

Transitoires électriques et mécaniques

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout autre appareil électronique est interdit.

- ▷ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte**.
- ▷ La présentation, la lisibilité et l'orthographe font partie des critères d'évaluation. Les candidats sont invités à **numéroter les copies utilisées, à encadrer les résultats de leurs calculs** et à mettre en évidence le numéro des questions. Une **pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note obtenue** sera appliquée aux copies sales et peu soignées.
- ▷ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, **il le signale sur sa copie et poursuit sa composition** en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ▷ Le sujet se compose de **plusieurs parties indépendantes** les unes des autres, que le candidat est libre d'aborder **dans l'ordre de son choix**.
 - La partie I aborde la mécanique d'un accident automobile. Elle compte pour 45 % du barème.
 - La partie II concerne un montage électrique qui permet d'augmenter la valeur d'une tension. Elle représente 55 % du barème.
- ▷ Le sujet est volontairement long pour laisser au candidat le choix des parties sur lesquelles il souhaite se concentrer en priorité. Pour faire ce choix en connaissance de cause, il est recommandé de lire le sujet en entier avant d'entamer la composition.

Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

I - Déclenchement de l'airbag lors d'un accident

I.A - Mouvement du véhicule lors de la phase de freinage

Un véhicule de masse $m_0 = 1 \cdot 10^3$ kg roule à vitesse constante $V_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route plate et en ligne droite. Le conducteur voit un obstacle imprévu à une distance D devant lui et freine brusquement.

La position du centre d'inertie G du véhicule est repérée par sa coordonnée horizontale x le long d'un axe orienté dans le sens du mouvement. Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_t , supposé galiléen.

1 - Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Sous quelle condition de temps le référentiel terrestre peut-il être considéré galiléen ?

2 - Le temps de réaction t_r d'un conducteur est estimé à environ 1 s. Exprimer la distance D_r parcourue pendant cet intervalle.

Une fois qu'il a réagi, le conducteur appuie sur le frein à partir de l'instant $t = 0$. Son action génère un couple de freinage exercé sur les roues du véhicule qui les ralentit. On modélise son effet par une unique force constante $\vec{F} = -F \vec{u}_x$ avec $F = 5 \cdot 10^3$ N.

3 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation horaire $x(t)$ lors de la phase de freinage.

4 - En déduire le temps de freinage t_f nécessaire à ce que la voiture s'arrête puis la distance D_f parcourue lors de la phase de freinage.

5 - Exprimer et calculer numériquement la distance totale d'arrêt D_a .

I.B - Force de décélération subie par les passagers lors du choc

Malheureusement, $D < D_a$ et l'accident a lieu : le véhicule percute l'obstacle avec une vitesse d'impact V_i . Sous l'effet de la déformation du véhicule, le centre d'inertie G du véhicule se déplace d'une distance e entre le début et la fin du choc. On cherche à estimer l'intensité de la force de décélération brutale que subissent les passagers.

6 - En première approximation, cette force F_d dépend de e , V_i et de la masse m_p du passager par une relation de la forme

$$F_d = V_i^a e^b m_p^c.$$

Déterminer les exposants a , b et c par analyse dimensionnelle. En exploitant la figure 1 et/ou en proposant des valeurs numériques vraisemblables, estimer l'ordre de grandeur de F_d .

7 - En utilisant **uniquement** la figure 1, estimer la valeur maximale de F_d au cours de la collision. Comparer les deux résultats.

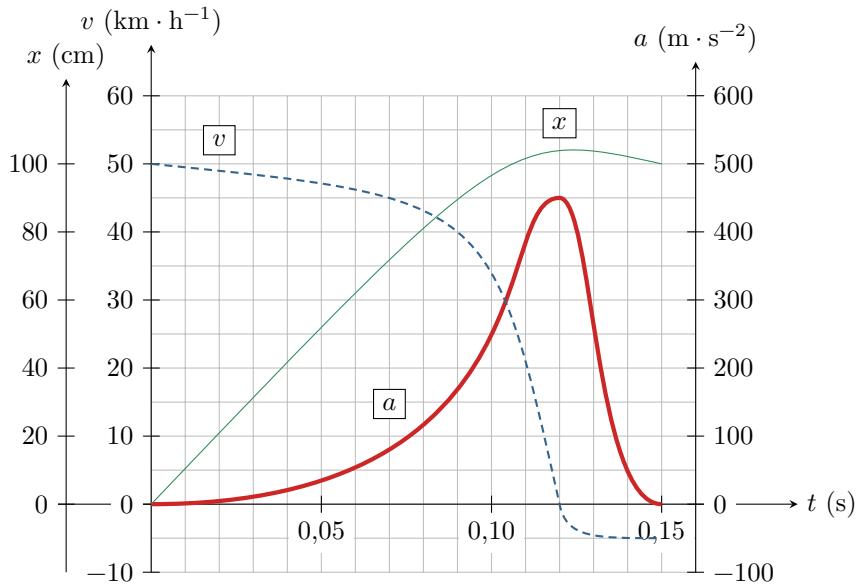


Figure 1 – Enregistrement lors d'un crash-test. Sont représentées la décélération a du centre d'inertie de la voiture, sa vitesse v , et sa position x .

I.C - Déclencheur d'airbag

Pour protéger les passagers du véhicule, ce dernier est muni d'airbags qui se déclenchent en cas d'accident. Les déclencheurs reposent sur la mesure de l'accélération du véhicule, et déclenchent l'airbag lorsqu'elle dépasse un certain seuil. Certains modèles de détecteur de choc sont constitués d'une masse mobile aimantée M retenue par un ressort, voir figure 2. Au cours d'un choc, plus la décélération est importante, plus la masse se déplace. Si le déplacement est suffisamment important, la masse aimantée met en contact électrique deux lames métalliques, ce qui déclenche l'ouverture de l'airbag.

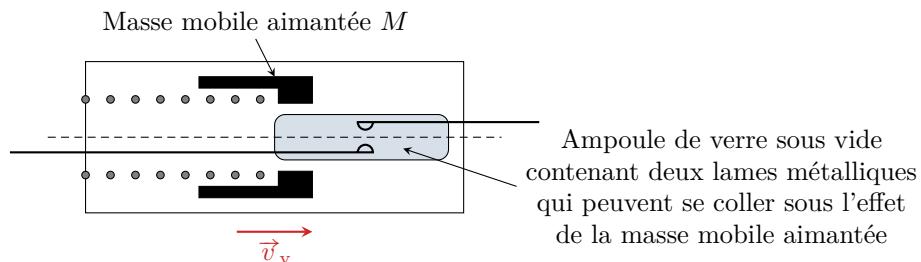


Figure 2 – Détecteur de choc. Gauche : photo du détecteur sur son circuit électrique. Droite : schéma vu en coupe, les points représentent les spires du ressort.

Le référentiel \mathcal{R}_v lié à la voiture n'est pas directement utilisable pour étudier le mouvement car il n'est pas galiléen, au contraire du référentiel terrestre \mathcal{R}_t . On introduit donc deux repères différents, voir figure 3, en translation l'un par rapport à l'autre : le premier (O', X, Y, Z) est fixe par rapport à la route, alors que le deuxième (O, x, y, z) est fixe par rapport au véhicule, donc en mouvement par rapport à la route. O' est un point de la route et O un point du véhicule.

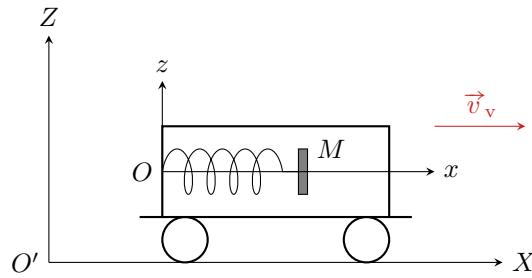


Figure 3 – Modélisation du détecteur de choc et notations utiles.

Le véhicule se déplace à la vitesse $\vec{v}_v/\mathcal{R}_t = v_v \vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre. Il est équipé d'un système de détection de chocs dont la masse mobile M peut se déplacer suivant la direction Ox . On note m sa masse et $\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x$ son vecteur position dans le référentiel \mathcal{R}_v .

Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 relie le point O et la masse mobile M qui subit lors de son déplacement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}_v}$.

Pour simplifier l'étude, on adopte un modèle de choc rudimentaire. On suppose que le véhicule roule à vitesse constante $V_0 \vec{u}_X$ jusqu'à l'instant $t = 0$ du choc : on fait donc l'hypothèse qu'il ne freine pas avant la collision, si bien que le ressort est à l'équilibre et sans vitesse à l'instant de l'impact. De plus, on fait l'hypothèse que la décélération $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{u}_x$ du véhicule par rapport à \mathcal{R}_T est constante pendant le choc et fait passer la vitesse du véhicule par rapport à \mathcal{R}_t de V_0 à 0 en une durée t_c .

8 - Exprimer a_0 en fonction de V_0 et t_c .

9 - Par dérivation du vecteur position, montrer que l'accélération de la masse mobile par rapport au référentiel terrestre s'écrit

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}_t} = -a_0 \vec{u}_x + \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x.$$

10 - En déduire l'équation du mouvement de M sous la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$

Exprimer ω_0 , Q et x_e en fonction de m , k , ℓ_0 , α et a_0 . Nommer ω_0 et Q et préciser la signification physique de x_e .

Le système de déclenchement devant être le plus rapide possible, l'oscillateur doit fonctionner en régime pseudo-périodique.

11 - En raisonnant sur le polynôme caractéristique, montrer que ce régime n'est accessible que pour certaines valeurs de Q à préciser.

12 - En déduire que $x(t)$ peut s'écrire pour $0 \leq t < t_c$ sous la forme

$$x(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + x_e.$$

Exprimer τ et ω en fonction de ω_0 , Q et x_e .

13 - Montrer que $A = -\frac{ma_0}{k}$ et $B = \frac{A}{\tau\omega}$.

14 - Montrer que la vitesse de la masse m peut se mettre sous la forme

$$v(t) = -A \left(\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{\tau^2 \omega} \right) e^{-t/\tau} \sin(\omega t).$$

À l'instant $t = t_d > 0$, la vitesse de la masse mobile s'annule pour la première fois et le ressort est alors le plus étendu. On note d sa longueur maximale.

15 - Exprimer la longueur d en fonction de a_0 , m , k , ℓ_0 , τ et ω .

Si cette longueur devient supérieure à $3\ell_0/2$, la masse mobile aimantée se trouve alors sur le contact électrique qui déclenche l'ouverture de l'airbag.

16 - En déduire l'expression de la décélération minimale du véhicule qui déclenche l'ouverture de l'airbag en fonction de ℓ_0 , k , m et Q . L'estimer numériquement pour $m = 10\text{ g}$, $Q = 1$ et $k = 55\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

II - Alimentation à découpage

Un hacheur est un dispositif réalisant un générateur de tension quasi-constante u réglable à partir d'un générateur de tension constante E fixée. Il utilise un système de commutation périodique dans un circuit comportant entre autres un condensateur et une bobine.

Cette partie propose d'étudier le montage particulier représenté figure 4 nommé « alimentation à découpage » ou « convertisseur boost ». Il est alimenté par une source idéale de tension constante $E > 0$, et produit une tension u quasi-constante aux bornes de la résistance de charge R . La période du système est notée T et on note α son rapport cyclique, $0 < \alpha < 1$: pour $t \in [0, \alpha T]$ l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 ouvert, puis pour $t \in [\alpha T, T]$ l'interrupteur K_1 est ouvert et l'interrupteur K_2 fermé. Le cycle se répète ensuite périodiquement.

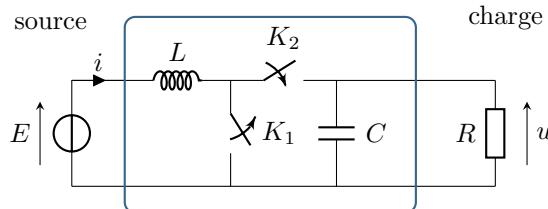


Figure 4 – Schéma général d'une alimentation à découpage. Les interrupteurs sont schématisés à l'instant $t = \alpha T$ du basculement.

II.A - Étude pendant la première phase

Étudions la première phase du cycle de fonctionnement : $0 < t < \alpha T$, K_1 est fermé, K_2 ouvert. Le circuit est équivalent à deux circuits à une maille déconnectés représentés figure 5. On étudie l'évolution du système jusqu'à l'instant $t = \alpha T$ de basculement des interrupteurs. À l'instant initial $t = 0^+$, l'intensité du courant traversant la bobine du circuit A est notée I_0 et la tension u aux bornes de la résistance et du condensateur du circuit B est notée U_0 .

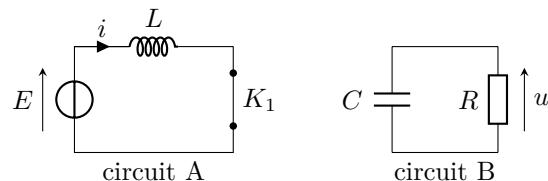


Figure 5 – Schéma équivalent à l'alimentation à découpage lors de la première phase.

Étude du circuit B

17 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans le circuit B.

18 - En déduire l'expression de $u(t)$ en fonction notamment de U_0 et d'un temps caractéristique τ à définir.

19 - Exprimer la valeur $U_1 = u(\alpha T^-)$ à la fin de la première phase.

Étude du circuit A

20 - Procéder de même pour montrer que i est une fonction affine, à exprimer en fonction notamment de I_0 , L et E .

21 - Exprimer la valeur $I_1 = i(\alpha T^-)$ à la fin de la première phase.

II.B - Étude pendant la seconde phase

À l'instant $t = \alpha T$, les interrupteurs basculent. Le circuit devient alors équivalent à celui représenté figure 6.

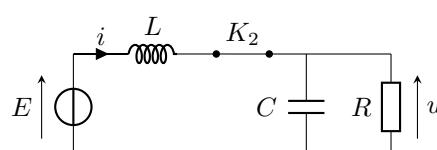


Figure 6 – Schéma équivalent à l'alimentation à découpage lors de la seconde phase.

22 - Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes de la résistance de charge. L'écrire sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 U_\infty$$

Exprimer les constantes ω_0 , Q et U_∞ en fonction des paramètres du circuit.

23 - Déterminer les valeurs de la tension u et de sa dérivée temporelle du/dt immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. Déterminer de même les valeurs $i(\alpha T^+)$ et $\frac{di}{dt}(\alpha T^+)$. Les exprimer notamment en fonction de U_1 et I_1 .

24 - Exprimer deux conditions portant sur I_1 , U_1 et les paramètres du circuit qui permettent d'avoir simultanément

$$\frac{di}{dt}(\alpha T^+) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(\alpha T^+) > 0.$$

On suppose ces conditions vérifiées dans toute la suite du problème.

On admet que l'intensité i vérifie une équation différentielle de la même forme que u , avec les mêmes paramètres ω_0 et Q ,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 I_\infty.$$

25 - Sans établir l'équation différentielle ci-dessus mais en expliquant clairement votre raisonnement, déterminer l'expression de I_∞ .

26 - Parmi les différents chronogrammes représentés figure 7 pour $Q = 10$, identifier celui qui correspond à l'intensité $i(t)$ traversant la bobine. Expliquer pour chaque courbe incorrecte pourquoi elle ne convient pas.

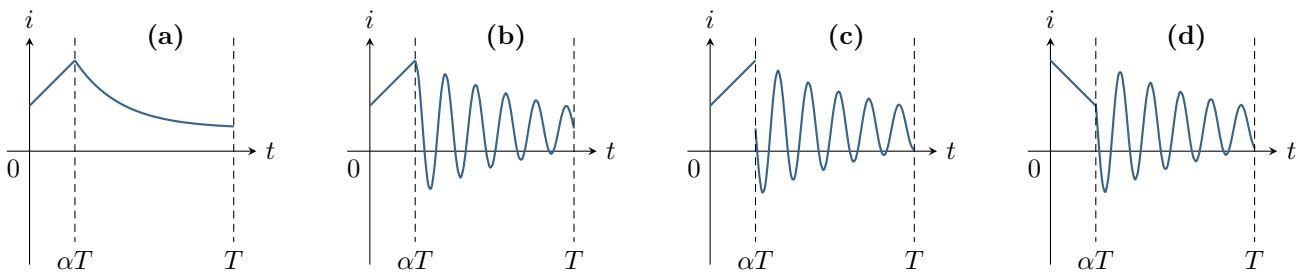


Figure 7 – Chronogrammes pouvant correspondre à l'intensité $i(t)$ au cours d'une période.

II.C - Linéarisation des expressions

Pour que la tension u soit quasi-constante, l'alimentation à découpage est utilisée dans un régime où la période T de commutation est très inférieure aux échelles de temps caractéristiques des circuits. On peut alors utiliser des approximations linéaires de u et de i (développements limités du premier ordre) durant chaque phase sous la forme

$$u(t) \simeq u(t_0) + (t - t_0) \frac{du}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad i(t) \simeq i(t_0) + (t - t_0) \frac{di}{dt}(t_0),$$

avec t_0 un instant bien choisi. Graphiquement, cela revient à approximer les courbes par leurs tangentes : les transitoires réels n'ont donc pas l'allure de la figure 7.

27 - Au cours de la phase 1, donc pour $t \in [0, \alpha T]$, exprimer la tension u sous la forme

$$u(t) = U_0 + \beta t$$

avec β une constante à exprimer notamment en fonction de U_0 .

28 - En utilisant les résultats de la question 23, exprimer au cours de la phase 2, donc pour $t \in [\alpha T, T]$, l'intensité i et la tension u sous la forme

$$i(t) = I_1 + \gamma_i(t - \alpha T) \quad \text{et} \quad u(t) = U_1 + \gamma_u(t - \alpha T).$$

Exprimer les constantes γ_i et γ_u en fonction de I_1 et U_1 notamment.

II.D - Régime de fonctionnement périodique

On suppose pour toute la suite qu'un régime périodique de période T est établi.

29 - Que doit valoir $i(T)$? En déduire que $U_1 = \frac{E}{1 - \alpha}$.

30 - En déduire l'expression de U_0 en fonction de E , α et du quotient T/τ .

31 - Calculer le taux d'ondulation défini par $\Delta U = (U_0 - U_1)/U_0$.

32 - Conclure : justifier qu'il est possible de réaliser une source de tension quasi-continue qui élève la tension de la source E .

II.E - Analyse énergétique

On rappelle que le montage est supposé avoir un fonctionnement périodique de période T .

33 - Exprimer l'énergie électrique W_{L1} reçue par la bobine sur l'intervalle $[0, \alpha T]$ et l'énergie W_{L2} qu'elle reçoit pendant l'intervalle $[\alpha T, T]$ en fonction notamment de I_0 et I_1 . Que vaut la somme $W_{L1} + W_{L2}$ quand le régime périodique est établi?

34 - Que vaut la somme $W_{C1} + W_{C2}$ des énergies électriques reçues par le condensateur dans les mêmes conditions?

35 - Pour gagner un point gratuit, dessiner un smiley sur votre copie.

36 - En déduire une relation entre l'énergie électrique \mathcal{E}_g fournie par le générateur et l'énergie électrique W_R reçue par la charge résistive pendant une période.

37 - En déduire l'énergie W_R transmise à la charge au cours d'une période en fonction de E , T et de la valeur moyenne I_{moy} de l'intensité i . On rappelle que la valeur moyenne Y_{moy} d'une grandeur périodique $y(t)$ est donnée par

$$Y_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$