent envisager une résolution numérique du problème.

6 Résolution d'un problème de mécanique du point

Pour résoudre un problème de mécanique du point, il est judicieux de suivre les étapes suivantes. Tous les points doivent apparaître et la succession de ces étapes dans cet ordre permet de suivre une démarche de démonstration scientifique rigoureuse qui consiste à faire des hypothèses, vérifier que l'on est dans les conditions d'application d'un principe, d'une loi physique ou d'un théorème, puis appliquer cette loi et en tirer des conclusions. Pour cela :

- la première étape consiste à **définir le système** et à vérifier que l'on peut l'assimiler à un point matériel ;
- lors de la deuxième étape, on **choisit le référentiel** qui sera utilisé et on vérifie que l'on peut bien le considérer comme galiléen ;
- on commence ensuite à **établir ou compléter un schéma** de la situation qui va permettre de **choisir le système de coordonnées adapté** à l'étude du mouvement ;
- on établit alors un **bilan des forces** précis et complet ;
- la dernière étape consiste à **choisir la méthode de résolution**. Pour l'instant, on ne dispose que d'une méthode : le principe fondamental de la dynamique. On disposera par la suite de deux lois qui en découlent et il faudra être capable de choisir la méthode qui permet de résoudre le problème avec le plus de facilité. Cette étape est forcément la dernière puisqu'elle requiert de connaître la réponse aux points précédents.

7 Chute libre dans le champ de pesanteur

7.1 Mise en équation

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m qu'on lâche sans vitesse initiale d'une hauteur h dans le champ de pesanteur \vec{g} .

Dans un premier temps, on néglige la résistance de l'air au cours du mouvement, ce qui revient à considérer que la chute se fait dans le vide. On tiendra compte par la suite de frottements proportionnels à la vitesse puis de frottements proportionnels au carré de la vitesse. Dans tous les cas, le mouvement est un mouvement de chute verticale et on utilise une base de projection cartésienne réduite à un axe. On choisit l'axe (Oy) vertical ascendant et l'étude cinématique du mouvement rectiligne selon l'axe (Oy) donne :

$$\overrightarrow{OM} = y\vec{u}_y, \quad \vec{v} = \dot{y}\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{y}\vec{u}_y.$$

On établit le schéma de la figure 15.9 en faisant apparaître le point M à $t = 0$ avec les conditions initiales du mouvement. On représente également le point M à l'instant t avec les forces qui s'y appliquent.

Le choix du système de coordonnées respecte les symétries du problème et en l'occurrence des conditions initiales et des forces qui s'appliquent sur M . On suit alors la procédure de résolution d'un problème de mécanique décrite ci-dessus :

- définition du système : le point matériel M ;
- choix du référentiel : le référentiel terrestre que l'on considère galiléen ;
- bilan des forces : les forces qui s'exercent sur le point matériel sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et les forces de frottements fluides \vec{f} ;
- choix de la méthode de résolution : on utilise le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i = m\vec{g} + \vec{f}$$

soit

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{f}}{m}. \quad (15.2)$$

7.2 Chute libre dans le vide

Lorsque l'on néglige la résistance de l'air, on parle de chute libre dans le vide. Dans ces conditions, le principe fondamental de la dynamique se réduit à :

$$\vec{a} = \vec{g}. \quad (15.3)$$

Le mouvement est donc caractérisé par une accélération constante. Ce type de mouvement a

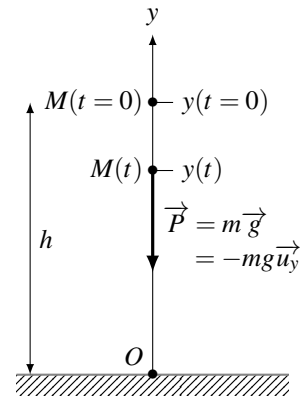


Figure 15.9 – Situation de chute libre sous l'action du poids.

été étudié dans le chapitre de cinématique du point. Il est remarquable de noter que la masse n'intervient pas dans les équations du mouvement. Il faut cependant avoir conscience que cela n'est vrai que parce que l'on a négligé la résistance de l'air.

a) Équations horaires du mouvement

Comme $\vec{a} = \ddot{y}\vec{u}_y$ et $\vec{g} = -g\vec{u}_y$, l'équation du mouvement obtenue par projection de l'équation (15.3) sur l'axe \vec{u}_y se traduit par :

$$\ddot{y} = -g.$$

Par intégrations successives, et en tenant compte des conditions initiales (vitesse nulle et altitude h), on trouve :

$$\dot{y} = -gt \quad \text{puis} \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Le mouvement est un mouvement rectiligne uniformément accéléré le long de l'axe vertical (Oy) dirigé vers le bas à la vitesse de norme :

$$v = -\dot{y} = gt.$$

b) Caractéristiques du mouvement

On peut étudier quelques caractéristiques du mouvement.

- La durée de chute T est obtenue en cherchant l'instant d'arrivée au sol donc en résolvant l'équation $y(T) = 0$:

$$-\frac{1}{2}gT^2 + h = 0 \quad \iff \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

- La vitesse du point matériel à l'impact au sol est la vitesse à l'instant $t = T$ soit :

$$v = gT = \sqrt{2gh}.$$

Cette dernière relation montre que la vitesse à l'impact au sol augmente indéfiniment en fonction de la hauteur de chute h . Pour une hauteur de chute de 1000 m, on trouve une vitesse à l'impact de $140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 500 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Or les sauteurs en parachute qui pratiquent la chute libre ne dépassent pas $250 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ lors d'une chute d'une hauteur supérieure à 1000 m. **Un phénomène limite la vitesse qui n'augmente pas au delà d'une valeur limite.** Grossièrement, lors d'une chute libre, la vitesse du parachutiste augmente pendant 600 m qu'il parcourt en 20 s pour atteindre $60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Après l'ouverture du parachute, la vitesse diminue jusqu'à environ $7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La voile du parachute sert à augmenter la résistance de l'air et permet de diminuer la vitesse de chute. Nous allons étudier le phénomène qui limite la vitesse à l'aide de deux modèles de résistance de l'air : un modèle de frottement proportionnel à la vitesse et un modèle de frottement proportionnel au carré de la vitesse.

7.3 Chute libre avec frottements proportionnels à la vitesse

On ne néglige plus la force de frottement \vec{f} et on prend sous la forme $\vec{f} = -k_1 \vec{v}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m \vec{a} = -k_1 \vec{v} + m \vec{g}.$$

La chute ayant lieu vers le bas, y est négatif. La norme de la vitesse étant toujours positive, $v = -\dot{y}$. Le vecteur vitesse \vec{v} vaut donc $\vec{v} = \dot{y} \vec{u}_y = -v \vec{u}_y$ et on en déduit que :

$$\vec{a} = \dot{y} \vec{u}_y = -\frac{dv}{dt} \vec{u}_y.$$

Comme $\vec{g} = -g \vec{u}_y$, le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oy) donne l'équation du mouvement :

$$m \frac{dv}{dt} + k_1 v = mg.$$

a) Analyse de l'équation différentielle du mouvement

Deux forces sont en présence :

- une force motrice, le poids, orientée vers le bas et responsable du mouvement de chute ;
- une force de freinage, le frottement fluide, opposée au mouvement dont la norme augmente lorsque la vitesse augmente.

À partir d'une vitesse initiale nulle, le point M chute de plus en plus vite et la force de freinage proportionnelle à la vitesse augmente. Au bout d'un moment, la force motrice et la force de freinage se compensent. Dans ces conditions, la somme des forces s'annule, le système est pseudo-isolé et son mouvement est par la suite rectiligne et uniforme à la vitesse limite v_l qui assure l'égalité du poids et de la force de frottement :

$$k_1 v = mg \quad \Longleftrightarrow \quad v = v_l = \frac{mg}{k_1}.$$

Très souvent, il est intéressant d'introduire les paramètres physiques que l'on a obtenu de cette manière dans l'équation différentielle pour faciliter sa résolution. Dans le cas présent, on trouve :

$$\frac{m}{k_1} \frac{dv}{dt} + v = \frac{mg}{k_1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{v_l}{g} \frac{dv}{dt} + v = v_l$$

de la forme

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = v_l \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{v_l}{g} = \frac{m}{k_1}.$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre dont le temps caractéristique τ correspond à l'échelle de temps nécessaire pour atteindre un régime permanent caractérisé par $v = v_l$.

b) Résolution de l'équation différentielle du mouvement

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée $v_h(t)$ et d'une solution particulière $v_p(t)$.

La résolution de l'équation homogène associée conduit à $v_h(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ où λ est une constante. On recherche une solution particulière sous la forme d'une constante puisque le second membre est constant d'où $v_p(t) = g\tau = v_l$. La solution générale est alors :

$$v(t) = C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_l.$$

On détermine la constante à l'aide des conditions initiales à savoir $v(t = 0) = 0 = \lambda + v_l$ soit $\lambda = -v_l$ et on obtient :

$$v(t) = v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

La chute ayant lieu vers le bas, \dot{y} est négatif. La norme de la vitesse v étant toujours positive, $v = -\dot{y}$. La position y se déduit alors par intégration par rapport au temps de $\dot{y} = -v$:

$$\dot{y} = -v = -v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \implies y = -v_l t - v_l \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + K.$$

La constante K s'obtient en tenant compte de la position initiale : $y(t = 0) = h = -v_l \tau + K$ soit $K = h + v_l \tau$ et finalement :

$$y(t) = -v_l t + v_l \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + h.$$

c) Retour sur l'analyse initiale

Pour analyser l'expression de la vitesse en fonction du temps : $v(t) = v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$, on définit une vitesse et un temps sans dimension en notant $v^* = \frac{v}{v_l}$ et $t^* = \frac{t}{\tau}$. On obtient alors :

$$v^*(t) = 1 - \exp(-t^*),$$

et on trace l'évolution de v^* en fonction de t^* qui sur la figure 15.10.

On remarque que v^* augmente de 0 à 1 qu'elle atteint pratiquement lorsque t^* atteint environ 5. Cela signifie que la vitesse du mobile augmente vers sa vitesse limite v_l qui est atteinte après quelques τ . La vitesse évolue en deux phases : une phase transitoire qui dure quelques τ et permet au mobile d'accélérer jusqu'à v_l puis une phase permanente lors de laquelle la vitesse est constante et égale à v_l :

- $v_l = \frac{m}{k_1} g$ représente la vitesse finale du mobile ;
- $\tau = \frac{v_l}{g} = \frac{m}{k_1}$ est le temps caractéristique nécessaire pour que v_l soit atteinte.

Ces deux paramètres sont indépendants des conditions initiales et déterminent entièrement l'évolution temporelle de la vitesse de chute du système. Les paramètres m , g et k_1 n'interviennent pas indépendamment mais seulement sous la forme de combinaisons formant v_l et τ .

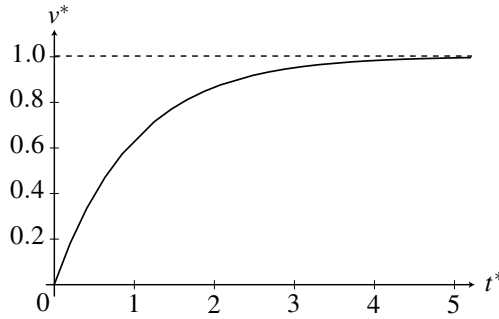


Figure 15.10 – Évolution de la vitesse en fonction du temps lors d'une chute libre avec frottements proportionnels à la vitesse.

7.4 Chute libre avec frottements proportionnels au carré de la vitesse

On considère à présent que la force de frottement \vec{f} se met sous la forme $\vec{f} = -k_2 v \vec{v}$, en notant, ici encore, v la norme de la vitesse. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - k_2 v \vec{v}. \tag{15.4}$$

Comme précédemment, la chute a lieu vers le bas, $\vec{v} = -v \vec{u}_y$, $\vec{a} = -\frac{dv}{dt} \vec{u}_y$ et $\vec{g} = -g \vec{u}_y$. L'équation du mouvement est obtenue par projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe (Oy) :

$$m \frac{dv}{dt} + k_2 v^2 = mg.$$

Cette équation n'est pas linéaire, on ne peut donc pas la résoudre comme la précédente.

a) Analyse physique de l'équation différentielle du mouvement

Pour les mêmes raisons qu'en présence de frottements proportionnels à la vitesse, le point matériel atteint une vitesse limite v_l lorsque le poids est compensé par la force de frottement d'où :

$$k_2 v^2 = mg \quad \iff \quad v = v_l = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}.$$

On introduit alors la vitesse limite dans l'équation différentielle qui devient :

$$\frac{m}{k_2} \frac{dv}{dt} + v^2 = v_l^2 \quad \iff \quad \frac{m}{k_2 v_l^2} \frac{dv}{dt} = 1 - \left(\frac{v}{v_l}\right)^2 \quad \iff \quad \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \left(\frac{v}{v_l}\right)^2.$$

puisque $\frac{m}{k_2 v_l^2} = \frac{1}{g}$. On aboutit à une équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_l}\right)^2} = g dt \quad \text{soit} \quad \frac{d\left(\frac{v}{v_l}\right)}{1 - \left(\frac{v}{v_l}\right)^2} = \frac{g}{v_l} dt.$$

On définit alors la vitesse adimensionnée $v^* = \frac{v}{v_l}$ et le temps caractéristique $\tau = \frac{v_l}{g}$ dont on se sert pour établir un temps adimensionné $t^* = \frac{t}{\tau}$. On obtient alors l'équation :

$$\frac{dv^*}{1 - v^{*2}} = dt^* \quad \Rightarrow \quad \int_{v^*(t=0)=0}^{v^*(t)} \frac{dv^*}{1 - v^{*2}} = \int_0^{t^*} dt^*.$$

On sait calculer cette intégrale analytiquement ou numériquement. Cela permet de représenter la courbe de la figure 15.11 sur laquelle on remarque que v^* augmente de 0 à 1 qu'elle atteint pratiquement lorsque t^* atteint environ 3. Cela signifie que la vitesse du mobile augmente vers sa vitesse limite v_l qui est atteinte après quelques τ .

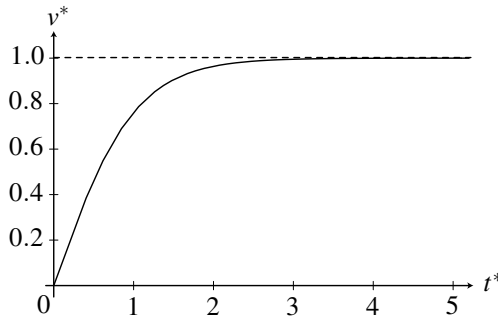


Figure 15.11 – Évolution de la vitesse en fonction du temps lors d'une chute libre avec frottements proportionnels au carré de la vitesse.

Remarque

La solution analytique, obtenue à l'aide de la méthode de décomposition en éléments simples vue en mathématique, est $v^* = \frac{\exp(t^*) - \exp(-t^*)}{\exp(t^*) + \exp(-t^*)} = \frac{\text{sh}(t^*)}{\text{ch}(t^*)} = \text{th}(t^*)$ où sh, ch et th sont les fonctions trigonométriques hyperboliques définies dans l'annexe mathématique.

b) Retour sur l'analyse initiale

Comme précédemment, la vitesse du mobile tend vers la vitesse limite lorsque le temps tend vers l'infini et évolue en deux phases : une phase de régime transitoire qui dure quelques τ et

permet au mobile d'accélérer jusqu'à v_l puis une phase de régime permanent lors de laquelle la vitesse est constante et égale à v_l :

- $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}$ représente la vitesse finale du mobile ;
- $\tau = \frac{v_l}{g} = \sqrt{\frac{m}{k_2 g}}$ est le temps caractéristique nécessaire pour que v_l soit atteinte.

Ces deux paramètres sont indépendants des conditions initiales et déterminent entièrement l'évolution temporelle de la vitesse de chute du système. Les paramètres m , g , k_2 n'interviennent pas indépendamment mais seulement sous la forme de combinaisons formant v_l et τ .

7.5 Comparaison des deux modèles de frottements

Dans les deux cas, le mouvement comporte une phase d'accélération d'une durée de quelques τ suivie d'une évolution à vitesse constante et égale à la vitesse limite ce qui est bien en accord avec les observations de chutes libres de parachutistes. Cependant, l'expression de cette vitesse n'est pas la même :

$$\begin{cases} v_l = \frac{mg}{k_1} & \text{pour un frottement proportionnel à la vitesse,} \\ v_l = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} & \text{pour un frottement proportionnel au carré de la vitesse.} \end{cases}$$

En pratique, c'est la mesure de ces vitesses limites qui permet de déterminer la valeur des constantes k_1 et k_2 et on ne peut pas discriminer ces modèles par cette seule étude. Pour déterminer lequel de ces deux modèles est le plus proche de la réalité, il est nécessaire de faire des essais en soufflerie ou de raisonner sur l'énergie. On obtient alors les résultats suivants :

- un frottement proportionnel à la vitesse convient bien lorsque les vitesses sont faibles, ou que la chute a lieu dans un liquide visqueux ;
- lorsque les vitesses deviennent plus importantes et que la chute a lieu dans un gaz comme l'air, un frottement proportionnel au carré de la vitesse est plus adapté.

La méthode employée dans le cas d'un frottement proportionnel au carré de la vitesse est intéressante : l'introduction d'une valeur limite pour la vitesse suivie de la séparation des variables v et t permet de transformer une équation différentielle *a priori* compliquée à résoudre en une intégrale « classique ». L'idée d'introduire un paramètre limite pour simplifier la résolution est souvent une idée à tester. Le fait de rendre les équations sans dimension avant de chercher à les résoudre également.

8 Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur

8.1 Mise en équation

On étudie toujours le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur \vec{g} . On s'intéresse maintenant au cas du vol balistique pour lequel le point matériel est initialement lancé avec une vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

Par rapport au mouvement de chute libre sans vitesse initiale vu précédemment, seules les conditions initiales sont modifiées. La position initiale du mobile est un point M_0 et son mouvement a lieu dans un plan vertical \mathcal{P} contenant M_0 , \vec{g} et \vec{v}_0 .

Sans rien enlever à la généralité du problème, on choisit l'origine du repère O en M_0 , un axe (Oy) vertical ascendant et l'axe (Ox) contenu dans \mathcal{P} et orthogonal à (Oy) et on utilise une base de projection cartésienne réduite à un plan (xOy) .

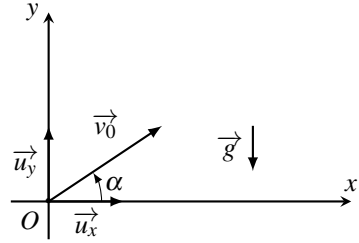


Figure 15.12 –
Conditions initiales
d'un tir dans le vide.

L'étude cinématique du mouvement dans le plan (xOy) en coordonnées cartésiennes donne :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}.$$

Dans un premier temps, on néglige la résistance de l'air. On tiendra compte par la suite d'une force proportionnelle au carré de la vitesse qui modélise bien les frottements dus à un gaz.

8.2 Tir dans le vide

On néglige la résistance de l'air au cours du mouvement. Cela revient à considérer que le vol balistique se fait dans le vide. L'équation (15.3) établie au paragraphe 7.2 est inchangée :

$$\vec{a} = \vec{g}. \tag{15.5}$$

Le mouvement est à nouveau un mouvement à accélération constante étudié en cinématique du point. On la projette cette fois sur les axes (Ox) et (Oy) pour obtenir :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$

Par intégrations successives en tenant compte des conditions initiales

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0, \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha. \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps dans les équations horaires.

De l'expression de x en fonction du temps, on tire : $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, puis en reportant dans l'expression de y :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

La trajectoire est donc une parabole.

Remarque

On peut également intégrer l'équation vectorielle (15.5) et obtenir : $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$ puis $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0$ ce qui permet de ne projeter que pour étudier la trajectoire.

Hauteur maximale atteinte Elle correspond au sommet de la parabole et s'obtient en résolvant l'équation : $\frac{dy}{dx} = \frac{-gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0$ soit $x_m = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$.

L'altitude maximale atteinte est alors : $y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Portée du tir La portée du tir correspond à l'endroit où le point matériel retombe sur le sol qu'on suppose plan et horizontal d'altitude $y = 0$. On obtient l'expression de la portée en résolvant l'équation :

$$0 = y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = x \left(\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right).$$

On obtient deux solutions : $x = 0$ et $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

La solution $x = 0$ correspond à la position d'origine du tir qui appartient naturellement à la trajectoire. Il est normal de la trouver mais elle ne présente pas d'intérêt ici. La portée du tir est donc :

$$x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

On note qu'elle est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exemple

C'est l'angle avec lequel sautent les grenouilles pour retomber le plus loin possible.

Tir tendu ou tir en cloche On s'interroge maintenant sur la possibilité d'atteindre un point à la même altitude que celle où s'effectue le tir et situé à une distance donnée d de l'origine du tir (figure 15.13). Le seul paramètre variable est l'angle de tir α . D'après le paragraphe précédent, il faut chercher les valeurs de α vérifiant l'équation :

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

La résolution de cette équation conduit à deux solutions dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{gd}{v_0^2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{gd}{v_0^2}.$$

On obtient deux angles de tir possibles : la valeur la plus faible correspond au tir tendu tandis que la valeur la plus grande est celle du tir en cloche (voir figure 15.13).

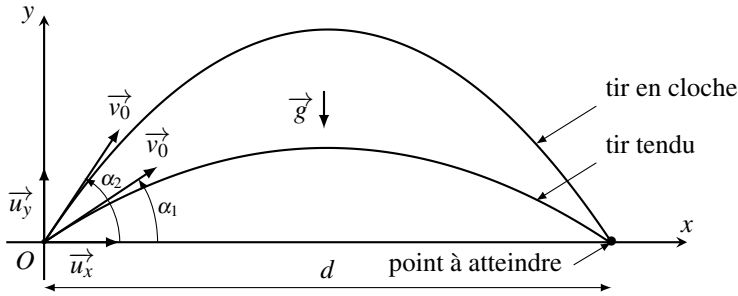


Figure 15.13 – Les deux trajectoires possibles d'un tir dans le vide.

Parabole de sûreté On cherche à déterminer l'ensemble des points (x_0, y_0) qu'il est possible d'atteindre pour une vitesse v_0 donnée. Ce sera le cas si l'équation d'inconnue α :

$$y_0 = -\frac{gx_0^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_0 \tan \alpha$$

admet des solutions. En utilisant le fait que $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, on aboutit à l'équation en $X = \tan \alpha$ suivante :

$$\frac{gx_0^2}{2v_0^2} X^2 - x_0 X + \frac{gx_0^2}{2v_0^2} + y_0 = 0.$$

Cette équation du second degré n'admet des solutions réelles (seules acceptables ici) que si son discriminant est positif donc si :

$$\Delta = x_0^2 - 4 \frac{gx_0^2}{2v_0^2} \left(\frac{gx_0^2}{2v_0^2} + y_0 \right) \geq 0 \iff y_0 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_0^2}{2v_0^2}.$$

Un point ne peut donc être atteint que s'il se trouve dans le plan (xOz) sous la parabole d'équation :

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Cette parabole est appelée **parabole de sûreté**. C'est l'enveloppe des trajectoires obtenues en faisant varier l'angle de lancement pour une vitesse initiale de module donné. La figure 15.14 représente les trajectoires pour différents angles de tir avec une vitesse initiale de $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ainsi que la parabole de sûreté en trait plus épais.

Pour un point situé sous la parabole de sûreté, on a deux solutions pour l'angle α , donc deux angles de tir possibles permettant d'atteindre le point considéré. L'un correspond au tir tendu, l'autre au tir en cloche.

Lorsque le point considéré appartient à la parabole de sûreté, le discriminant est nul. Dans ce cas, il est possible de l'atteindre mais il n'y aura qu'une seule valeur possible pour l'angle de tir, à savoir $\arctan\left(\frac{v_0^2}{g}\right)$.

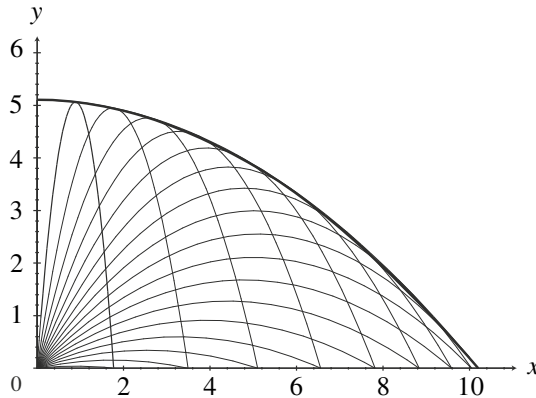


Figure 15.14 – Parabole de sûreté pour une vitesse initiale de $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

8.3 Tir en tenant compte de la résistance de l'air

Dans l'étude précédente, on n'a pas tenu compte de la résistance de l'air. L'air étant un gaz, on modélise sa résistance par une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse. L'équation du mouvement est la même que l'équation (15.4) établie au paragraphe 7.4 :

$$m \vec{a} = -k_2 v \vec{v} + m \vec{g}.$$

Lorsque la vitesse initiale n'est pas nulle, on ne peut résoudre cette équation différentielle que numériquement et pour cela, il est intéressant de la rendre adimensionnelle en introduisant des grandeurs caractéristiques.

a) Équation différentielle adimensionnelle

Il s'agit de la même équation différentielle que celle que l'on a étudiée au paragraphe 7.4. On introduit la même vitesse limite $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}$ et le même temps caractéristique $\tau = \frac{v_l}{g}$. On pose $t = \tau t^*$ où t^* est un temps adimensionnel et $\vec{v} = v_l \vec{v}^*$ où \vec{v}^* est une vitesse adimensionnée. On déduit $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_l \vec{v}^*)}{d(\tau t^*)} = \frac{v_l}{\tau} \frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = g \frac{d\vec{v}^*}{dt^*}$. On reporte ces expressions dans

l'équation différentielle précédente et on obtient : $\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = -v^* \vec{v}^* - \vec{u}_y$.

On introduit alors l'échelle de longueur $l = v_l \tau$ pour définir les longueurs adimensionnelles $x^* = \frac{x}{l}$ et $y^* = \frac{y}{l}$. Par projection sur les axes (Ox) et (Oy) , on obtient les équations sans dimensions :

$$\begin{cases} \dot{x}^* &= -x^* \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} \\ \dot{y}^* &= -y^* \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} - 1, \end{cases}$$

qui ne peuvent être résolues que par des méthodes numériques.

Cette écriture montre que le type de comportement du mobile n'est déterminé que par sa

vitesse initiale adimensionnée $\vec{v}_0^* = \vec{v}_0/v_l$ dont on peut faire varier la norme et la direction. On va s'intéresser ici à l'influence de sa norme en fixant l'angle que fait \vec{v}_0^* avec l'horizontale à 45° et traçant les trajectoires pour différentes valeurs de $\|\vec{v}_0^*\|$. On rappelle que v_l est la vitesse pour laquelle la norme des frottements est égale à la norme du poids. Ainsi,

- lorsque $v \gg v_l \Leftrightarrow v^* \gg 1$, le poids est négligeable ;
- lorsque $v \ll v_l \Leftrightarrow v^* \ll 1$, les frottements sont négligeables.

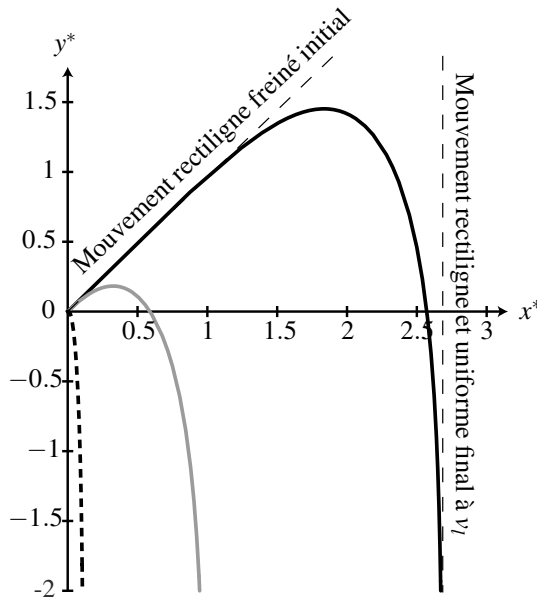


Figure 15.15 – Évolution de la trajectoire pour différentes vitesses initiales. L'angle de tir est fixé à 45° et la vitesse initiale prend les valeurs de $0, 1v_l$ (tirets), v_l (trait continu gris) et $10v_l$ (trait continu noir).

Selon la norme de \vec{v}_0^* , on distingue trois différents régimes pour le mouvement de M :

- lorsque $\|\vec{v}_0^*\| \ll 1$, la vitesse initiale est négligeable et le mouvement ressemble au mouvement rectiligne de chute libre traité au paragraphe 7.4 avec un faible décalage vers les x^* positifs ;
- lorsque $\|\vec{v}_0^*\|$ est de l'ordre de 1, les deux forces ont une importance équivalente et on ne peut pas simplifier la résolution : la trajectoire est courbe et amène le mobile sur une trajectoire verticale rectiligne et uniforme parcourue à la vitesse v_l ;
- lorsque $\|\vec{v}_0^*\| \gg 1$, le poids est négligeable dans un premier temps et le mouvement initial est rectiligne freiné. Puis la vitesse diminue et on est ramené au cas précédent : le mobile change de direction pour évoluer verticalement vers le bas. Enfin, la vitesse étant verticale, on est ramené à premier cas pour finir avec un mouvement vertical rectiligne et uniforme à la vitesse v_l .

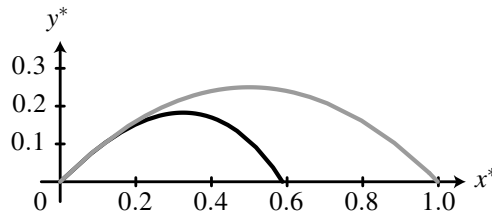


Figure 15.16 – Comparaison entre une trajectoire avec frottement pour laquelle $v_0 = v_l$ (en noir) et une trajectoire sans frottement avec la même vitesse initiale (en gris). Les frottements diminuent la portée sans changer fondamentalement la forme de la trajectoire. L'angle de tir est de 45° par rapport à l'horizontale.

Exemple

Lors d'un échange de badminton, le volant part de la raquette avec une vitesse de 200 à 300 km/h et on peut évaluer la vitesse limite à environ 15 à 30 km/h. La vitesse initiale est très grande devant la vitesse limite : la trajectoire ressemble à la trajectoire de type 3 avec une phase initiale rectiligne et un volant qui retombe presque à la verticale.

Lors d'un dégagement du gardien, un ballon de football part avec une vitesse de 100 à 150 km/h et on peut évaluer la vitesse limite à environ 80 à 100 km/h. La vitesse initiale et la vitesse limite sont comparables : la trajectoire ressemble à la trajectoire du type 2. On peut voir sur la figure 15.16 que la différence principale par rapport à une trajectoire parabolique obtenue sans frottement est que la portée diminue.

9 Le pendule simple

On considère un solide de petite taille et de masse m attaché à un fil. L'autre extrémité du fil est liée à un point fixe. À l'instant initial, on lâche le solide sans vitesse d'une position faisant un angle θ_0 avec la verticale. On observe que le mouvement ultérieur est plan.

9.1 Modélisation

On modélise le solide par un point matériel M de masse m et le fil par un fil inextensible, sans masse et sans rigidité (fil idéal). On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige les frottements dus à l'air.

9.2 Équation du mouvement

On va suivre la procédure de résolution d'un problème de mécanique décrite précédemment :

- définition du système : le solide de masse m assimilé à un point matériel M ,
- choix du référentiel : le référentiel terrestre que l'on considère galiléen,
- bilan des forces : ne pas considérer la résistance de l'air revient à négliger tout phénomène de frottements. Le point matériel est soumis à :
 - son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$;

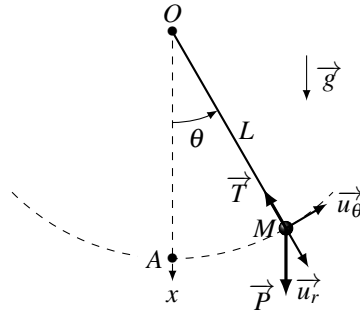


Figure 15.17 – Le pendule simple

- la tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ où $T > 0$.
- choix de la méthode de résolution : on utilise le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Une étape importante consiste à réfléchir à la forme géométrique de la trajectoire du mobile pour choisir correctement le système de coordonnées. Ici, le mouvement étant plan et le fil inextensible, le point M se déplace sur une portion de cercle de centre O et de rayon L . Le repérage polaire s'impose et, en utilisant le cours de cinématique sur les mouvements circulaires, on établit l'expression de l'accélération en coordonnées polaires définis sur le schéma de la figure 15.17 :

$$\vec{OM} = L\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

Par ailleurs, on projette tous les vecteurs sur la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et en particulier la force \vec{P} puisque que $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ est déjà écrite sur cette base. Pour cela, on s'aide du schéma de la figure 15.17 et on trouve :

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

Il ne reste plus qu'à projeter le principe fondamental de la dynamique sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ :

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 & = mg \cos \theta - T \\ mL\ddot{\theta} & = -mg \sin \theta \end{cases}$$

La première équation permet d'établir l'expression de la tension du fil T qui est une inconnue de ce mouvement, à condition de connaître l'évolution temporelle de θ . La deuxième équation est l'équation du mouvement. Sa résolution donne l'expression de $\theta(t)$. En posant $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, on peut l'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \tag{15.6}$$

Cette équation n'est pas linéaire et on ne peut pas la résoudre simplement. Deux approches sont possibles : la résolution numérique ou la linéarisation en vue de trouver une solution analytique.

9.3 Résolution numérique

Cette équation est entièrement déterminée par la connaissance de ω_0 . Les paramètres g , m et L n'interviennent pas indépendamment mais uniquement sous la forme de la combinaison $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ et la masse m n'intervient pas dans le problème. Le seul paramètre libre est l'angle initial θ_0 dont on va étudier l'influence en traçant les solutions $\theta(t)$ en fonction du temps pour θ_0 variant entre 0, 1 et 1,5 radians (oscillations de grande amplitude) ou entre 0,01 et 0,15 radians (oscillations de faible amplitude). Les résultats sont représentés sur la figure 15.18.

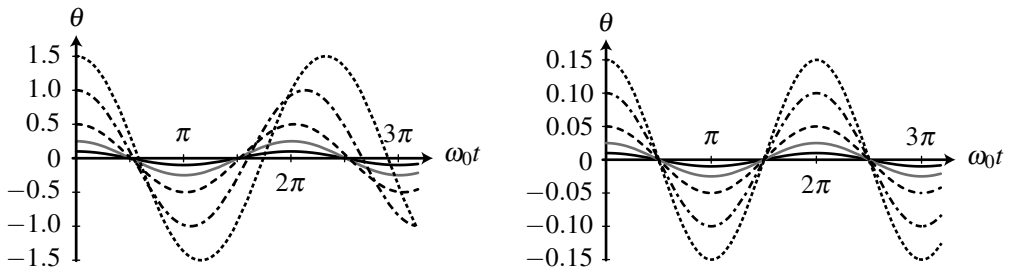


Figure 15.18 – Évolution temporelle de l'angle θ pour différentes conditions initiales. À gauche, l'amplitude des oscillations est comprise entre 0,1 et 1,5 rad ; à droite, elle est comprise entre 0,01 et 0,15 rad.

Dans tous les cas, on observe des oscillations périodiques. Pour les oscillations de grande amplitude, la période de ces oscillations dépend de θ_0 donc des conditions initiales. Lorsque l'amplitude des oscillations reste petite (inférieure à 0,4 rad environ), les oscillations ont une période commune. On parle d'**isochronisme des petites oscillations**. On va chercher à établir ce résultat en linéarisant l'équation différentielle (15.6) pour les petits angles.

9.4 Cas des oscillations de faibles amplitudes

a) Linéarisation et résolution analytique

Dans le cas où θ reste petit devant 1, on peut assimiler $\sin \theta$ à θ et linéariser l'équation (15.6). On obtient alors l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (15.7)$$

La variable angulaire θ vérifie alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique que l'on a étudié au premier chapitre de cet ouvrage. Les solutions pour $\theta(t)$ sont de la forme

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

où A et B sont des constantes. Les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$ s'écrivent :

$$\theta_0 = A \quad \text{et} \quad 0 = B\omega_0,$$

soit $A = \theta_0$ et $B = 0$. Finalement : $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

$\theta(t)$ présente des oscillations sinusoïdales de pulsation ω_0 et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ indépendante de θ_0 . Dans la limite des oscillations de faible amplitude, on vient de montrer l'isochronisme des petites oscillations avec une période :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

En pratique, l'isochronisme est assuré avec une précision de 1% lorsque θ reste inférieur à environ 0,4 rad soit environ 25°.

b) Portrait de phase

On peut intégrer l'équation (15.7) pour obtenir une intégrale première du mouvement et en déduire le portrait de phase. La méthode est détaillée dans l'annexe mathématique de ce livre. On commence par écrire l'équation (15.7) sous la forme

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2\theta(t),$$

et on multiplie cette égalité par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\omega_0^2\theta(t)\dot{\theta} \iff \frac{d(\dot{\theta}^2/2)}{dt} = -\omega_0^2 \frac{d(\theta^2/2)}{dt} \iff \frac{d(\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2)}{dt} = 0.$$

On déduit alors que : $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = C$, où C est une constante d'intégration.

Les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ permettent de déterminer C :

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \omega_0^2\theta_0^2,$$

que l'on peut également écrire : $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1$.

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan de phase adimensionné $\left(\frac{\theta}{\theta_0}, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)$ que l'on trace sur la figure 15.19.

Remarque

On appelle **intégrale première du mouvement** une grandeur conservée au cours du mouvement obtenue en intégrant une fois le principe fondamental de la dynamique. Ici,

la quantité $\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1$ est une intégrale première du mouvement.

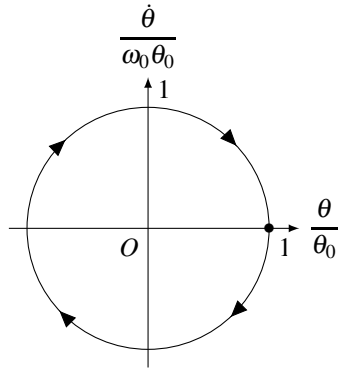


Figure 15.19 – Diagramme de phase du pendule simple dans la limite des petits angles.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- définition d'une force
- principe des actions réciproques
- principe de l'inertie
- définition d'un référentiel galiléen
- définition d'une quantité de mouvement
- principe fondamental de la dynamique
- expression des forces usuelles
- définition d'un portrait de phase

SAVOIR-FAIRE

- définir un système mécanique et un référentiel d'étude
- établir un schéma clair du problème
- établir un bilan des forces qui s'exercent sur un système
- choisir un système de coordonnées et une base de projection adaptés au problème
- projeter des équations vectorielles
- reconnaître une équation différentielle
- établir et intégrer l'équation différentielle du mouvement dans le cas du mouvement dans le champ de pesanteur terrestre en négligeant les frottements puis en tenant compte des frottements
- analyser des résultats d'intégration numérique présentés sous la forme de courbes
- établir et linéariser l'équation différentielle du pendule simple
- déterminer l'intégrale première de l'équation différentielle précédente pour établir son portrait de phase
- lire et exploiter un portrait de phase

MOTS-CLÉS

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|-----------------------|
| • masse | • conditions initiales | • pendule simple |
| • force | • équation différentielle | • frottements fluides |
| • quantité de mouvement | • portrait de phase | |
| • équation du mouvement | • chute libre | |