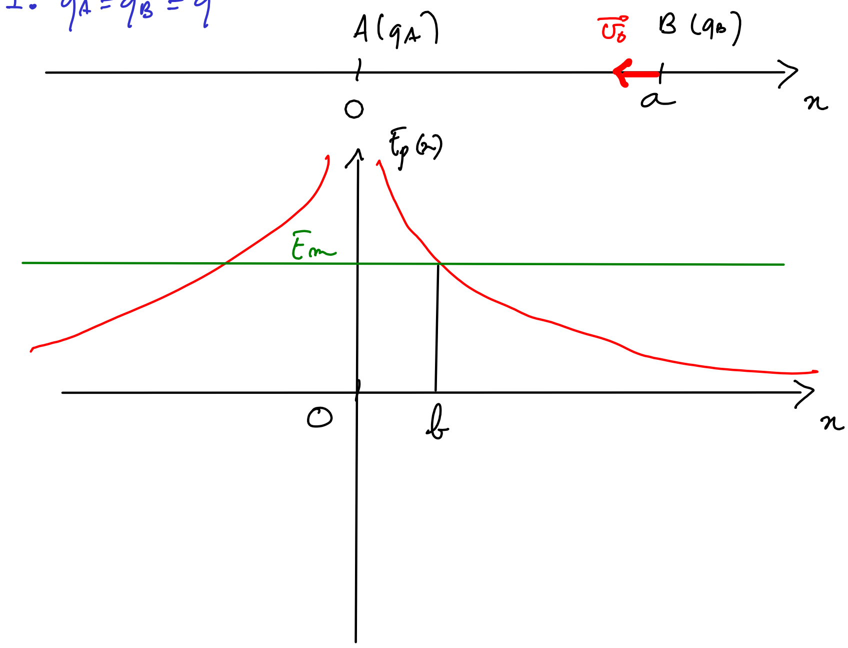
TD M4 – Mouvement d'une particule chargée. Corrigé

M1 – Interaction entre deux particules chargées

1. $q_A = q_B = q$



Syst : $B(m, q_B)$

Réf : labo $\mathcal{R}$, galiléen

Inventaire des forces

– force de Coulomb :

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$$

dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{p_e}(r) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{K}$$

0 en posant $\lim\limits_{r\to+\infty} E_p = 0$

Or ici $r = |x|$ donc :

$$\boxed{E_{p_e}(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 |x|}}$$

La seule force subie par B étant conservative, le système est conservatif : $E_m = cte$

Distance minimale d'approche b.

Pour $x = b$, $E_m = E_p(b)$.

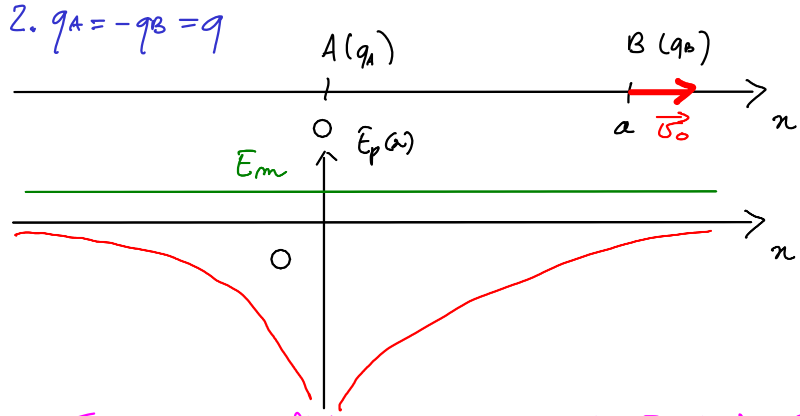
Or $E_p(b) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}$ et $E_m = E_p(a) + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{2}mv_0^2$, d'où :

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{q^2} \Longleftrightarrow \boxed{b = \frac{a}{1 + \frac{2\pi\varepsilon_0 a m v_0^2}{q^2}}}$$

La barrière d'énergie potentielle est de hauteur infinie en O $\Rightarrow$ B ne peut pas atteindre le point O. Cependant plus son énergie mécanique initiale est grande ($a\searrow$, $v_0\nearrow$), plus près il peut s'approcher de O.

La particule décélère jusqu'à $x = b$ puis repart vers les $x \nearrow$ en accélérant.

2. $q_A = -q_B = q$



Raisonnement analogue au cas précédent : pour sortir du puits d'énergie potentielle, il faut $E_m > 0$

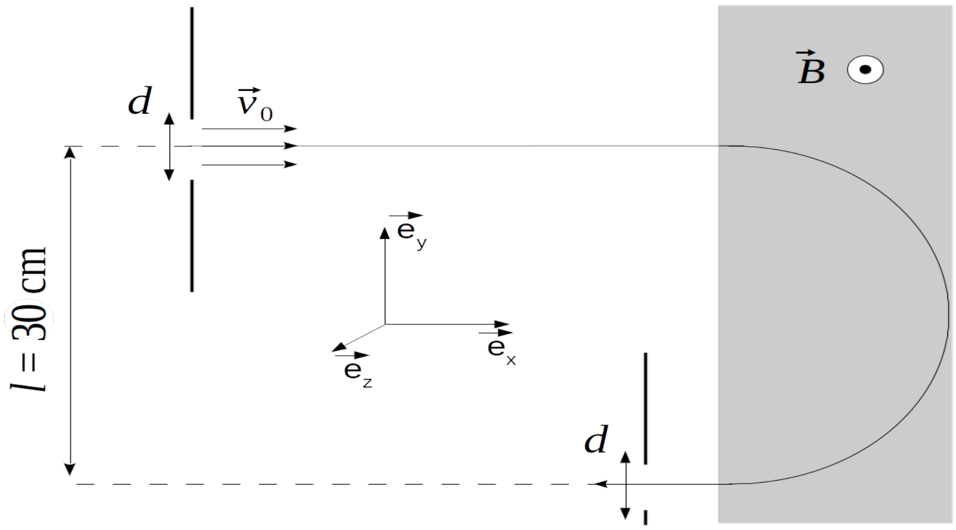
Or $E_m = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{2}mv_0^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 \geq \frac{q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m a}}}$$

Si $a \to +\infty$, $v_0 \to 0$, ok : déjà hors du puits.

Si $E_m < 0$: oscillations entre $\pm x_1$ tq $E_p(\pm x_1) = E_m$.

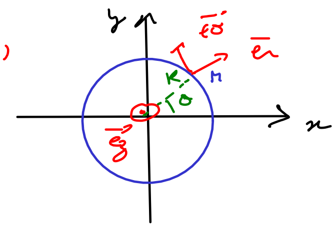
M2- Séparateur d'isotopes



1/ Mouvement d'une particule M de masse m et de charge q dans $\vec{B}$ à $\vec{v}_0$.

① La force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ est la seule force et son travail est nul.
D'après le théorème de l'énergie cinétique :
$E_c = E_{c,0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \boxed{v = v_0}$ où $v = \|\vec{v}\|$

② En admettant que le mouvement est circulaire de rayon R :
$\vec{v} = \underbrace{\cancel{\dot{r}}}_{0}\vec{e_r} + \underbrace{r}_{R}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \Rightarrow \|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}| = v_0$
et $r = R$ $\Rightarrow \boxed{|\dot{\theta}| = \frac{v_0}{R} = cste.}$ (1)



$\vec{a} = (\underbrace{\cancel{\ddot{r}}}_{r=R} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (\underbrace{2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta}}_{r=R} + \underbrace{r\cancel{\ddot{\theta}}}_{0})\vec{e_\theta}$ $\quad \dot{\theta} = cste.$

$\boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r}}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e_r}}$

③ Relation fondamentale de la dynamique appliquée à $M(m,q)$ dans $\mathcal{R}$, galiléen.
$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}$
avec $q\vec{v}\wedge\vec{B} = qR\dot{\theta}\vec{e_\theta}\wedge B\vec{e_z}$ or si $q>0$, $q\vec{v_0}\wedge\vec{B} = -qv_0B\vec{e_z} \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow |\dot{\theta}| = -\dot{\theta}$
or $|\dot{\theta}| = \frac{v_0}{R}$ d'où : $\dot{\theta} = -\frac{v_0}{R}$ donc $q\vec{v}\wedge\vec{B} = -q\,v_0 B\,\vec{e_r}$

La RFD devient : $-m\frac{v_0^2}{R} = -q\,v_0 B \Rightarrow \boxed{R = \frac{m v_0}{qB} = \frac{v_0}{\omega_c}}$

avec $\boxed{\omega_c = \frac{qB}{m}}$ pulsation cyclotron

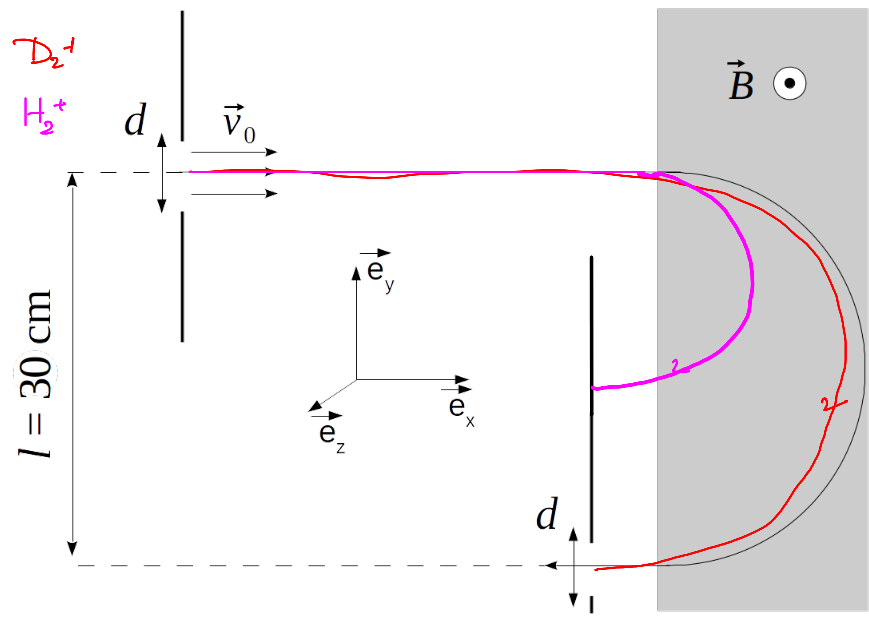
2. En modifiant l'intensité du champ magnétique B, on peut moduler le rayon de courbure de la trajectoire de l'ion.

Pour l'ion H_2^+ : $R_{H_2^+} = \dfrac{m_{H_2^+} v_0}{eB} = \dfrac{2 m_H v_0}{eB}$

Pour l'ion D_2^+ : $R_{D_2^+} = \dfrac{m_{D_2^+} v_0}{eB} = \dfrac{4 m_H v_0}{eB}$

Pour ne sélectionner que les ions $R_{D_2^+}$, il faut que :

$$\begin{cases} (1)\ 2R_{D_2^+} = \ell & \text{ions } D_2^+ \text{ sélectionnés} \\ (2)\ 2R_{H_2^+} < \ell - 2d & \text{ions } H_2^+ \text{ arrêtés} \end{cases}$$



(1) s'explicite :

$R_{D_2^+} = \dfrac{\ell}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 m_H v_0}{eB} = \dfrac{\ell}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{B = \dfrac{8 m_H v_0}{e\ell}}$

A.N. $B = 277\ \mu T$

(2) est garantie par $R_{H_2^+} = \dfrac{R_{D_2^+}}{2} = \dfrac{\ell}{4}$ soit $2R_{H_2^+} < \ell - 2d$

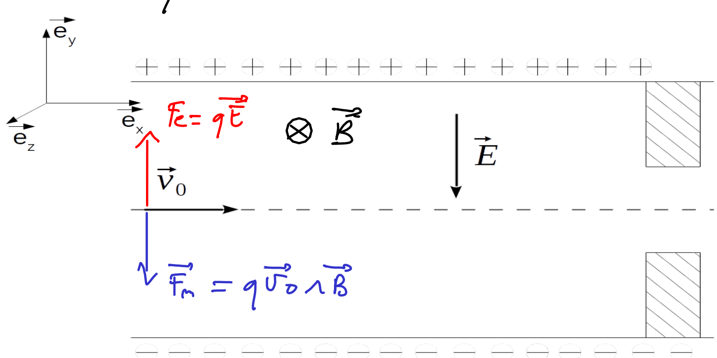
$\Leftrightarrow \dfrac{\ell}{2} < \ell - 2d$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ell}{4} > d$, toujours vraie avec $d = 1$ mm, $\ell = 30$ cm.

M3 - Filtre de vitesse.

$q<0$

1./ Le mouvement des particules de vitesse $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$ est rectiligne uniforme si la résultante des forces s'exerçant sur chaque particule est nulle.



La seule force est la force de Lorentz donc :

$\vec{F_\ell} = \vec{0} \Leftrightarrow q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}$

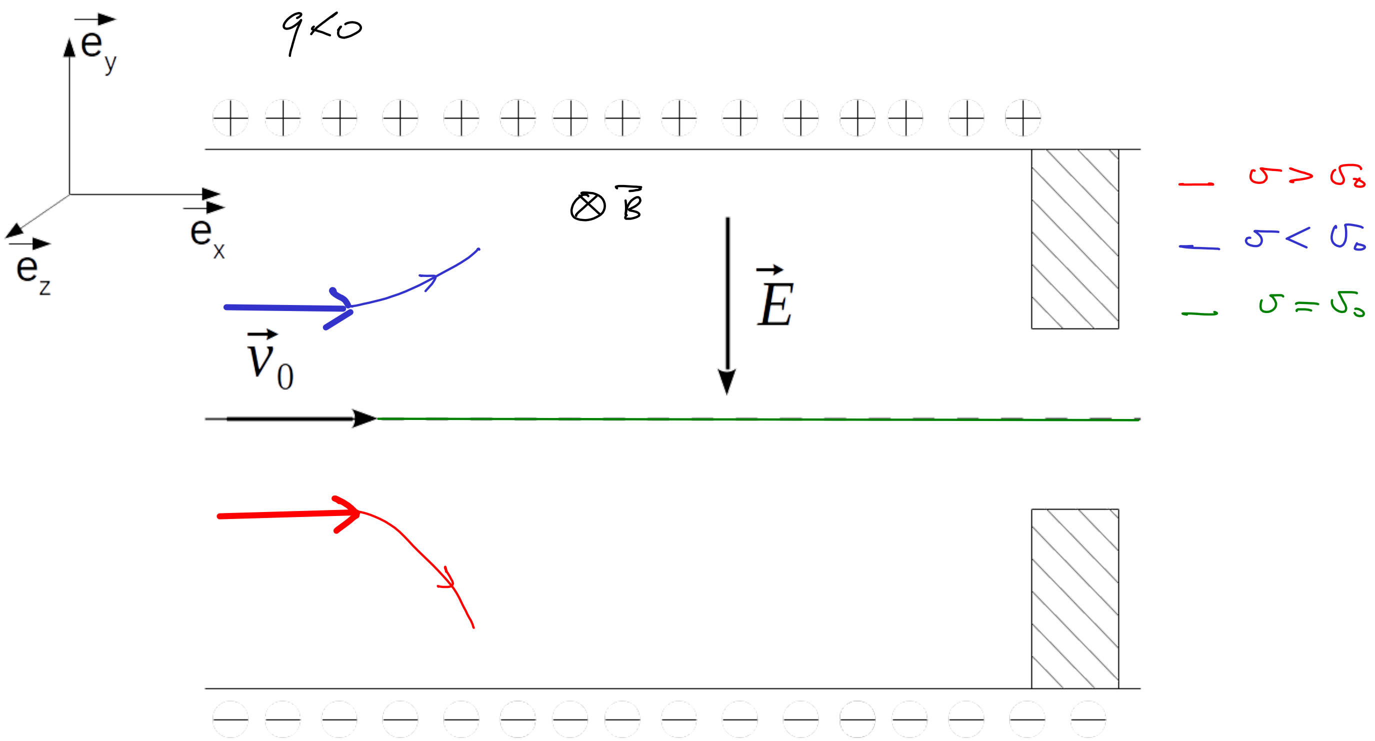
$\Rightarrow \vec{B} = -B\vec{e_z}$, $B > 0$ $\otimes \vec{B}$

$\Rightarrow B = \|\vec{B}\| = \frac{E}{v}$ or on veut $v = v_0$

d'où $B = \frac{E}{v_0}$

Pour que les particules de vitesse $\vec{v_0}$ aient un mouvement rectiligne uniforme, il faut que $\boxed{\vec{B} = -\frac{E}{v_0}\vec{u_z}}$

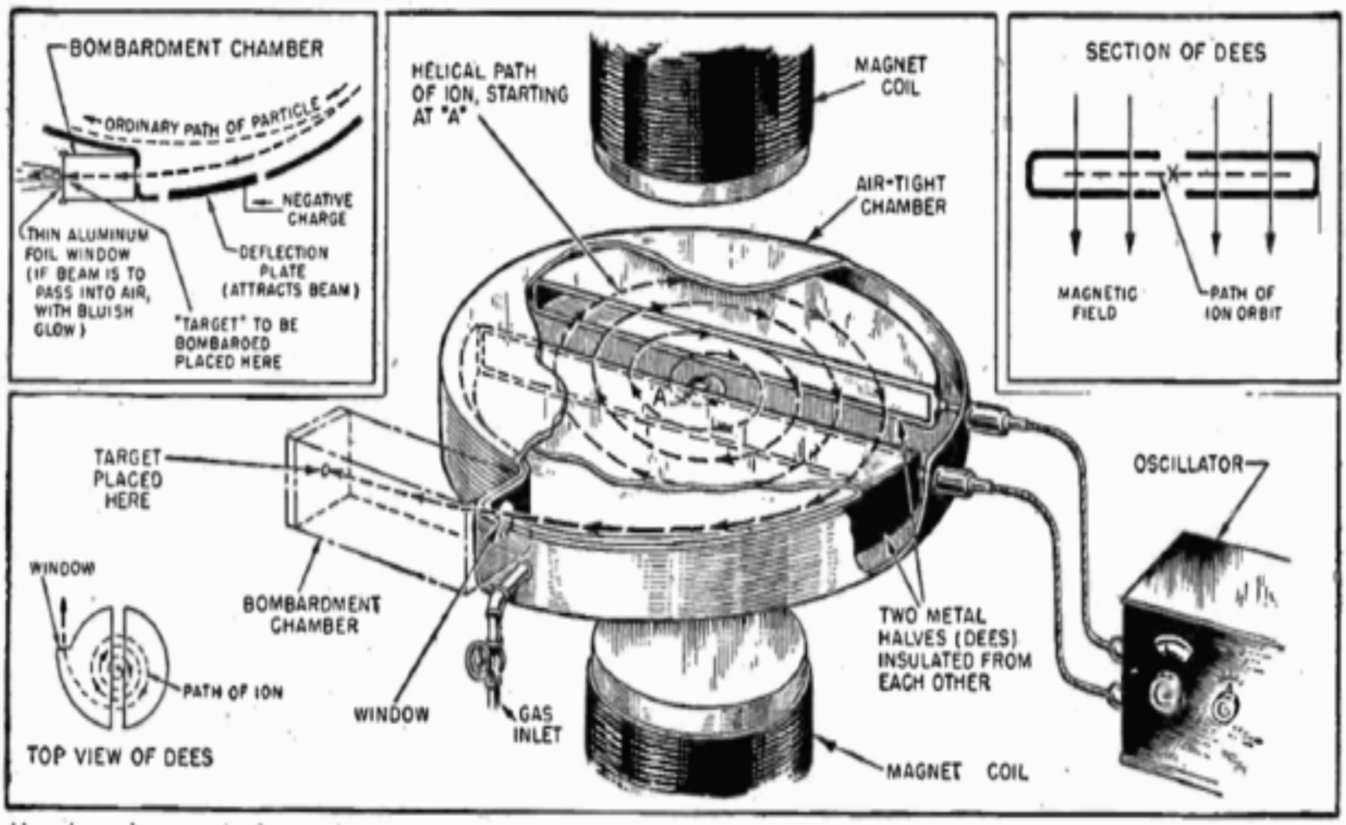
2. Allure des trajectoires des particules de vitesse $\vec{v} \neq \vec{v_0}$.



Si $v < v_0$ alors $|q v_0 B| < E$. q étant <0, la particule est déviée dans le sens des $y \nearrow$ initialement. Com

Si $v < v_0$ alors $|q v_0 B| > E$. q étant <0, la particule est déviée dans le sens des $y \searrow$ initialement.

M4 – le cyclotron



1. Pulsation cyclotron ω_0

Syst : $M(m, q)$

Ref : $\mathcal{R}$, galiléen

Inventaire des forces : force de Lorentz (partie magnétique) : $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Analyse dimensionnelle : $[\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}] = [\vec{a}] = LT^{-2} \Leftrightarrow [\frac{qB}{m}] = T^{-1}$

$\Rightarrow$ on pose $\boxed{\omega_0 = \frac{|q|B}{m}}$ la pulsation cyclotron

A.N. : pour un électron $e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1,66 \times 10^{-27}$ kg et pour $B = 1$ T.

$\omega_0 = 96,4 \times 10^6$ rad.s^{-1}

Le mouvement étant circulaire uniforme, la vitesse vaut, en norme :

$v = v_0 = R\omega_0 \Rightarrow R = \frac{v_0}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$

2.1. Un proton est injecté en O sans vitesse initiale. Dans l'interaction entre les D, le proton est accéléré par la tension $V_m \cos(\omega t + \varphi) = V_m \cos\varphi$ (à $t=0$). Le champ magnétique $\vec{B}$ des D vise à ramener la particule dans la zone d'accélération. En l'absence de synchronisation, la valeur et le signe de

la tension $V(t)$ seront aléatoires : globalement la particule sera autant accélérée que freinée. Si on veut qu'elle accélère, il faut qu'à chaque demi-tour, la tension change de signe soit : $\boxed{\omega = \omega_0}$
le proton est alors accéléré par une tension $\pm V_m \cos\varphi$ à chaque demi-tour, l'accélération est optimale si $V_m \cos\varphi = V_m$ soit $\boxed{\varphi = 0}$

2.2. $E_{c\,max} = ?$ Lorsque la vitesse du proton ↗, son rayon de courbure $R = \frac{mv}{eB}$ ↗. Il faut :

$$R \leq r \Leftrightarrow \frac{mv}{eB} \leq r \Leftrightarrow v < \frac{eBr}{m} \Leftrightarrow E_c \leqslant \frac{(eBr)^2}{2m}$$

soit $\boxed{E_{c\,max} = \frac{(eBr)^2}{2m}.}$ A.N. $E_{c\,max} = 12\ MeV$

2.3. Pour fournir en une fois cette énergie au proton, il faudrait appliquer la tension V_0 tq :

$$E_{c\,max} = eV_0 \Leftrightarrow \boxed{V_0 = \frac{E_{c\,max}}{e}}$$

A.N. : $V_0 = 12\ MV$ Beaucoup !
(par def de l'eV !)

2.4. Durée de parcours. Soit N le nombre de tours réalisés par le proton dans le cyclotron. Chaque tour est parcouru en un temps $\frac{T}{2}$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{eB}{m}$ indépendant de la vitesse du proton. En notant τ la durée du parcours, il vient :

$$\tau = \frac{NT}{2} = \frac{N\pi}{\omega_0}.$$

Reste à déterminer N.
- A chaque demi-tour, le proton reçoit l'énergie eV_m.
- A la sortie du cyclotron, au bout de $2N\frac{1}{2}$ tours, il a reçu l'énergie $E_{c\,max}$.

D'où :

$$E_{c\,max} = 2NeV_m \Leftrightarrow \boxed{N = \frac{E_{c\,max}}{2eV_m}.}$$

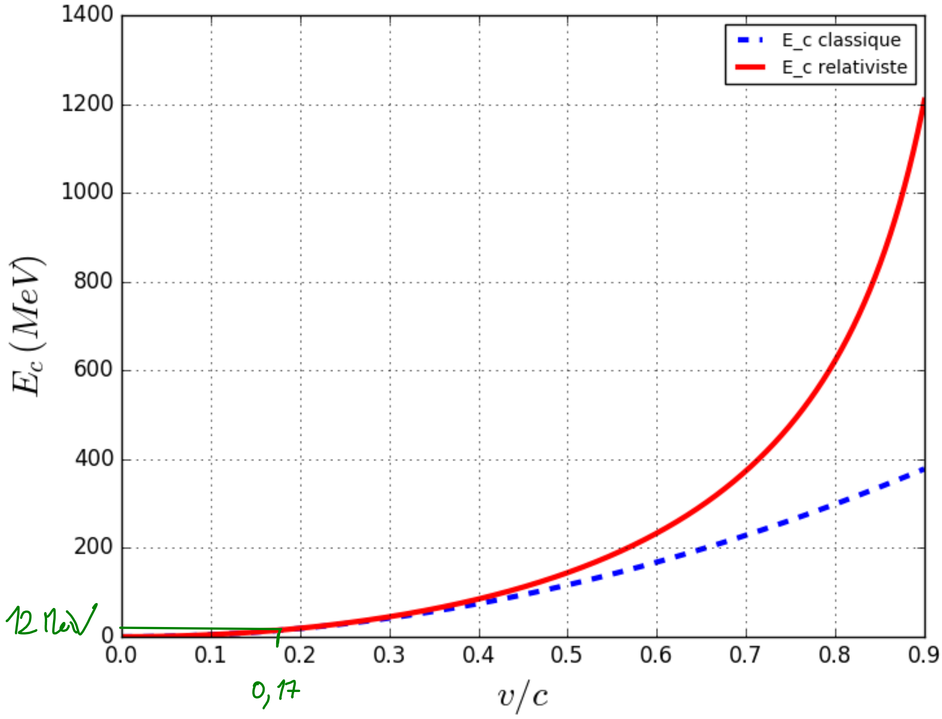
A.N. : 600 tours

Finalement :

$$\boxed{\tau = \frac{\pi E_{c\,max}}{2e\omega_0 V_m}.}$$

A.N. : $\tau = 19{,}6\ \mu s$

3./ A-t-on eu raison de se placer dans le cadre de la mécanique classique ?



$Ec_{max} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 Ec_{max}}{m}}}$

A.N. : $v = 5 \times 10^7 \ m.s^{-1}$
$\approx 0,17\ c$

Graphiquement, l'approximation de la mécanique newtonienne épouse bien les résultats de mécanique relativiste pour $v \leq 0,17c$.
Les calculs précédents sont justifiés.