18

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique

Le mouvement des particules chargées dans un champ électrique et/ou magnétique est un sujet important du fait du grand nombre d'applications qui l'utilisent. On se limite aux champs uniformes et indépendants du temps qui ne dépendent ni de la position dans l'espace ni de l'instant considérés. On exclut tout développement relativiste, ce qui implique que la vitesse des particules soit négligeable devant la vitesse de la lumière. Cette condition est restrictive car les particules accélérées par des champs électriques peuvent facilement atteindre des vitesses proches de celle de la lumière. Des effets relativistes permettent alors généralement d'expliquer les écarts entre le modèle théorique basé sur la mécanique classique et les observations expérimentales.

1 Force de Lorentz

1.1 Rappel de l'expression

Comme cela a été vu dans le chapitre de dynamique du point, une particule chargée de masse m, de charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ subit, en présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, la **force de Lorentz** dont on rappelle l'expression :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right).}$$

où $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$ dépendent du référentiel. Cette force, qui ne s'applique qu'aux particules chargées, est composée d'un terme électrique $q\overrightarrow{E}$ et d'un terme magnétique $q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.

La force électrique $\overrightarrow{F_{\text{élec}}}$ est alignée avec le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Elle a le même sens si la charge q de la particule est positive et un sens opposé si q est négative.
Pour trouver la direction de la force magnétique $\overrightarrow{F_{\text{mag}}}$, on utilise la « règle de la main droite » représentée sur la figure 18.1. Tout comme la force électrique, elle change de sens lorsque le signe de la charge change.

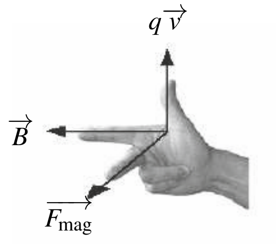

Figure 18.1 – Règle de la main droite.

1.2 Différence fondamentale entre la composante électrique et la composante magnétique

Du point de vue de la mécanique, une différence fondamentale existe entre les deux composantes de la force de Lorentz :

- la force magnétique est toujours orthogonale à la vitesse. Sa puissance, et donc son travail, sont nuls. Le théorème de l'énergie cinétique implique que l'énergie cinétique d'un corps soumis uniquement à ce type de force est conservée. La norme de sa vitesse est alors une constante du mouvement. Ainsi, la force magnétique ne peut agir que sur la direction du mouvement.
- la force électrique peut délivrer une puissance à une particule chargée. Elle est capable de la mettre en mouvement et de modifier son énergie cinétique. La force électrique peut agir à la fois sur la norme et sur la direction de la vitesse.

> La force électrique permet d'accélérer ou de freiner une particule chargée. La force magnétique ne peut que la dévier.

On montre dans le paragraphe 2.3 qu'il est relativement aisé d'accélérer un électron se déplaçant dans le vide jusqu'à une vitesse de 3.10^7 m·s^{-1}. Cette vitesse, qui correspond au dixième de la vitesse de la lumière, est la limite supérieure permettant de négliger les effets relativistes donc de négliger la vitesse de la particule devant celle de la lumière.

1.3 Ordre de grandeur et conséquences

a) Unités et ordre de grandeur des champs électriques et magnétiques

La valeur des champs magnétiques et électriques peut balayer plusieurs ordres de grandeur et il est bon d'avoir en tête que :

- le champ électrique se mesure en volt par mètre ($1\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$). Un champ électrique de l'ordre de 10^6 V·m^{-1} est un champ intense qui peut provoquer la formation d'étincelles dans l'air.
- le champ magnétique se mesure en Tesla ($1\ \text{T} = 1\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1}$). Il prend usuellement des valeurs comprises entre 5.10^{-5} T pour le champ magnétique terrestre et 30 T pour le champ magnétique intense d'un spectroscope à résonance magnétique nucléaire (R.M.N.). Les aimants usuels produisent des champs magnétiques de l'ordre de 0,1 T.

b) Comparaison des termes électrique et magnétique

Pour avoir un ordre de grandeur de cette force et de ses composantes électrique et magnétique, on considère le cas d'un électron dont la charge vaut $q = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C, animé d'une vitesse égale à 3.10^7 m·s^{-1}. Pour un champ magnétique peu intense de module 0,1 T, le module de la composante magnétique de la force de Lorentz est de l'ordre de :

$$F_{\text{mag}} = qvB = 1{,}6.10^{-19} \times 3.10^7 \times 0{,}1 = 5.10^{-13}\ \text{N}.$$

Pour obtenir une composante électrique de la force de Lorentz du même ordre de grandeur, il faut un champ électrique de module :

$$E = \frac{F_{\text{élec}}}{q} \simeq \frac{F_{\text{mag}}}{q} = \frac{5.10^{-13}}{1{,}6.10^{-19}} = 3.10^6\ \text{V·m}^{-1}.$$

Il s'agit d'un champ électrique important. Cela signifie que, pour de telles vitesses, la force magnétique d'un champ magnétique peu intense est aussi importante que la force électrique d'un champ électrique intense. C'est la raison principale pour laquelle on utilise très souvent des forces magnétiques lorsque l'on veut dévier des particules chargées allant à grande vitesse.

c) Comparaison au poids de la particule

En prenant le cas d'un proton sur Terre, la masse vaut $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg et le champ de pesanteur $g = 9{,}8$ m·s^{-2}. L'ordre de grandeur du poids du proton est de $m_p g = 1{,}7.10^{-27} \times 9{,}8 \simeq 1{,}7.10^{-26}$ N. La charge du proton valant $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, la force électrique atteint la même valeur que le poids ($eE = m_p g$) pour un champ électrique extrêmement faible de norme $E = 10^{-7}$ V·m^{-1}. Le poids est donc largement négligeable devant la force électrique.

Concernant la force magnétique, pour qu'un proton soit soumis à une force magnétique comparable à son poids ($evB = m_p g$), il ne doit pas dépasser la vitesse de 2.10^{-3} m·s^{-1} dans le champ magnétique terrestre de 5.10^{-5} T. C'est une vitesse extrêmement faible. Le poids est donc largement négligeable devant la force magnétique.

Dans les deux cas, pour un électron dont la masse est environ 2000 fois plus faible que celle d'un proton, le rapport de force est encore plus défavorable au poids.

> On peut toujours négliger le poids d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique.

2 Mouvement dans un champ électrique uniforme

On s'intéresse dans un premier temps au mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique seul.

2.1 Équation du mouvement

On étudie le mouvement de la particule dans le référentiel du laboratoire. On assimile cette particule à un point matériel M de masse m et de charge q et on considère le référentiel du laboratoire comme galiléen. La particule est soumise à :

- la force électrique : $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$,
- son poids que l'on néglige.

On applique le principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}(m\overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{a} = \frac{q\overrightarrow{E}}{m},$$

en notant $\overrightarrow{a}$ l'accélération de la particule. Ce type de mouvement, caractérisé par une accélération constante, a été étudié en détail lors du chapitre de cinématique du point.

2.2 Étude de la trajectoire

Comme le champ $\overrightarrow{E}$ est indépendant du temps, on peut intégrer vectoriellement soit :

$$\overrightarrow{v} = \frac{q\overrightarrow{E}}{m}t + \overrightarrow{v_0},$$

et :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\overrightarrow{E}t^2 + \overrightarrow{v_0}t, \qquad (18.1)$$

en prenant comme origine O la position initiale de la particule.

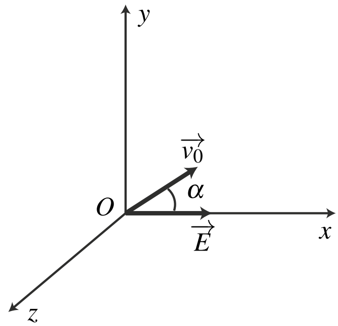

Figure 18.2 – Conditions initiales du mouvement.

Le mouvement a lieu dans le plan défini par la position initiale, le champ électrique et le vecteur vitesse initial. Ceci n'a rien de surprenant : la seule force qui s'exerce sur la particule est dans ce plan. On remarque l'analogie avec le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur : dans les deux cas, la force appliquée est constante et uniforme.

Pour aller plus loin dans l'analyse du mouvement, on se place en coordonnées cartésiennes. On oriente l'axe (Ox) dans le sens du champ électrique de sorte que : $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$ avec $E > 0$. La vitesse initiale définit avec le champ électrique un plan que l'on prend comme plan (xOy) et on note α l'angle que fait le vecteur vitesse avec le champ électrique dans ce plan (figure 18.2). L'axe (Oz) complète la base directe. La projection de l'équation (18.1) dans cette base, conduit à :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\cos\alpha \\ y &= v_0 t \sin\alpha \\ z &= 0. \end{cases} \qquad (18.2)$$

La trajectoire s'obtient en éliminant le temps t dans les relations précédentes ; le plus simple est d'obtenir t en fonction de y. On doit donc distinguer deux cas : le cas où $\alpha = 0$ ou π et le cas où $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire le cas où la vitesse initiale est parallèle au champ électrique et celui où elle ne lui est pas parallèle.

a) Trajectoire lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ

Dans ce cas, $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$ si $\alpha = 0$ et $\cos\alpha = -1$ si $\alpha = \pi$. La loi horaire du mouvement devient :

$$x = \frac{qE}{2m}t^2 \pm v_0 t \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0,$$

ce qui correspond à un mouvement rectiligne le long de l'axe Ox.

b) Trajectoire lorsque la vitesse initiale n'est pas parallèle au champ

Dans ce cas, on a $\alpha \neq 0$ donc $\sin\alpha \neq 0$. On peut alors diviser par $v_0 \sin\alpha$ et obtenir :

$$t = \frac{y}{v_0 \sin\alpha}.$$

En reportant dans l'équation horaire de x, on en déduit :

$$x = \frac{qE}{2mv_0^2 \sin^2\alpha}y^2 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y.$$

Les trajectoires sont des paraboles passant par l'origine que l'on a représentées sur la figure 18.3. On retrouve le même type de mouvement que pour un point matériel de masse m évoluant sous l'unique action de son poids.

Ces trajectoires sont caractérisées par leur sommet qui correspond à un extremum de x. On cherche donc les valeurs de y qui annulent la dérivée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{qE}{mv_0^2 \sin^2\alpha}y + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0.$$

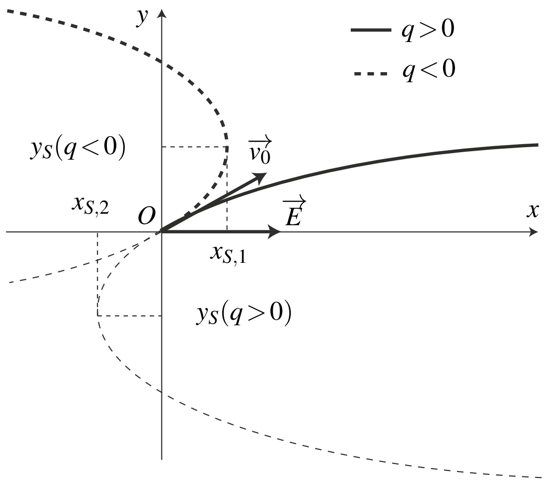

Figure 18.3 – Trajectoires d'une particule chargée positivement ou négativement dans un champ électrique quand la vitesse initiale n'est pas colinéaire au champ.

On obtient $y_S = -\frac{mv_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{qE}$ que l'on reporte dans l'équation de la trajectoire pour déterminer $x_S = -\frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2qE}$.

2.3 Accélération d'une particule chargée par un champ électrique

a) Étude générale

On s'intéresse dans ce paragraphe aux aspects énergétiques afin de montrer qu'un champ électrique peut modifier la norme de la vitesse d'une particule chargée.

Expression de l'énergie potentielle Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est supposé uniforme. On a vu dans le chapitre sur l'énergie que la force électrique est alors conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$ telle que :

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = q\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = qE\overrightarrow{u_x} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = qE\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p.$$

On trouve alors :

$$\boxed{E_p = q(-Ex+C)} \qquad \text{où } C \text{ est une constante arbitraire.}$$

Définition du potentiel électrique

On définit le **potentiel électrique** noté V par la relation :

$$E_p = qV \qquad \text{soit} \qquad V = \frac{E_p}{q}.$$

Lorsque le champ électrique est uniforme, dirigé selon (Ox) et d'expression $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$, le potentiel électrique V est une fonction linéaire de x de dérivée $-E$:

$$V(x) = -Ex + C.$$

Le potentiel électrique V qui est défini ici ne dépend pas de la charge q mais uniquement du champ électrique E. Il s'agit du même potentiel que celui que l'on a introduit en électricité. Le choix de la constante arbitraire C correspond au choix de la position du potentiel électrique nul (référence de potentiel) et donc au choix de la masse en électricité.

Le champ électrique est toujours dirigé vers les potentiels décroissants. En effet :
- si $E > 0$, $V(x)$ est une fonction décroissante de x et le champ $\overrightarrow{E}$ est dirigé dans le sens des x croissants ;
- si $E < 0$, $V(x)$ est une fonction croissante de x et le champ $\overrightarrow{E}$ est dirigé dans le sens des x décroissants.

Remarque

La force électrique est conservative même si le champ électrique n'est pas uniforme. On peut alors définir un potentiel électrique mais son expression n'est plus la même.

Production d'un champ électrique uniforme Pour obtenir un champ électrique uniforme parallèle à l'axe (Ox), il faut créer un potentiel qui varie linéairement selon l'axe (Ox). Pour cela, il suffit d'appliquer une différence de potentiel (ou tension) U entre deux grilles métalliques planes perpendiculaires à l'axe (Ox) (et donc parallèles entre elles) et distantes de d (figure 18.4). On admet que le champ créé entre les deux électrodes est alors uniforme.

Pour établir la tension U, on branche un générateur entre les deux électrodes. On peut fixer arbitrairement la masse sur l'électrode placée en $x = \frac{d}{2}$ et le potentiel U en $x = -\frac{d}{2}$. Le potentiel évolue alors avec l'abscisse x selon la relation linéaire $V(x) = -Ex + C$ et vérifie les conditions aux limites suivantes en $x = \pm\frac{d}{2}$:

$$\begin{cases} V\left(-\frac{d}{2}\right) & = U = E\frac{d}{2} + C \\ V\left(\frac{d}{2}\right) & = 0 = -E\frac{d}{2} + C. \end{cases}$$

On élimine C en calculant la différence entre ces deux équations et on obtient $E = \frac{U}{d}$. Lorsque le potentiel appliqué en $x = -\frac{d}{2}$ est positif, le champ électrique est dirigé vers les x croissants.

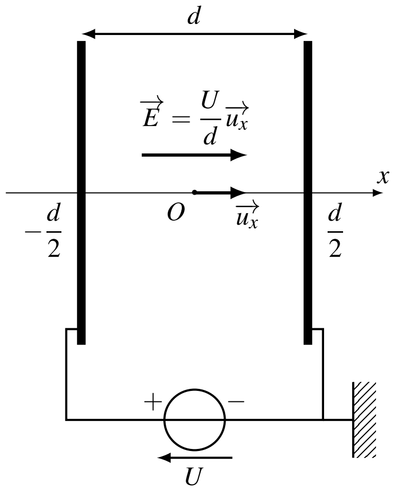

Figure 18.4 – Production d'un champ électrique uniforme.

En appliquant une différence de potentiel U entre deux grilles (ou électrodes) planes, parallèles et distantes de d, on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$E = \frac{U}{d}.$$

Il est aisé de fabriquer une différence de potentiel de 1 kV et de l'appliquer entre deux plans distants de 1 cm. Cela conduit à un champ électrique de $1\ \text{kV}\cdot\text{cm}^{-1} = 10^5\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

b) Conservation de l'énergie mécanique

La seule force étant la force électrique qui est conservative, le théorème de l'énergie mécanique implique la conservation de l'énergie mécanique d'où :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante.}}$$

En indiquant par l'indice i la situation initiale et par f la situation finale, on en déduit la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -q\Big(V(x_f) - V(x_i)\Big). \tag{18.3}$$

Pour faire varier l'énergie cinétique et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électromagnétique, il faut lui faire franchir une différence de potentiel ΔV. La variation de l'énergie cinétique est dans ce cas :

$$\Delta E_c = -q\Delta V.$$

Si $q > 0$, la particule sera accélérée par une différence de potentielle $\Delta V < 0$ et freinée par une différence de potentielle $\Delta V > 0$.

Si $q < 0$, la particule sera accélérée par une différence de potentielle $\Delta V > 0$ et freinée par une différence de potentielle $\Delta V < 0$.

c) Cas particulier où la vitesse initiale est nulle

Dans ce cas, le mouvement est nécessairement rectiligne et accéléré. Le sens de la force $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$ dépend du signe de la charge considérée.

Accélération de particules chargées positivement On injecte une particule de charge positive sans vitesse initiale à proximité de l'électrode positive : $x_i = -\dfrac{d}{2}$. Elle est accélérée vers les x croissants jusqu'à l'électrode négative : $x_f = \dfrac{d}{2}$. L'énergie cinétique finale s'exprime en fonction de la différence de potentiel $V(x_f) - V(x_i) = V\left(\dfrac{d}{2}\right) - V\left(-\dfrac{d}{2}\right) = -U$ à l'aide de l'équation (18.3) :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = qU > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

où la différence de potentiel U est appelée tension accélératrice.

Exemple

Pour un proton : $q = 1{,}6.10^{-19}$ C et $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg. Si la tension accélératrice vaut $U = 2{,}0$ kV, la vitesse finale est :

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 2{,}0.10^3}{1{,}67.10^{-27}}} = 6{,}2.10^5 \text{ m·s}^{-1}.$$

Accélération des particules chargées négativement On injecte une particule de charge négative sans vitesse initiale à proximité de l'électrode négative : $x_i = \dfrac{d}{2}$. Elle est accélérée vers les x décroissants jusqu'à atteindre l'électrode positive située en $x_f = -\dfrac{d}{2}$. L'énergie cinétique finale s'exprime en fonction de la différence de potentiel $V(x_f) - V(x_i) = V\left(-\dfrac{d}{2}\right) - V\left(\dfrac{d}{2}\right) = U$ à l'aide de l'équation (18.3) :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = -qU > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_f = \sqrt{\frac{-2qU}{m}}.$$

Exemple

Pour un électron : $q = -1{,}6.10^{-19}$ C et $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg. Si la tension accélératrice vaut $U = 2{,}0$ kV, la vitesse finale est :

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 2{,}0.10^3}{9{,}1.10^{-31}}} = 2{,}7.10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Une nouvelle unité d'énergie adaptée : l'électron-volt La formule (18.3) montre que le produit d'une charge par une différence de potentiel est homogène à une énergie. On définit l'**électron-volt** comme le produit de la charge de l'électron e par le volt. Cette nouvelle unité d'énergie vaut 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J. Les exemples précédents permettent de comprendre sa signification et son intérêt.

Un électron ou un proton initialement au repos et accéléré sous une tension de 1 V acquiert une énergie cinétique de 1 eV.

Remarque

L'énergie cinétique finale d'un électron initialement au repos et accéléré par une tension accélératrice de 2 kV vaut 2 keV. Sa vitesse est alors de $2{,}7.10^7$ m·s^{-1} soit environ 10 % de la vitesse de la lumière. Une telle différence de potentiel est relativement aisée à réaliser, on peut donc facilement obtenir des électrons relativistes. Dans ce cours, on se limite à des tensions accélératrices inférieures ou égales à 2 kV pour les applications numériques concernant des électrons afin de rester dans l'approximation classique.

3 Mouvement dans un champ magnétique

On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Lorsque la vitesse de la particule est initialement perpendiculaire au champ magnétique, on observe expérimentalement qu'elle suit une trajectoire circulaire. On veut expliquer cette trajectoire et déterminer son rayon.

3.1 Le mouvement est uniforme

On étudie le mouvement d'une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ de norme B. À l'instant initial, la particule est animée d'une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de norme v_0 et de direction perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.

On modélise la particule par un point matériel M et on étudie son mouvement dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La particule est soumise au forces suivantes :

- la force magnétique $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$,
- son poids qui sera négligé compte tenu des ordres de grandeur.

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la norme de la vitesse et on utilise le théorème de l'énergie cinétique. La force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse à chaque instant, sa puissance, et par conséquent son travail, sont nuls. L'application du théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = W(\overrightarrow{f}) = 0,$$

montre que l'énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ de la particule est une constante du mouvement. Par conséquent, le module de sa vitesse conserve sa valeur initiale v_0.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est uniforme.

3.2 Étude de la trajectoire

a) Observations expérimentales

La trajectoire des particules est circulaire dans un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$. Le sens de parcours et la position du centre de la trajectoire dépendent du signe de la charge (figure 18.5).

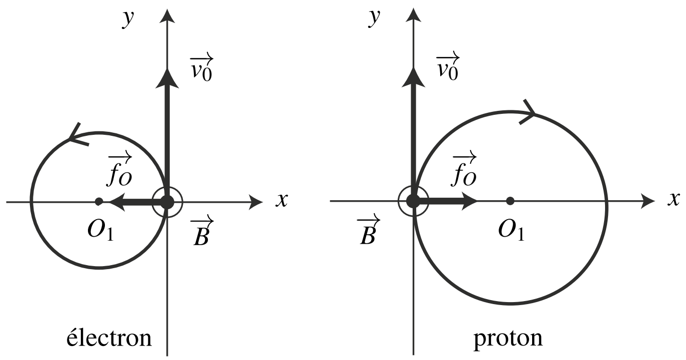

Figure 18.5 – Particules chargées évoluant en présence d'un champ magnétique uniforme. Les rayons ne sont pas tracés avec la même échelle dans le cas de l'électron et du proton.

b) Détermination du rayon et de la vitesse angulaire

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}. \tag{18.4}$$

On peut étudier cette trajectoire en coordonnées polaires d'origine O_1 confondue avec le centre de la trajectoire et d'axe (O_1z) orienté par $\overrightarrow{B}$. On a montré précédemment que le mouvement est uniforme à la vitesse v_0, on utilise donc les résultats sur le mouvement circulaire et uniforme établis dans le chapitre de *Cinématique du point* soit :

$$\overrightarrow{O_1M} = R\overrightarrow{u_r} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \pm v_0\overrightarrow{u_\theta} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = -\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u_r}.$$

À ce niveau, le sens de la rotation n'est pas déterminé, ce qui explique la notation $\overrightarrow{v} = \pm v_0 \overrightarrow{u_\theta}$. L'accélération est dirigée selon $-\overrightarrow{u_r}$ (elle est toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire). La force magnétique étant la seule force, elle est nécessairement parallèle et de même sens que l'accélération d'après le principe fondamental de la dynamique. Cela permet de raisonner sur les normes. Les vecteurs $q\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{B}$ sont perpendiculaires entre eux et de norme respectives $|q|\, v_0$ et B, donc $\|q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\| = |q|\, v_0 B$. Par ailleurs, la norme de l'accélération vaut $\dfrac{v_0^2}{R}$. Le principe fondamental de la dynamique (18.4) conduit ensuite à :

$$m\frac{v_0^2}{R} = |q|\, v_0 B \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_0 = \frac{|q|B}{m}R.$$

La dimension de $\dfrac{|q|B}{m}$ est celle d'une pulsation car :

$$[Q \times v \times B] = [F] \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{Q \times B}{M}\right] = \left[\frac{F}{M \times v}\right] = \left[\frac{F}{M \times a \times T}\right] = \left[\frac{F}{F \times T}\right] = \left[T^{-1}\right].$$

On note alors $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$ cette pulsation qui se nomme **pulsation cyclotron**. La relation entre le rayon et la vitesse v_0 devient alors :

$$v_0 = R\omega_c \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = \frac{v_0}{\omega_c}.$$

Une particule de charge q et de vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ suit un **mouvement circulaire et uniforme** à la vitesse angulaire $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$ appelée **pulsation cyclotron**. On trouve le rayon de la trajectoire grâce à la relation $v_0 = R\omega_c$.

Remarque

Lorsque la vitesse initiale n'est pas perpendiculaire au champ magnétique, le mouvement est hélicoïdal, composé d'un mouvement rectiligne et uniforme dans la direction de $\overrightarrow{B}$ et d'un mouvement circulaire et uniforme dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$.

c) Position du centre de la trajectoire - Sens de parcours de la trajectoire

On peut tracer la trajectoire dans le cas d'une injection de particule en O avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On oriente pour cela l'axe (Oy) selon $\overrightarrow{v_0}$. La droite (Oy) est alors une tangente à la trajectoire. L'axe (Ox), perpendiculaire à (Oy), est donc un diamètre de la trajectoire. La force magnétique est nécessairement dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire. Sa direction au passage en O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ permet donc de situer le centre O_1 de la trajectoire (voir figure 18.5) :

$$\overrightarrow{f_O} = q\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B} = qv_0\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z} = qv_0B\overrightarrow{u_x}.$$

On en déduit que :

- pour une charge positive, $\overrightarrow{f_O}$ est dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$ donc O_1 a une abscisse positive,
- pour une charge négative, $\overrightarrow{f_O}$ est dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$ donc O_1 a une abscisse négative.

La connaissance du rayon de la trajectoire permet alors de situer son centre et de la tracer. La vitesse en O permet ensuite de déduire le sens de parcours de la trajectoire (figure 18.5). Il faut noter que le sens du mouvement circulaire dépendent du signe de la charge q : les électrons tournent dans le sens direct autour du champ $\overrightarrow{B}$ et les protons dans le sens indirect.

d) Ordres de grandeur

On considère des particules préalablement accélérées par une différence de potentiel de 2000 V comme cela a été détaillé plus haut. Un proton possède la vitesse $v_0 = 6{,}2.10^5$ m·s^{-1} et un électron la vitesse $v_0 = 2{,}7.10^7$ m·s^{-1}. Lorsqu'on les soumet à un champ magnétique de 0,10 T, ces particules de charge $|q| = e = 1{,}6.10^{-19}$ C suivent des trajectoires circulaires de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{eB} = \frac{1{,}67.10^{-27} \times 6{,}2.10^5}{1{,}6.10^{-19} \times 0,10} = 6{,}5 \text{ cm pour le proton de masse } m_p = 1{,}67.10^{-27} \text{ kg}$$

$$= \frac{9{,}1.10^{-31} \times 2{,}7.10^7}{1{,}6.10^{-19} \times 0,10} = 1{,}5 \text{ mm pour l'électron de masse } m_e = 9{,}1.10^{-31} \text{ kg.}$$

La vitesse angulaire s'écrit :

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0,10}{1{,}67.10^{-27}} = 9{,}5.10^6 \text{ rad·s}^{-1} \text{ pour le proton}$$

$$= \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0,10}{9{,}1.10^{-31}} = 1{,}8.10^{10} \text{ rad·s}^{-1} \text{ pour l'électron.}$$

L'électron tourne plus rapidement que le proton et sur une trajectoire de rayon plus petit.

4 Quelques applications de ces mouvements

On considère quelques applications des mouvements de particules dans des champs électrique et magnétique. La liste est loin d'être exhaustive et on se limite à l'analyse de quelques expériences intéressantes.

4.1 Expérience de Thomson

À la fin du XIXe siècle, J.J. Thomson conduit une série d'expériences qui le conduisent à mettre en évidence l'existence de l'électron et à en déterminer le rapport $\frac{e}{m_e}$ de sa charge par sa masse. C'est une avancée décisive dans la connaissance de la matière qui lui vaut d'être récompensé d'un prix Nobel de Physique en 1906. Toutes ces expériences mettent en jeu des mouvements d'électrons dans des tubes à vide.

L'expérience permettant de mesurer ce rapport consiste tout d'abord à accélérer un faisceau d'électrons (charge $-e$) initialement immobiles par un champ électrique $\overrightarrow{E_0}$, ce qui leur procure une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Ce faisceau est ensuite dévié par un champ électrique $\overrightarrow{E}$ appliqué perpendiculairement au mouvement des électrons du faisceau sur une longueur a. On mesure alors la déviation d induite par ce champ électrique sur un écran situé à une distance $L \gg a$. (voir figure 18.6).

L'application du seul champ électrique conduit à une déviation d'un angle θ dont le calcul est présenté au paragraphe suivant et qui vérifie :

$$\tan\theta = \frac{eEa}{m_e v_0^2} \simeq \frac{d}{L}.$$

On en déduit l'expression de la vitesse :

$$v_0 = \sqrt{\frac{eEaL}{m_e d}}.$$

On superpose alors un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{E}$ et tel que la force magnétique $-e\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$ soit égale à la force électrique $-e\overrightarrow{E}$. Le faisceau d'électrons n'est alors plus dévié. L'égalité des forces électrique et magnétique donne : $eE = ev_0B$ soit $v_0 = \dfrac{E}{B}$.

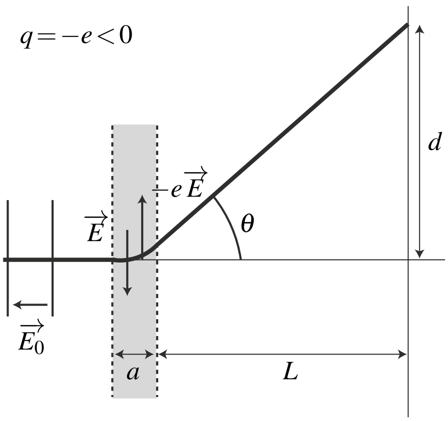

Figure 18.6 – Expérience de Thomson avec le champ électrique seul.

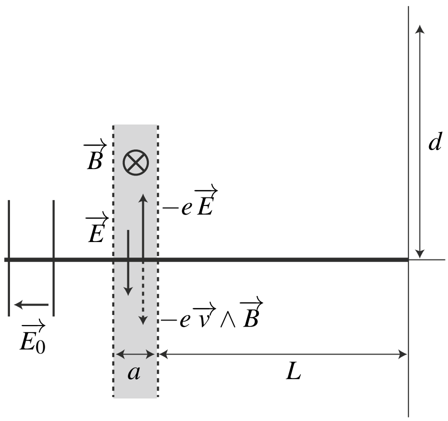

Figure 18.7 – Expérience de Thomson avec champs électrique et magnétique.

En égalant les deux expressions de la vitesse, on obtient :

$$v_0^2 = \frac{E^2}{B^2} = \frac{eEaL}{m_e d} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{e}{m_e} = \frac{dE}{aLB^2}.$$

Les paramètres géométriques a et L sont imposés par la configuration géométrique de l'expérience. La mesure de d et des champs E et B permet d'accéder au rapport $\dfrac{e}{m_e}$.

Dans cette expérience, on utilise un champ électrique pour dévier une particule puis un champ magnétique pour annuler l'effet de cette force. Pour un électron de vitesse $v_0 = 2{,}7.10^7$ m·s^{-1} et un champ électrique important $E = 10^6$ V·m^{-1}, il suffit d'un champ magnétique faible $B = \dfrac{E}{v_0} = 0{,}04$ T. Pour dévier un faisceau d'électron, un champ magnétique peu intense est aussi efficace qu'un champ électrique fort.

Lorsque l'on veut dévier des particules chargées, il est souvent préférable d'utiliser des champs magnétiques. C'est d'autant plus vrai que la vitesse des particules est élevée.

Annexe : déviation d'un électron par un champ électrique Pour calculer la déviation, on remarque que la vitesse initiale est perpendiculaire au champ électrique et que le champ ne s'applique que dans une zone limitée de l'espace de largeur a. On se ramène à la situation étudiée au paragraphe 2.2 en choisissant l'axe (Ox) dirigé par le champ $\overrightarrow{E}$ et l'axe (Oy) dirigé par la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ (figure 18.8). Dans la zone comprise entre $y = 0$ et $y = a$, le champ électrique est uniforme et le mouvement des électrons est régi par les équations (18.2) avec $\alpha = 0$ et $q = -e$ soit : $x = \dfrac{-eE}{2m_e}t^2$ et $y = v_0 t$.

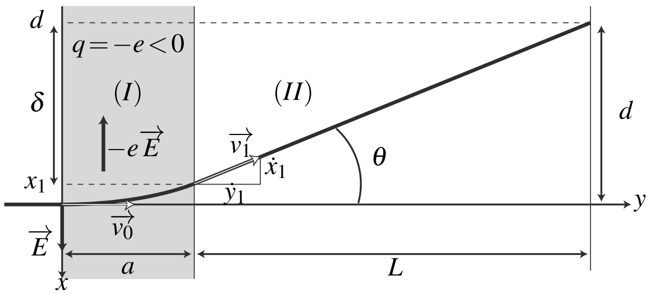

Figure 18.8 – Déviation d'une particule chargée par un champ électrique. Le champ appliqué dans la zone (I) dévie la trajectoire. Le mouvement est ensuite rectiligne et uniforme dans la zone (II).

La particule quitte la zone où règne le champ en $y_1 = a$ à l'instant $t_1 = \dfrac{a}{v_0}$ en un point d'abscisse $x_1 = \dfrac{-eEa^2}{2m_e v_0^2}$. Elle suit alors une trajectoire rectiligne et uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_1}$.

L'angle de déviation de la trajectoire est donné par : $\tan\theta = \tan\left(\widehat{\overrightarrow{v_0}, \overrightarrow{v_1}}\right) = \left|\dfrac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1}\right|$.

Or $\dot{x} = \dfrac{-eEt}{m_e}$ et $\dot{y} = v_0$. Donc $\dot{x}_1 = \dfrac{-eEa}{m_e v_0}$ et $\tan\theta = \dfrac{eEa}{m_e v_0^2}$.

On peut ensuite calculer la déviation $d = x_1 + \delta$ observée sur un écran situé à une distance $L \gg a$ des plaques de déviation car la tangente de l'angle de déviation peut aussi s'exprimer en fonction de L et de δ :

$$\tan\theta = \frac{\delta}{L} \quad \text{d'où} \quad d = \frac{eEa}{m_e v_0^2}\left(\frac{a}{2} + L\right) \simeq \frac{eEaL}{m_e v_0^2} \quad \text{lorsque } a \ll L.$$

4.2 Spectromètre de masse

Le but d'un spectromètre de masse est d'analyser les ions présents dans un faisceau. On peut utiliser leurs différences de masse pour connaître leur proportion respective en supposant que leur charge est connue. Le montage utilisé comprend deux phases :

- **Phase accélératrice :** On commence par accélérer les ions grâce à une forte différence de potentiel. L'application du théorème de l'énergie cinétique aux ions supposés initialement au repos fournit leur vitesse à la fin de cette phase :

$$v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}.$$

  On se place cependant dans la limite classique en vérifiant que $v \ll c$ pour éviter un traitement relativiste.
- **Phase de déviation :** On applique alors un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ perpendiculairement au mouvement. En appliquant les relations établies précédemment, on peut affirmer que les ions décrivent une trajectoire circulaire de rayon $R = \dfrac{mv}{|q|B}$. On en déduit :

$$v = \frac{qBR}{m} = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{q^2B^2R^2}{m^2} = \frac{2|q|U}{m}$$

  puis finalement :

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2U}{B^2R^2}.$$

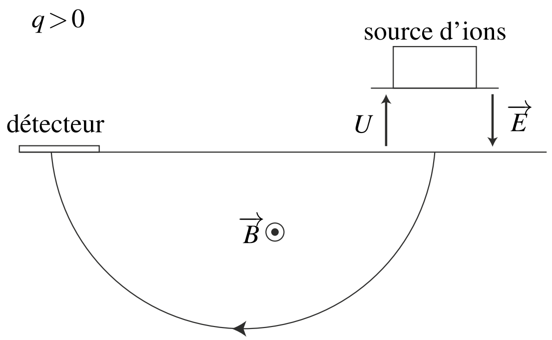

Figure 18.9 – Spectromètre de masse.

L'impact sur le détecteur permet de connaître le rayon de la trajectoire et donc le rapport $\dfrac{q}{m}$ connaissant la tension accélératrice U et la norme du champ magnétique B. Ce système permet de séparer des éléments ionisés en fonction de leur masse et de leur charge. Si on connaît par ailleurs la charge des ions, on peut en déduire leur masse. Ceci explique le nom de spectromètre de masse donné à ce dispositif.

Ordre de grandeur de la taille du dispositif La charge des ions sera de quelques charges élémentaires donc de l'ordre de 10^{-19} C. Leur masse molaire varie entre quelques centaines et quelques milliers de grammes par mole soit de l'ordre de 10^{-24} kg par ion. On prend une tension accélératrice de 10 kV et un champ magnétique de 0,1 T. On obtient alors un rayon de l'ordre de :

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|q|}} = \frac{1}{0,1}\sqrt{\frac{2.10^{-24} \times 10^4}{10^{-19}}} = 4 \text{ m.}$$

4.3 Cyclotron

L'existence d'une trajectoire circulaire des particules chargées soumises à un champ magnétique permet d'envisager des accélérateurs de particules agissant de manière cyclique. C'est le principe des cyclotrons dont le dispositif est le suivant :

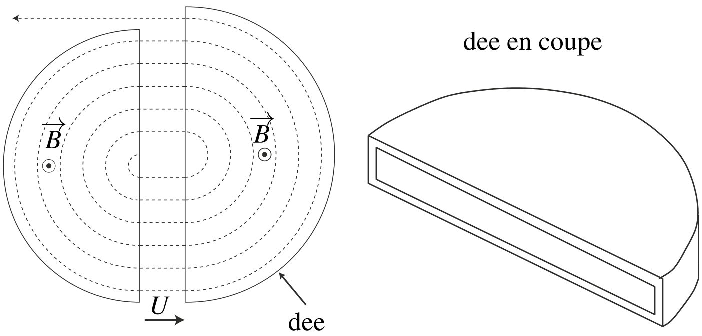

Figure 18.10 – Constitution d'un cyclotron.

Ils sont constitués de deux demi-cylindres creux dénommés « *dees* » du fait de leur forme de « D » majuscules. Chaque dee est soumis à un champ magnétique uniforme, le sens du champ magnétique est le même dans les deux dees. Les deux dees sont séparés par un espace dans lequel on applique une différence de potentiel U. Souvent les particules injectées dans le dispositif ont été préalablement accélérées.

Dans chaque dee, la particule suit un mouvement circulaire lié au champ magnétique. Sa vitesse angulaire vaut :

$$\omega = \omega_c = \frac{qB}{m}$$

C'est la pulsation cyclotron dont on peut déduire la fréquence cyclotron :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Quand la particule traverse l'interstice entre les deux dees, elle est accélérée par la présence de la différence de potentiel U. Pour qu'elle soit effectivement accélérée à chaque demi-tour, il faut que les tensions aux instants correspondant à deux passages successifs dans l'interstice soient en opposition de phase. Sinon elle pourra être alternativement accélérée et décélérée. Pour obtenir une telle tension, il suffit de prendre une tension sinusoïdale dont la période est celle du cyclotron. De cette manière, le rayon de la trajectoire augmente à chaque traversée de l'interstice puisqu'il est proportionnel à la vitesse. On obtient alors le type de trajectoire indiquée en pointillés sur la figure précédente.

L'intérêt d'un tel dispositif est de pouvoir accélérer très fortement les particules sans être contraint d'appliquer une différence de potentiel énorme.

> **Exemple**
>
> Pour le cyclotron de University of Michigan, Ann Arbor (près de Detroit), le champ magnétique vaut $B = 0{,}10\,\text{T}$ (on peut atteindre au maximum 1,5 T mais on est alors dans le cadre relativiste), le diamètre des dees est 2,1 m.

Le problème essentiel des cyclotrons est d'obtenir un champ magnétique uniforme sur une surface aussi grande. Il s'agit d'un facteur limitant beaucoup sa taille et donc son utilisation.

On a alors une fréquence cyclotron pour les protons de :

$$f_c = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 0,10}{2\pi \times 1{,}67.10^{-27}} = 1{,}5\ \text{MHz}$$

La vitesse maximale est :

$$v_{\max} = R_{\max}\omega = 2\pi \times 1,05 \times 1{,}5.10^{6} = 1{,}0.10^{7}\ \text{m·s}^{-1}.$$

Pour atteindre une telle vitesse à l'aide d'un seul champ électrique, il faudrait une différence de potentiel de :

$$U = \frac{mv^2}{2|q|} = \frac{1{,}67.10^{-27} \times (10^7)^2}{2 \times 1{,}6.10^{-19}} = 5{,}3.10^{5}\ \text{V}.$$

Le cyclotron n'est pas le seul type d'accélérateurs de particules. Dans tous les cas, l'accélération est due au champ électrique et le champ magnétique permet de faire revenir les particules au même point et donc de « refermer » les trajectoires.

5 Approche documentaire : limites relativistes en microscopie électronique

Un microscope électronique crée une image très agrandie d'un échantillon. Les grossissements peuvent aller jusqu'à 2 millions, soit environ 1000 fois plus que ce que l'on obtient avec un microscope optique. Néanmoins, la résolution spatiale intrinsèque est toujours plus grande que la longueur d'onde du rayonnement utilisé. Un microscope électronique crée un faisceau d'électrons qu'il dirige vers un échantillon pour l'« éclairer ». La longueur d'onde qui limite la résolution est donc la longueur d'onde de DE BROGLIE du faisceau électronique. Elle est beaucoup plus petite que celle d'un faisceau de lumière visible et d'autant plus petite que les électrons sont rapides. Les électrons sont couramment accélérés jusqu'à des énergies cinétiques E_c comprises entre 10 keV et 1000 keV qui sont telles que l'on doit tenir compte d'effets relativistes.

On doit alors introduire le facteur de Lorentz $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ où $\beta = \dfrac{v}{c}$ est le rapport de la vitesse de l'électron v à la vitesse de la lumière c. Pour le calculer il faut savoir que, dans le cadre de la théorie relativiste, l'expression de l'énergie cinétique est modifiée et devient :

$$E_c = (\gamma - 1)\, m_e c^2,$$

où $m_e c^2$ est l'énergie de masse de l'électron égale à 511 keV. De même, la longueur d'onde de DE BROGLIE est toujours définie à partir de la quantité de mouvement p :

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

mais la quantité de mouvement vaut $p = \gamma m_e v$.

On a réunit dans le tableau 18.1 les valeurs des paramètres suivants : la tension accélératrice U, le facteur de Lorentz γ, β et λ. Pour bien se rendre compte de l'importance de tenir compte de la correction relativiste, on a également donné le rapport β_c obtenu dans l'approximation classique, ainsi que la longueur d'onde de DE BROGLIE associée λ_c.

U(kV)	γ	β	λ(pm)	β_c	λ_c(pm)
10	1,02	0,195	12,19	0,198	12,25
20	1,04	0,272	8,58	0,280	8,66
50	1,10	0,413	5,35	0,442	5,48
100	1,20	0,548	3,70	0,626	3,87
200	1,39	0,695	2,51	0,885	2,74
500	1,98	0,863	1,42	1,40	1,73
1000	2,96	0,941	0,87	1,98	0,122

Tableau 18.1 – Caractéristiques des électrons mis en jeu en microscopie électronique.

Questions À la lecture de ce texte, répondre aux questions suivantes :

1. En quoi les effets relativistes limitent la résolution intrinsèque de l'appareil ?
2. Exprimer les coefficients relativistes γ et β en fonction de la tension accélératrice U, de la charge de l'électron e, de sa masse m_e et de la vitesse de la lumière.
3. Retrouver les longueurs d'onde apparaissant dans le tableau ci-dessus.

Eléments de réponse

1. On voit dans le tableau que la longueur d'onde de DE BROGLIE obtenue en tenant compte des effets relativistes est plus grande que dans le modèle classique. Comme la résolution intrinsèque est limité par cette longueur d'onde, les effets relativistes limitent la résolution intrinsèque de l'appareil.
2. On obtient $\gamma = 1 + \dfrac{eU}{m_e c^2}$ puis $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}}$. On en déduit v puis on reporte v et γ dans l'expression de λ pour obtenir : $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2eUm_e c^2\left(1 + \dfrac{eU}{2m_e c^2}\right)}}$.
3. Il n'y plus alors qu'à faire les applications numériques.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- expression de la force de Lorentz
- effet de la partie électrique de cette force
- effet de la partie magnétique de cette force
- lien entre une différence de potentiel et un champ électrique uniforme
- expression de la pulsation cyclotron

SAVOIR-FAIRE

- évaluer les ordres de grandeurs des forces électriques et magnétiques et les comparer aux forces gravitationnelles
- étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme
- montrer qu'il s'agit d'un mouvement à vecteur accélération constant
- déterminer, à l'aide d'un bilan énergétique, la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel
- déterminer le rayon de la trajectoire d'une particule chargée soumise à un champ magnétique uniforme dans le cas où cette trajectoire est circulaire

MOTS-CLÉS

- particules chargées
- force de Lorentz
- champ électrique
- différence de potentiel
- champ magnétique