

Mouvement dans un champ de force centrale. Champs newtoniens.

20

L'objet de ce chapitre est l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative et plus particulièrement à une force newtonienne. Les champs newtoniens sont de première importance puisqu'ils régissent les mouvements des planètes autour du Soleil et qu'ils interviennent lors de l'interaction entre deux particules chargées.

1 Force centrale conservative

1.1 Qu'est-ce qu'une force centrale conservative ?

a) Notations

Soit $M(m)$ un point matériel étudié dans le référentiel \mathcal{R} galiléen et O un point fixe de \mathcal{R} . On note \vec{OM} son vecteur position, \vec{v} sa vitesse, $\vec{p} = m\vec{v}$ sa quantité de mouvement, \vec{a} son accélération et $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ son moment cinétique en O .

M est soumis à la force \vec{f} supposée être une **force centrale conservative** de centre O .

b) Définition

Une force centrale de centre O est une force dont la droite d'action passe constamment par O .

La force \vec{f} est alors colinéaire au vecteur \vec{OM} et les coordonnées adaptées au problème sont les coordonnées sphériques d'origine O . En posant $\|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$, la force s'écrit :

$$\vec{f} = f_r(r)\vec{u}_r.$$

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle E_p définie par la relation :

$$dE_p = -\delta W(\vec{f}) = -\vec{f} \cdot d\vec{OM}.$$

En coordonnées sphériques, on peut alors écrire :

$$dE_p = -\vec{f} \cdot d\vec{OM} = -f_r(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{OM}.$$

$\vec{u}_r \cdot d\vec{OM}$ est le déplacement infinitésimal radial de M dessiné sur la figure 20.1. Il vaut dr . On en déduit :

$$dE_p = -f_r(r)dr \Leftrightarrow f_r(r) = -\frac{dE_p}{dr}.$$

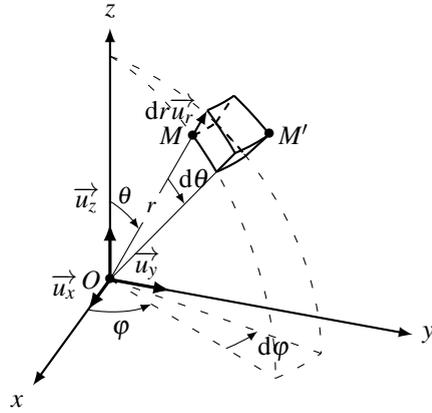


Figure 20.1 – Coordonnées sphériques et déplacement radial. M' est tel que $\vec{MM}' = d\vec{OM}$.

En coordonnées sphériques, une force centrale conservative s'écrit :

$$\vec{f} = f_r(r)\vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r. \quad (20.1)$$

On peut noter que le problème est à symétrie sphérique de centre O et que la force et l'énergie potentielle ne dépendent que de la coordonnée radiale r .

1.2 Exemples de forces centrales conservatives

Dans ce paragraphe, on décrit les forces centrales conservatives les plus courantes.

a) Force d'interaction gravitationnelle

Soit O un point matériel fixe de masse m_1 et M un point matériel de masse m_2 . On note $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante gravitationnelle. La force gravitationnelle exercée par $O(m_1)$ sur $M(m_2)$ est donnée par la relation :

$$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. Elle est portée par la droite (OM) . Il s'agit donc d'une force centrale de centre O . Elle est également conservative et, d'après l'équation (20.1), elle dérive de l'énergie potentielle E_p telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(-\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r} \right) \implies E_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r},$$

en fixant la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini.

b) Force d'interaction coulombienne

Soit O un point matériel fixe de charge q_1 et M un point matériel de charge q_2 . On note $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ la permittivité du vide. La force coulombienne exercée par $O(q_1)$ sur $M(q_2)$ est donnée par la relation :

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. Elle est portée par la droite (OM) . Il s'agit donc d'une force centrale de centre O . Elle est également conservative et, d'après l'équation (20.1), elle dérive de l'énergie potentielle E_p telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \implies E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

en fixant la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini.

Le module des forces gravitationnelle et coulombienne est proportionnel à l'inverse du carré de la distance OM . On parle de forces en $\frac{1}{r^2}$. Ce sont des forces newtoniennes.

Les forces gravitationnelle et coulombienne sont un type particulier de forces centrales conservatives appelées **forces newtoniennes**. Elles s'expriment en coordonnées sphériques sous la forme :

$$\vec{f} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$$

et dérivent de l'énergie potentielle :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r}.$$

c) Force de rappel élastique (force harmonique)

Soit O un point fixe et M un point matériel mobile lié à O par une force de rappel élastique :

$$\vec{f} = -k(r - r_0) \vec{u}_r = -m\omega_0^2 (r - r_0) \vec{u}_r$$

où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. Cette force est portée par la droite (OM) à tout instant. Elle est donc centrale de centre O . Elle est également conservative et, d'après l'équation (20.1), elle dérive de l'énergie potentielle E_p telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = k(r - r_0) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right).$$

On choisit généralement la référence d'énergie potentielle nulle en $r = r_0$, ce qui conduit à :

$$E_p = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r - r_0)^2.$$

1.3 Observations de mouvements à force centrale conservative

La première étude des mouvements à force centrale conservative est l'étude des trajectoires des planètes du système solaire. L'analyse scientifique précise de ces mouvements remonte au XVII^e siècle. Elle est résumée en trois lois énoncées par J. Kepler en 1609 et 1618.

a) Les lois expérimentales de Kepler

Ces lois énoncent les caractéristiques principales des mouvements des planètes soumises à l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil. Elles font appel à la notion d'ellipse qui est définie dans l'annexe mathématique.

Loi des orbites : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Loi des aires : Les aires balayées par le segment $[SP]$ (où S représente le Soleil et P une planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

Loi des périodes : Le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe a de sa trajectoire elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = Cte.$$

On peut calculer cette constante à l'aide des paramètres du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil à savoir :

- sa période $T = 1$ an,
- la distance Terre - Soleil qui définit l'unité astronomique $1 \text{ ua} = 150.10^6 \text{ km}$.

On trouve alors $\frac{T^2}{a^3} = \frac{(1 \text{ an})^2}{(1 \text{ ua})^3} = \frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{(150.10^9)^3} = 2,9.10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.

La valeur obtenue est valable pour l'ensemble des planètes du système solaire.

Une partie de ces lois s'applique à tous les mouvements à force centrale conservative. La nature de la trajectoire est cependant spécifique de la dépendance en $\frac{1}{r^2}$ de l'attraction gravitationnelle et ne s'applique donc qu'aux forces newtoniennes. Le but de ce cours est de démontrer une partie de ces résultats à partir des caractéristiques de la loi d'attraction gravitationnelle.

b) Quelques données sur les planètes du système solaire

Pour commencer, la culture générale d'un scientifique comporte quelques connaissances sur le système solaire et il est bien de connaître :

- le nom et l'ordre des planètes du système solaire. Pour cela existe de nombreuses phrases mnémotechniques comme « **Me Voilà Tout Mouillé, J'étais Sous Un Nuage** » ;
- la masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24} \text{ kg}$, son rayon $R_T = 6,4.10^3 \text{ km}$, la distance Terre-Soleil $D_{TS} = 1 \text{ ua} = 150.10^6 \text{ km}$ et la masse du Soleil $M_S = 2,0.10^{30} \text{ kg}$.

On peut également noter que les excentricités e des trajectoires des planètes sont faibles. Par conséquent, leurs orbites sont quasi-circulaires. En effet, e caractérise l'écart entre un cercle et une ellipse : l'ellipse est réduite à un cercle lorsque $e = 0$ et son allongement augmente

lorsque e augmente. On peut se rendre compte de cette propriété sur la figure 20.2 et quelques propriétés des ellipses sont détaillées dans l'annexe mathématique. On remarque que, lorsque $e \leq 0,2$, l'ellipse est très proche d'un cercle dont le centre est décalé par rapport à S .

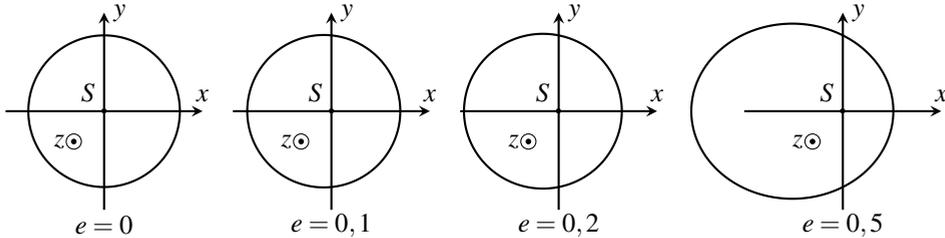


Figure 20.2 – Évolution de la forme d'une ellipse de foyer S en fonction de son excentricité e . Les orbites des planètes du système solaire ont une excentricité inférieure ou égale à 0,21.

| | Mercure | Venus | Terre | Mars | Jupiter | Saturne | Uranus | Neptune |
|-------|---------|-------|-------|-------|---------|---------|--------|---------|
| d | 57,9 | 108 | 150 | 228 | 778 | 1430 | 2870 | 4500 |
| e | 0,206 | 0,007 | 0,017 | 0,093 | 0,005 | 0,055 | 0,048 | 0,009 |
| a | 0,387 | 0,723 | 1 | 1,524 | 5,202 | 9,555 | 19,22 | 30,11 |
| T_1 | 0,241 | 0,615 | 1 | 1,882 | 11,86 | 29,46 | 84,02 | 164,8 |

Tableau 20.1 – Principales caractéristiques des orbites des planètes du système solaire : d = rayon moyen en million de km, e = excentricité, a demi grand axe en unité astronomique, T_1 = période de révolution sidérale en année.

2 Généralités sur les forces centrales conservatives

2.1 Conséquence du caractère central de la force

Dans ce paragraphe, on montre que le caractère central de la force implique la conservation du moment cinétique en O du système. On en déduit que le mouvement est plan et vérifie la loi des aires.

a) Conservation du moment cinétique

On applique le théorème du moment cinétique au système M de masse m par rapport au point O fixe dans le référentiel \mathcal{R} galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}).$$

\vec{f} est une force centrale. Par définition, elle est colinéaire au vecteur \vec{OM} . D'après les propriétés du produit vectoriel entre vecteurs colinéaires, on trouve $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$.

Le moment cinétique par rapport au centre de force O :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

est conservé au cours du mouvement. C'est une intégrale première du mouvement.

On peut déterminer la valeur du moment cinétique en O en utilisant un instant particulier pour lequel on connaît la position et la vitesse. On la détermine souvent à l'aide des conditions initiales qui précisent la position initiale \vec{OM}_0 ainsi que la vitesse initiale \vec{v}_0 .

b) Planéité de la trajectoire

La conservation du moment cinétique implique que le mouvement est plan.

En effet, dans le cas général, les conditions initiales (position \vec{OM}_0 et vitesse \vec{v}_0) permettent de définir un plan $\mathcal{P} = (O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ et d'évaluer le moment cinétique à l'instant initial :

$$\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0.$$

Par définition du produit vectoriel, \vec{L}_O est perpendiculaire au plan \mathcal{P} et on peut redéfinir le plan \mathcal{P} comme le plan passant par O et perpendiculaire à \vec{L}_O . Or, le moment cinétique \vec{L}_O est conservé au cours du mouvement et, par définition du produit vectoriel, \vec{OM} est perpendiculaire à \vec{L}_O . Il s'en suit que le point M est situé dans le plan passant par O et perpendiculaire à \vec{L}_O fixe. M est donc situé dans le plan \mathcal{P} à tout instant. Son mouvement est plan.

c) Cas des coordonnées polaires

En pratique, le moment cinétique \vec{L}_O étant conservé et non nul, on pose $\vec{u}_z = \frac{\vec{L}_O}{\|\vec{L}_O\|}$. La

définition de \vec{L}_O et les propriétés du produit vectoriel imposent à \vec{OM} d'être perpendiculaire à \vec{L}_O donc à \vec{u}_z . Le point M appartient alors au plan passant par O et perpendiculaire à \vec{u}_z , c'est-à-dire au plan (Oxy) . Les coordonnées adaptées à ce type de problème sont les coordonnées polaires d'origine O qui est le centre de la force \vec{f} et on obtient :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta,$$

d'où on tire :

$$\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Remarque

Les forces centrales de centre O sont à symétrie sphérique de centre O : le problème reste inchangé par une rotation quelconque autour de O . La conservation du moment cinétique \vec{L}_O implique que l'axe (O, \vec{L}_O) est un axe de symétrie du problème. On choisit

généralement d'orienter l'axe (Oz) dans le même sens que (O, \vec{L}_O) et les coordonnées cylindriques sont alors les coordonnées naturelles. L'orientation de l'axe (Oz) dans le sens de \vec{L}_O implique que $\dot{\theta}$ est positif donc que θ est croissant. Le mouvement est réalisé dans le sens direct autour de (Oz) .

d) Loi des aires

Le moment cinétique en O ainsi que la masse m sont conservés. La quantité $r^2 \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$ l'est donc également.

On définit la constante des aires : $\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$.

Cette constante, exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, peut être évaluée à l'instant initial : $\mathcal{C} = \|\vec{OM}_0 \wedge \vec{v}_0\|$. La dimension de $\mathcal{C} dt$ est celle d'une aire que l'on interprète géométriquement à l'aide de la figure 20.3.

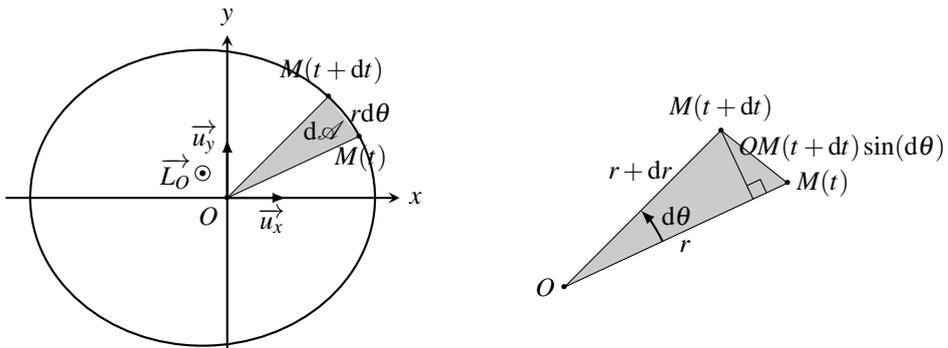


Figure 20.3 – Aire $d\mathcal{A}$ balayée par le rayon vecteur \vec{OM} pendant dt .

L'aire $d\mathcal{A}$ balayée par le rayon vecteur \vec{OM} pendant dt est grisée sur la figure 20.3. Elle correspond à l'aire du triangle $OM(t)M(t+dt)$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t)\| \|\vec{OM}(t+dt)\| \sin(d\theta) \\ &= \frac{1}{2} r^2 d\theta, \end{aligned}$$

en assimilant $\sin(d\theta)$ à $d\theta$ et $r+dr$ à r . L'aire balayée pendant dt vaut donc :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{C} dt.$$

La constante $\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\mathcal{C}}{2}$ est appelée **vitesse aréolaire**. La loi des aires stipule que la vitesse aréolaire est constante et précise que sa valeur est $\frac{\mathcal{C}}{2}$.

La conservation du moment cinétique implique la loi des aires : les aires balayées par le rayon vecteur pendant des intervalles de temps égaux de durée Δt sont égales et valent :

$$\Delta \mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2} \Delta t.$$

2.2 Conséquence du caractère conservatif de la force

Dans ce paragraphe, on montre que le caractère conservatif de la force implique la conservation de l'énergie mécanique du système. On en déduit que l'on peut étudier qualitativement le mouvement radial du point M en introduisant une énergie potentielle effective.

a) L'énergie mécanique est conservée

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système M de masse m dans le référentiel \mathcal{R} galiléen. M n'est soumis qu'à la seule force \vec{f} qui est conservative et dérive de l'énergie potentielle E_p . On en déduit :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c + E_p}{dt} = 0.$$

L'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

est conservée au cours du mouvement. C'est une intégrale première du mouvement.

On détermine la valeur de l'énergie mécanique à l'aide des conditions initiales qui précisent la position initiale et donc l'énergie potentielle initiale E_{p0} , ainsi que la vitesse initiale et donc l'énergie cinétique initiale E_{c0} .

b) Notion d'énergie potentielle effective

On a vu précédemment que le mouvement est plan et qu'on l'étudie en coordonnées polaires. Dans ces conditions, l'énergie potentielle ne dépend que de r et on la note $E_p(r)$. On utilise les relations cinématiques $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ pour calculer l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. On aboutit alors à l'équation énergétique :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r),$$

puis au système d'équations du mouvement :

$$\begin{cases} \mathcal{C} &= r^2\dot{\theta} \\ E_m &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r). \end{cases}$$

Le problème étant à deux degrés de liberté r et θ , la connaissance de ces deux équations permet de résoudre complètement le problème à condition de connaître la fonction $E_p(r)$.

c) Étude qualitative du mouvement radial

Dans un premier temps, on ne cherche pas à résoudre complètement le problème mais uniquement à trouver l'évolution de la distance radiale $\|\vec{OM}\| = r$. Pour cela, on élimine θ entre les deux équations du système précédent. On écrit : $\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{r^2}$ et on remplace dans l'expression de l'énergie mécanique pour obtenir l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{\mathcal{C}^2}{r^4} \right) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r).$$

On pose alors :

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r)$$

et on aboutit à l'équation :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r).$$

$E_{p_{\text{eff}}}$ est la somme de la partie de l'énergie cinétique liée au mouvement orthoradial et de l'énergie potentielle. Elle est homogène à une énergie et s'apparente à l'énergie potentielle utile pour étudier le mouvement radial de M . On l'appelle énergie potentielle effective.

Le mouvement radial s'apparente à un mouvement conservatif à un degré de liberté dans une **énergie potentielle effective** :

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + E_p(r).$$

Ce type d'équation a été étudié dans le chapitre sur l'énergie. On applique la même méthode. On utilise la conservation de l'énergie mécanique et le fait que le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ est toujours positif pour étudier qualitativement le mouvement radial et déterminer l'ensemble des positions accessibles. Pour cela, il est nécessaire de connaître l'évolution de l'énergie potentielle en fonction de r . On présente la méthode sur le cas particulier de l'attraction gravitationnelle, mais elle peut être adaptée à d'autres forces.

3 Cas particulier de l'attraction gravitationnelle

3.1 Position du problème

On s'intéresse au mouvement d'un point M de masse m en interaction gravitationnelle avec un astre de masse M_A situé en O . On se place dans la situation où $M_A \gg m$ de sorte que l'action de la masse m sur M_A ne permet pas de mettre M_A en mouvement. Dans ce cas, on a vu au paragraphe 1.2, que le point M est soumis à la force d'attraction gravitationnelle : $\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r^2} \vec{u}_r$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r}$.

Cette force est une force centrale conservative. Le mouvement satisfait donc aux conservations du moment cinétique et de l'énergie mécanique. Le mouvement est plan, on l'étudie en

coordonnées polaires et on aboutit aux équations du mouvement :

$$\begin{cases} \mathcal{C} &= r^2 \dot{\theta} \\ E_m &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \mathcal{G} \frac{mM_A}{r}. \end{cases} \quad (20.2)$$

3.2 Étude qualitative du mouvement radial

On écrit l'énergie mécanique en éliminant $\dot{\theta}$ grâce à la constante de aires \mathcal{C} :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_A}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r)$$

où

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_A}{r}.$$

a) Tracé de la courbe d'énergie potentielle effective

On étudie la courbe $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ pour pouvoir la tracer. Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{dE_{p_{\text{eff}}}}{dr} = -m \frac{\mathcal{C}^2}{r^3} + \mathcal{G} \frac{mM_A}{r^2}.$$

Elle s'annule en $r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}M_A}$ où elle atteint la valeur :

$$E_{\min} = -\frac{m}{2} \frac{\mathcal{G}^2 M_A^2}{\mathcal{C}^2} = -\frac{\mathcal{G} M_A m}{2r_0}.$$

On prend r_0 comme échelle des distances et $E_0 = -E_{\min} = \mathcal{G} M_A m / 2r_0$ comme échelle d'énergie. On rend l'expression de l'énergie potentielle effective adimensionnelle en introduisant : $E_{p_{\text{eff}}}^* = \frac{E_{p_{\text{eff}}}}{E_0}$ et $r^* = \frac{r}{r_0}$. Or, $r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}M_A} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{C}^2}{r_0} = \mathcal{G}M_A$ donc :

$$\frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r_0^2} \frac{1}{r^{*2}} = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G}M_A}{r_0} \frac{1}{r^{*2}} = E_0 \frac{1}{r^{*2}}.$$

Par ailleurs, on a $-\mathcal{G} \frac{mM_A}{r} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0} \frac{1}{r^*} = -E_0 \frac{1}{r^*}$. $E_{p_{\text{eff}}}^*(r^*)$ est alors égal à :

$$E_{p_{\text{eff}}}^*(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*},$$

que l'on a représentée à l'aide d'un logiciel dédié sur la figure 20.4.

b) Analyse de la courbe d'énergie potentielle effective

On distingue alors quatre possibilités :

- si $E_m < E_{\min}$, le mouvement est impossible ;
- si $E_m = E_{\min}$, le mouvement est réalisé à $r = r_0$ fixé. Comme $\mathcal{C} = r_0^2 \dot{\theta}$, on obtient :

$$\dot{\theta} = \frac{\mathcal{C}}{r_0^2} = Cte.$$

r et $\dot{\theta}$ étant fixés, le mouvement est circulaire et uniforme ;

- si $0 > E_m > E_{\min}$, l'ensemble des distances r accessibles est un intervalle borné compris entre les positions $r_1 = r_1^* r_0$ et $r_2 = r_2^* r_0$ où r_1^* et r_2^* sont définies sur la figure 20.4. Le système est dans un **état lié**. Il reste dans le puits de potentiel créé par l'astre A ;
- si $E_m \geq 0$, l'ensemble des distances r accessibles est un intervalle de taille infinie de la forme $[r_3, +\infty[$ avec $r_3 = r_3^* r_0$ où r_3^* est définie sur la figure 20.4. Le système est dans un **état de diffusion**. Il peut sortir du puits de potentiel créé par l'astre A.

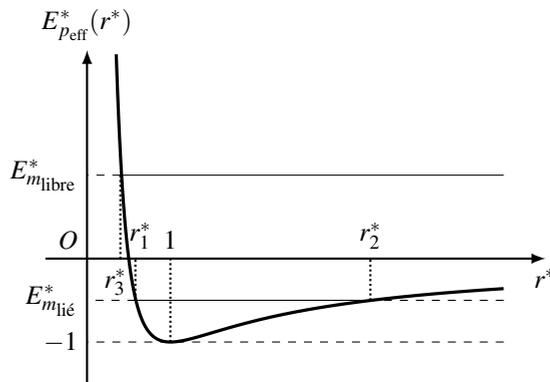


Figure 20.4 – Courbe d'énergie potentielle effective.

4 Étude directe de la trajectoire circulaire

La trajectoire circulaire est très importante car elle permet de comprendre la majorité des phénomènes concernant les états liés tout en restant simple du point de vue mathématique. Par ailleurs, les trajectoires des planètes sont très proches de trajectoires circulaires centrées sur le Soleil. Le caractère circulaire des trajectoires permet d'en faire une étude directe simple.

4.1 Position du problème

On restreint l'étude du problème précédent au cas où la trajectoire de M est un cercle de rayon r_0 et centre O , centre attracteur de la force. Le point M est soumis à la seule force d'attraction gravitationnelle $\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2} \vec{u}_r$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r}$.

On a démontré la planéité du mouvement mais on peut remarquer que postuler sa circularité

implique d'admettre sa planéité puisqu'un cercle est une courbe plane. On étudie alors le mouvement en coordonnées polaires d'origine O dans le plan de la trajectoire circulaire.

À $t = 0$, le point M est situé en M_0 et possède une vitesse \vec{v}_0 . On choisit la référence des angles et l'orientation du plan comme sur la figure ci-contre de sorte que :

$$\vec{OM}_0 = r_0 \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y,$$

avec $v_0 > 0$. Le point M est repéré à l'instant t à l'aide des coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{OM} &= r_0 \vec{u}_r \\ \vec{v} &= r_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{r_0} \vec{u}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta. \end{cases}$$

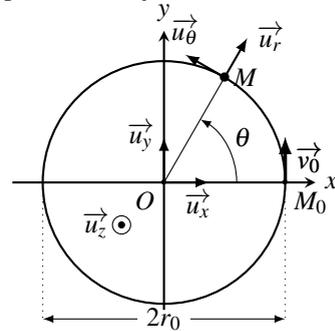


Figure 20.5 – Mouvement circulaire.

4.2 Étude à partir du principe fondamental de la dynamique

a) Expression de la vitesse sur la trajectoire

On applique le principe fondamental de la dynamique à M de masse m :

$$m \vec{a} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2} \vec{u}_r.$$

On projette alors sur \vec{u}_r et on obtient :

$$-m \frac{v^2}{r_0} = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0^2}, \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}.$$

La norme de la vitesse $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}$ est donc constante. Le mouvement est uniforme.

Les trajectoires circulaires de rayon r_0 autour d'un astre attracteur de masse M_A sont parcourues à vitesse uniforme v_0 . Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir la relation liant r_0 et v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}.$$

Pour mettre en orbite un satellite artificiel sur une trajectoire circulaire autour de la Terre, il faut donc contrôler parfaitement la vitesse de satellisation, à la fois en direction et en norme.

b) Expression des grandeurs énergétiques

On peut établir les expressions des différentes grandeurs énergétiques :

- l'énergie potentielle vaut : $E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$;
- l'énergie cinétique est égale à : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$;
- l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}. \quad (20.3)$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire, toutes ces énergies sont constantes et s'expriment en fonction de r_0 à l'aide de l'énergie caractéristique $E_0 = \mathcal{G} \frac{mM_A}{r_0}$.

Généralisation aux trajectoires elliptiques (MPSI) Dans le cas d'une trajectoire elliptique, les énergies cinétique et potentielle varient au cours du temps et seule l'énergie mécanique est conservée. On admet que l'expression de l'énergie mécanique que l'on vient d'établir reste valable, à condition de remplacer le rayon r_0 de la trajectoire circulaire par le demi grand-axe a de l'orbite elliptique.

L'énergie mécanique d'une planète de masse m en gravitation autour d'un astre de masse M_A vaut :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}$$

où a représente le demi grand-axe de la trajectoire elliptique.

Si l'on connaît l'énergie mécanique d'un satellite, cette relation permettra de déterminer le demi-grand axe de sa trajectoire.

c) Troisième loi de Kepler : loi des périodes

La période de révolution de M autour de O est le temps nécessaire à M pour parcourir la trajectoire de circonférence $2\pi r_0$ à la vitesse constante v_0 :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_A}{r_0}}} \implies \frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A}.$$

Généralisation aux trajectoires elliptiques (MPSI) On admet que la relation établie ici reste valable pour les trajectoires elliptiques, à condition de remplacer le rayon r_0 de la trajectoire circulaire par le demi grand-axe a de l'orbite elliptique.

Pour un corps en orbite elliptique autour d'un astre attracteur de masse M_A , le rapport du carré du demi grand-axe a au cube de la période de révolution T ne dépend que du produit $\mathcal{G}M_A$ et vaut :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_A},$$

indépendamment du corps qui gravite autour de l'astre attracteur.

Exemple

Pour un corps qui gravite autour du Soleil, on peut déterminer ce rapport en utilisant les paramètres de l'orbite terrestre $T = 1$ an et $a = 1$ ua = $150 \cdot 10^6$ km. On trouve alors :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(1 \text{ an})^2}{(1 \text{ ua})^3} = \frac{(365 \times 24 \times 3600)^2}{(150 \cdot 10^9)^3} = 2,9 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}.$$

La mesure de $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ permet ensuite de déterminer la masse du Soleil :

$$M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G} T^2} = \frac{4 \times 3,14^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 2,9 \cdot 10^{-19}} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Exemple

Pour un corps qui gravite autour de la Terre de masse M_T , on obtient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}.$$

Le produit $\mathcal{G}M_T$ est égal à $\mathcal{G}M_T = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. La période de révolution de la Lune autour de la Terre (mois lunaire sidéral) vaut $T = 27,3$ jours. On en déduit le demi grand-axe de l'orbite de la Lune que l'on peut assimiler à la distance Terre - Lune :

$$a = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3,986 \cdot 10^{14} \times (27,3 \times 24 \times 3600)^2}{4 \times 3,14^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 383 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

Les mesures actuelles donnent $a = 384,399 \cdot 10^3$ km.

Ces exemples montrent la puissance de la troisième loi de Kepler pour déterminer un grand nombre de paramètres célestes. À ce titre, c'est une loi fondatrice en astronomie.

4.3 Application aux satellites géostationnaires

a) Caractéristiques des satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui reste constamment au-dessus d'un même point de la surface terrestre. Il paraît immobile à un observateur situé sur Terre. Pour maintenir cette caractéristique, il est guidé depuis la Terre à l'aide d'un système de contrôle d'altitude et d'orbite qui permet de compenser diverses perturbations de sa trajectoire. De ce fait, il utilise progressivement ses réserves de carburant qui finissent par s'épuiser et limitent sa durée d'exploitation. Tous les satellites géostationnaires sont placés sur une même orbite circulaire d'altitude $h = 35\,786$ km et de période de révolution égale à un jour sidéral soit 23 heures 56 minutes et 4 secondes. L'orbite géostationnaire est encombrée puisqu'il y a plus de 250 satellites situés sur cet orbite. De ce fait, le positionnement sur l'orbite doit être réalisé avec une précision d'environ 50 km et les opérateurs de ces satellites doivent les évacuer lorsqu'ils arrivent en fin de vie. L'immobilité apparente d'un satellite géostationnaire dans le référentiel terrestre lui permet de faire des observations continues d'une même zone (satellite

météorologique, satellite d'alerte) et d'être visé par une antenne parabolique fixée sur Terre (satellite de télécommunications ou de télédiffusion). Dans ce paragraphe, on va montrer que le maintien d'un satellite en position fixe dans le référentiel terrestre nécessite de réunir trois conditions :

- le plan de l'orbite doit être situé dans le plan de l'équateur ;
- le mouvement du satellite doit être synchrone avec le mouvement de rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles ;
- l'orbite doit être circulaire.

b) Le mouvement d'un satellite géostationnaire est situé dans le plan de l'équateur

L'étude du mouvement du satellite est effectuée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, on a montré que l'orbite est située dans un plan qui contient le centre d'attraction de la force gravitationnelle. Le plan du mouvement contient donc nécessairement le centre de la Terre.

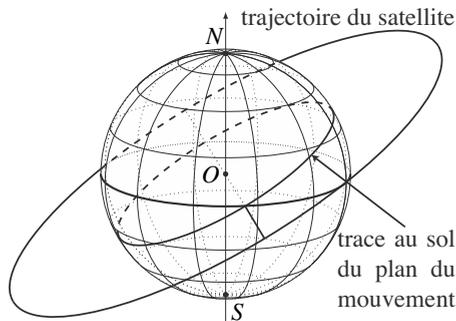


Figure 20.6 – Trajectoire d'un satellite inclinée par rapport au plan équatorial.

La figure 20.6 montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre, ainsi que l'intersection du plan du mouvement avec la sphère terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite est situé tantôt au dessus de l'hémisphère nord et tantôt au dessus de l'hémisphère sud. Il n'est pas immobile pour un observateur terrestre qui va, au minimum, observer un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite. Le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan équatorial de la Terre.

c) Sa vitesse angulaire est constante

Le mouvement se situant dans le plan de l'équateur, le satellite doit rester en permanence à la verticale d'un point P fixe de l'équateur. Le déplacement angulaire du satellite pendant une durée quelconque doit être le même que celui du point P . La vitesse angulaire du satellite sur son orbite est donc nécessairement égale à la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

La rotation propre de la Terre autour de son axe Nord-Sud est uniforme à la vitesse angulaire :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sidéral}}},$$

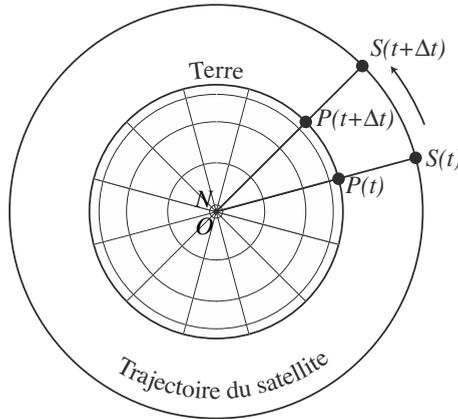


Figure 20.7 – Trajectoire d’un satellite géostationnaire vue du pôle Nord. Le satellite S suit le point de l’équateur P dans son mouvement circulaire et uniforme.

où la période $T_{\text{sidéral}}$ correspond au jour sidéral, durée nécessaire à la Terre pour faire un tour sur elle-même. La vitesse angulaire d’un satellite géostationnaire est constante. Sa période de révolution est égale à un jour sidéral.

d) L’orbite est circulaire

Le mouvement étant à force centrale, il suit la loi des aires et la constante des aires \mathcal{C} vaut :

$$\mathcal{C} = r^2 \dot{\theta}.$$

La vitesse angulaire du satellite étant constante, la distance r l’est également. Le mouvement orbital d’un satellite géostationnaire est circulaire.

e) Durée de la révolution du satellite : notion de jour sidéral

Pour caractériser complètement le mouvement du satellite, on doit déterminer la durée exacte de la rotation propre de la Terre. En première approximation, cette durée correspond à la durée d’un jour soit 24 heures. Quand on veut être plus précis, il est nécessaire de tenir compte de la révolution de la Terre sur son orbite. Ainsi en un jour, la Terre fait un petit peu plus qu’un tour sur elle-même comme on peut le voir sur la figure 20.8.

En $T = 24$ h, la Terre tourne sur elle-même de $2\pi + \alpha$ où α est l’angle dont elle s’est déplacée sur son orbite autour du Soleil, c’est-à-dire $\left(\frac{1}{365,25}\right)^{\text{ième}}$ de tour (le 0,25 provient des années bissextiles). On a alors : $\alpha = \frac{2\pi}{365,25}$ puis

$$T_{\text{sidéral}} = T \frac{2\pi}{2\pi + \alpha} = T \frac{1}{1 + \frac{1}{365,25}} = T \frac{365,25}{366,25} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}.$$

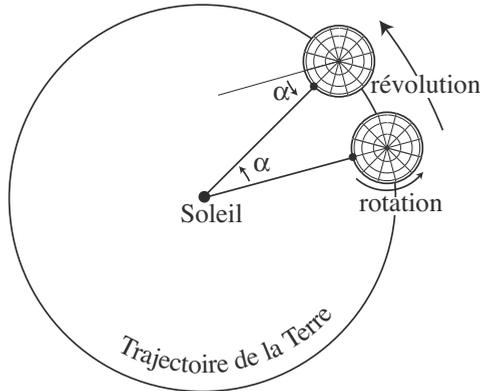


Figure 20.8 – Mouvement de la Terre en 24 heures. Le Soleil est au zénith d'un point de l'équateur terrestre à midi des jours j et $j + 1$. Du fait de la révolution de la Terre sur son orbite autour du Soleil, la Terre tourne sur elle-même d'un angle $2\pi + \alpha$ en 24 h.

f) Rayon de l'orbite géostationnaire

Connaissant la période de révolution d'un satellite géostationnaire : $T_{\text{sidéral}} = 86\,164$ s, et le produit $\mathcal{G}M_T = 3,9860 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, on peut déterminer le rayon $r_{\text{géo}}$ de son orbite à l'aide de la troisième loi de Kepler : $\frac{T_{\text{sidéral}}^2}{r_{\text{géo}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$. On trouve donc :

$$r_{\text{géo}} = \left(\frac{T_{\text{sidéral}}^2 \mathcal{G}M_T}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{86164^2 \times 3,9860 \cdot 10^{14}}{4 \times 3,14159^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42\,164 \text{ km.}$$

En retranchant le rayon de la Terre à l'équateur $R_T = 6378$ km, on en déduit son altitude :

$$h = r_{\text{géo}} - R_T = 35\,786 \text{ km.}$$

Un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre. Dans le référentiel géocentrique, il suit une trajectoire circulaire et uniforme dans le plan équatorial terrestre à l'altitude $h = 35\,786$ km avec une période égale au jour sidéral $T_{\text{sidéral}} = 23\text{h}56\text{min}4\text{s}$. Le centre de cette trajectoire est le centre de la Terre.

Il faut avoir en tête les ordres de grandeur suivant : $T = 24$ h et $h = 36\,000$ km.

4.4 Vitesses cosmiques

a) Vitesse minimale de mise en orbite

On peut remarquer, à l'aide de l'équation (20.3), que les trajectoires circulaires de rayon faible (orbites basses) sont celles pour lesquelles l'énergie mécanique est la plus faible. Pour cette raison, mettre un satellite en orbite basse depuis le sol terrestre nécessite moins d'énergie.

La **première vitesse cosmique** est une vitesse limite qui correspond à la vitesse minimale qu'il faut donner à un satellite pour le mettre en orbite autour de la Terre. Si la vitesse du satellite envoyé depuis la Terre est inférieure à cette vitesse, le satellite retombe sur Terre. Cette vitesse est égale à la vitesse v_1 d'un corps en orbite rasante autour de la Terre. On considère alors que l'altitude est négligeable devant le rayon terrestre R_T et que l'orbite est circulaire de rayon $r_0 \approx R_T$. La vitesse du satellite sur la trajectoire vaut donc :

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}.$$

Il faut connaître l'ordre de grandeur de cette vitesse sur Terre :

$$v_1 = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 8 \text{ km/s} \approx 30\,000 \text{ km/h.}$$

Remarque

Les orbites basses sont très utilisées pour les satellites artificiels. Elles sont contenues dans une zone située entre 200 et 2000 km d'altitude environ. Les orbites plus basses sont inutilisables à cause des frottements dus à l'atmosphère. Leur intérêt est multiple :

- la mise en orbite de satellites proches de la Terre est moins coûteuse en énergie et permet de satelliser de gros objets comme la station spatiale internationale ;
- les orbites proches de la Terre rendent les communications avec les satellites plus faciles et plus rapides (satellites de communication) ;
- la proximité de la Terre permet d'optimiser la résolution des instruments d'observation terrestre embarqués (imagerie terrestre, météorologie ou renseignement).

b) Vitesse de libération

La **deuxième vitesse cosmique** ou **vitesse de libération** est une autre vitesse limite. Elle correspond à la vitesse minimale nécessaire pour quitter l'attraction gravitationnelle de la Terre à partir du sol. Pour la déterminer, on considère que l'on donne au système l'énergie minimale lui permettant de s'éloigner à l'infini de son point de lancement situé sur Terre. Dans ces conditions, la conservation de l'énergie mécanique entre le sol terrestre (vitesse v_2 et $r = R_T$) et l'infini (vitesse v_∞ et $r = r_\infty$) s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r_\infty}.$$

Comme on cherche la vitesse minimale, on se place dans le cas où la vitesse à l'infini est quasi-nulle et on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = 0, \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_1.$$

Il faut connaître l'ordre de grandeur de cette vitesse sur Terre :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 6,7 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 11 \text{ km/s} \approx 40\,000 \text{ km/h.}$$

4.5 Complément : autres trajectoires envisageables (MPSI)

a) Détermination de la nature de la trajectoire par une méthode numérique

Dans ce paragraphe, on résout numériquement les équations du mouvement pour déterminer les différentes trajectoires possibles.

Équations sans dimension Pour résoudre numériquement le système d'équations du mouvement (20.2), on le rend adimensionnel en utilisant la longueur caractéristique $r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}M_A}$ et l'énergie caractéristique $E_0 = \frac{\mathcal{G}M_A m}{2r_0}$ définies au paragraphe 3.2. À partir de r_0 et de la constante des aires, on détermine une vitesse caractéristique $V = \frac{\mathcal{C}}{r_0}$ et un temps caractéristique $\tau = \frac{r_0}{V} = \frac{r_0^2}{\mathcal{C}}$. On pose alors $t^* = t/\tau$, $r^* = r/r_0$ et les équations du mouvement deviennent :

$$\mathcal{C} = \frac{r_0^2}{\tau} r^{*2} \frac{d\theta}{dt^*} \quad \text{et} \quad E_m = \frac{1}{2} m \frac{r_0^2}{\tau^2} \left(\frac{dr^*}{dt^*} \right)^2 + E_0 E_{p_{\text{eff}}}^*(r^*).$$

L'énergie potentielle effective adimensionnée $E_{p_{\text{eff}}}^*(r^*) = \frac{1}{r^{*2}} - \frac{2}{r^*}$ a été explicitée au paragraphe 3.2 et tracée sur la figure 20.4.

Comme $r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}M_A} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{C}^2}{r_0} = \mathcal{G}M_A$, on calcule $\frac{1}{2} m \frac{r_0^2}{\tau^2} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{C}^2}{r_0^2} = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G}M_A}{r_0} = E_0$.

On pose alors $\alpha = \frac{E_m}{E_0}$ et on obtient les équations adimensionnées suivantes :

$$\frac{d\theta}{dt^*} = \frac{1}{r^{*2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dr^*}{dt^*} \right)^2 = \alpha - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{1}{r^*}.$$

Pour des raisons de techniques numériques, il est plus facile de dériver la deuxième équation et d'effectuer la résolution numérique du système :

$$\frac{d\theta}{dt^*} = \frac{1}{r^{*2}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{r^{*3}} - \frac{1}{r^{*2}}.$$

Conditions initiales et domaine de variation des paramètres La courbe d'énergie potentielle effective de la figure 20.4 permet de limiter l'intervalle accessible à l'énergie mécanique E_m à $[-E_0, +\infty[$. α évolue donc dans l'intervalle $[-1, +\infty[$. Le point où M s'approche le plus de O permet d'établir les conditions initiales du mouvement puisqu'en ce point $\frac{dr^*}{dt^*} = 0$ et r^* vérifie $\alpha - \frac{1}{r^{*2}} + \frac{1}{r^*} = 0 \Rightarrow \alpha r^{*2} + 2r^* - 1 = 0$. On cherche la plus petite solution strictement positive de cette équation qui correspond la distance minimale séparant M de O . Lorsque $\alpha = 0$, la solution est évidemment $r^* = 0,5$.

Lorsque $\alpha \neq 0$, le discriminant $\Delta = 4 + 4\alpha$ est positif car $\alpha > -1$ et la plus petite solution positive est $r^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\alpha}$. Les conditions initiales sont donc :

$$\begin{cases} \frac{dr^*}{dt^*} = 0 \\ r^* = \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\alpha} \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \text{si } \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{dr^*}{dt^*} = 0 \\ r^* = 0,5 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad \text{si } \alpha = 0.$$

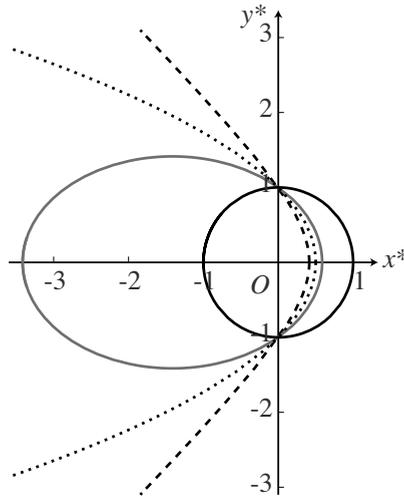


Figure 20.9 – Nature de la trajectoire en fonction de α . La trajectoire est circulaire pour $\alpha = -1$ (trait continu noir), elliptique pour $\alpha = -0,5$ (trait continu gris), parabolique pour $\alpha = 0$ (pointillés) et hyperbolique pour $\alpha = 1$ (tirets).

Tracé et analyse des solutions obtenues en fonction de l'énergie mécanique On trace alors les trajectoires pour α égal à -1, -0,5 et 1 qui correspondent aux énergies mécaniques tracées sur la figure 20.4 et pour une énergie mécanique nulle, c'est-à-dire $\alpha = 0$.

Les courbes obtenues sont des coniques de foyer O dont la nature dépend de la valeur de α :

- si $\alpha = -1 \Leftrightarrow E_m = E_{\min}$, la trajectoire est un cercle de centre O ,
- si $\alpha \in]-1, 0[\Leftrightarrow 0 > E_m > E_{\min}$, la trajectoire est une ellipse de foyer O ,
- si $\alpha = 0 \Leftrightarrow E_m = 0$, la trajectoire est une parabole de foyer O ,
- si $\alpha > 0 \Leftrightarrow E_m > 0$, la trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer O .

La valeur de α détermine entièrement la nature de la trajectoire. Les paramètres dimensionnés \mathcal{G} , M_A , m , \mathcal{C} et E_m n'interviennent pas indépendamment mais uniquement sous la forme de la combinaison $\alpha = \frac{E_m}{E_0} = \frac{2\mathcal{C}^2 E_m}{\mathcal{G}^2 M_A^2 m}$.

Il faut avoir conscience que la forme de la trajectoire dépend de la nature de la force et que les résultats obtenus ici ne sont valables que pour les forces newtoniennes en $\frac{1}{r^2}$.

b) Expression de l'énergie mécanique pour les trajectoires elliptiques

Dans ce paragraphe, on démontre l'expression de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique que l'on a admis au paragraphe 4.2. Pour cela, on utilise la courbe d'énergie potentielle effective vue au paragraphe 3 et reproduite figure 20.10. Les trajectoires liées s'effectuent entre les distances r_1 et r_2 . La trajectoire étant une ellipse, on remarque sur le schéma de la figure 20.11 que les paramètres r_1 et r_2 sont liés à la longueur du grand axe de l'ellipse :

$$2a = r_1 + r_2.$$

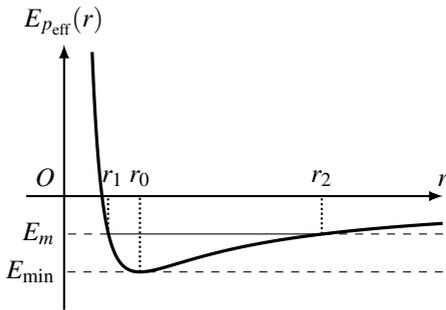


Figure 20.10 – Courbe d'énergie potentielle effective.

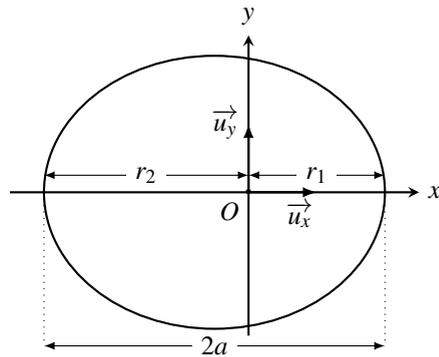


Figure 20.11 – Ellipse montrant r_1 , r_2 et le grand-axe $2a$.

Or r_1 et r_2 sont solutions de l'équation :

$$E_m = E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_A}{r} \implies r^2 + \frac{\mathcal{G}mM_A}{E_m}r - \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{E_m} = 0.$$

Cette équation s'écrit également : $(r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1r_2 = r^2 - Sr + P = 0$, où $S = r_1 + r_2$ représente la somme des racines du polynôme de deuxième ordre et $P = r_1r_2$ son produit. On en déduit que :

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\mathcal{G}mM_A}{E_m}, \quad \text{soit} \quad E_m = -\frac{\mathcal{G}M_A m}{2a}.$$

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- champ de force centrale conservatif
- un mouvement à moment cinétique constant est plan et vérifie la loi des aires
- champ newtonien
- lois de J. Kepler pour les planètes
- définition d'un satellite géostationnaire
- vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération
- ordre de grandeur des vitesses cosmiques en dynamique terrestre

SAVOIR-FAIRE

- montrer que le moment cinétique est conservé lors d'un mouvement dans un champ de force centrale
- exprimer la conservation de l'énergie mécanique
- construire une énergie potentielle effective pour étudier qualitativement le mouvement radial selon la valeur de l'énergie mécanique
- transposer les lois de J. Kepler au cas des satellites terrestres
- étudier le mouvement circulaire d'une planète autour du Soleil
- établir la troisième loi de J. Kepler pour une planète en révolution circulaire
- exploiter les lois de J. Kepler dans le cas d'une trajectoire elliptique
- calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier que son orbite est située dans le plan équatorial
- exprimer l'énergie mécanique en fonction du rayon de l'orbite dans le cas d'un mouvement circulaire
- exprimer l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe dans le cas d'un mouvement elliptique (MPSI)
- exprimer les vitesses en orbite basse et vitesses de libération (vitesses cosmiques)

MOTS-CLÉS

- | | | |
|---------------------|------------------|-----------------------------|
| • force newtonienne | • loi des aires | • satellite géostationnaire |
| • force centrale | • lois de Kepler | • vitesses cosmiques |