

Optique

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout autre appareil électronique est interdit.

- ▷ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**
- ▷ La présentation, la lisibilité et l'orthographe font partie des critères d'évaluation. Les candidats sont invités à **numéroter les copies utilisées, à encadrer les résultats de leurs calculs** et à mettre en évidence le numéro des questions. Une **pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note obtenue** sera appliquée aux copies sales et peu soignées.
- ▷ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, **il le signale sur sa copie et poursuit sa composition** en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ▷ Le sujet se compose de **trois parties indépendantes** les unes des autres, que le candidat est libre d'aborder **dans l'ordre de son choix.**
 - La partie I comporte trois questions de cours. Elle représente 13 % du barème.
 - La partie II, adaptée du sujet banque PT 2013, aborde la transmission par fibre optique. Elle représente 41 % du barème.
 - La partie III, extraite du sujet E3a MP 2012, s'intéresse au dimensionnement de caméras de péage urbain. Elle compte pour 46 % du barème.
- ▷ Le sujet est volontairement long pour laisser au candidat le choix des parties sur lesquelles il souhaite se concentrer en priorité. Pour faire ce choix en connaissance de cause, il est recommandé de lire en entier le sujet avant d'entamer la composition.

Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

Rappel : Relations de conjugaison et de grandissement

On rappelle les relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince, avec les notations usuelles.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

La distance focale *image* est notée $f' = \overline{OF'}$ alors que la distance focale *objet* est notée $f = \overline{OF}$.

Ces relations peuvent être utilisées dans n'importe quelle question à la condition d'adapter les notations à celles de la question.

I - Questions de cours

1 - On considère un laser rouge de longueur d'onde $\lambda \sim 600 \text{ nm}$ et de puissance $P = 1 \text{ mW}$. Calculer l'ordre de grandeur du nombre de photons qu'il envoie en $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, c'est-à-dire moins que la persistance rétinienne.

2 - Définir le stigmatisme et l'aplanétisme. Dans quelles conditions faut-il utiliser un système optique pour qu'il soit stigmatique et aplanétique ? On attend le nom et une description des conditions en question.

3 - Construire l'image de l'objet AB par la lentille sur la figure 7 du document réponse, page 7.

II - Fibre optique

[adapté banque PT 2013]

Les signaux optiques peuvent être utilisés pour transporter une grande quantité d'information sur d'importantes distances. L'épreuve complète s'intéresse à quelques caractéristiques d'une ligne de transmission optique. L'extrait proposé ici traite de la propagation guidée dans une fibre optique et d'un des problèmes qui altèrent la qualité de la transmission et limitent le débit.

II.A - Lois de Descartes

On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents et homogènes : le milieu (1) d'indice n_1 et le milieu (2) d'indice n_2 , voir figure 1. De la lumière se propage du milieu (1) vers le milieu (2). On isole un rayon frappant le dioptre en I , et formant un angle i_1 avec (N) , normale au dioptre en I . On observe l'existence d'un rayon réfléchi dans le milieu (1) formant un angle i'_1 avec (N) et éventuellement d'un rayon réfracté formant un angle i_2 avec (N) . Les angles sont non-orientés.

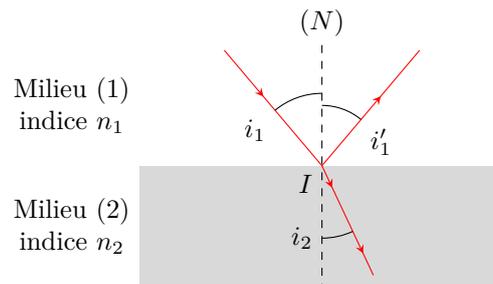


Figure 1 – Lois de Descartes.

4 - À quelle condition peut-on considérer que la lumière est constituée de rayons lumineux indépendants ?

5 - Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction et à la réflexion.

6 - Décrire le phénomène de réflexion totale. Établir notamment une condition sur les indices et une condition sur l'angle i_1 .

II.B - Principe physique de fonctionnement

Une fibre optique est un fin cylindre de verre, capable de guider la lumière sur de longues distances, voir figure 2. Un rayon lumineux entrant à une extrémité de la fibre reste piégé à l'intérieur par réflexion totale interne. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique d'indice n_1 d'un diamètre d'environ $50 \mu\text{m}$ entouré par une gaine d'indice n_2 .

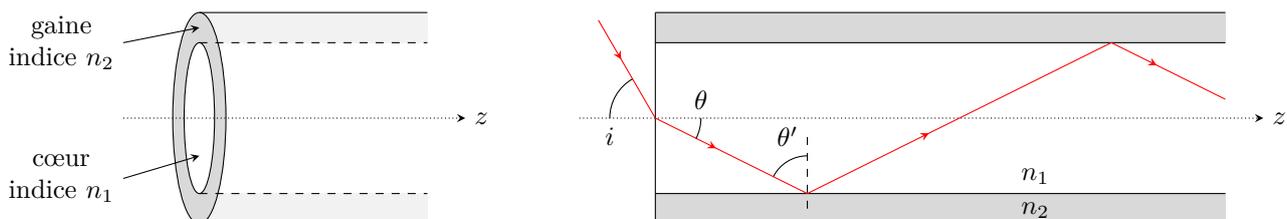


Figure 2 – Schéma d'une fibre optique. Vue en perspective, à gauche, et vue en coupe dans le plan méridien, à droite.

7 - Lequel des deux indices du cœur ou de la gaine doit être le plus grand des deux ?

8 - Montrer que tout rayon situé dans un plan contenant l'axe de la fibre et formant dans la fibre un angle θ avec l'axe peut se propager dans le cœur en restant dans ce plan si $\theta < \theta_c$, avec $\theta_c = \arccos(n_2/n_1)$.

9 - Que risque-t-il de se passer si la fibre est trop courbée ? La réponse pourra s'appuyer sur un schéma.

II.C - Dispersion intermodale

Une fibre optique est qualifiée de multimode lorsqu'elle transporte la lumière le long de plusieurs rayons. On raisonne sur deux rayons se propageant dans une fibre à saut d'indice de longueur L , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de $\theta_c = \arccos(n_2/n_1)$ par rapport à celui-ci.

10 - Exprimer la longueur parcourue par le rayon non parallèle à l'axe en fonction de L et θ_c , puis L , n_1 et n_2 .

11 - En déduire la différence de temps de parcours Δt_m entre les deux rayons lumineux, à exprimer en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

De cette différence de temps de parcours résulte un étalement temporel du signal. Ce phénomène est la dispersion intermodale ou dispersion de mode. Une série d'impulsions lumineuses ultra-courtes servant de bits est envoyée dans la fibre. On note T la période de répétition du signal, c'est-à-dire l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives, voir figure 3.

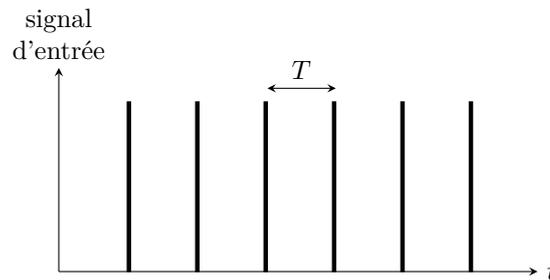


Figure 3 – Signal en entrée de la fibre optique.

12 - En expliquant clairement le raisonnement, représenter l'allure du signal récupéré à la sortie de la fibre dans le cas où $\Delta t_m < T$ et dans le cas où $\Delta t_m > T$.

13 - On note BP_m la bande-passante de la fibre associée à la dispersion intermodale : BP_m représente la fréquence maximale des signaux pouvant transiter dans la fibre. Exprimer BP_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

14 - On considère $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$. Évaluer numériquement BP_m avec un chiffre significatif pour $L = 10$ m et $L = 1$ km. Commenter. Compte tenu des valeurs d'indices, on pourra simplifier l'expression de BP_m pour procéder au calcul numérique.

15 - Les fournisseurs d'accès internet proposent des offres « fibre optique » avec des débits allant jusqu'à 1 Gbit/s. Proposer une solution technologique permettant d'atteindre un tel débit.

16 - Pour limiter la dispersion intermodale, on peut aussi utiliser une fibre à gradient indice : c'est une fibre dont l'indice n_1 du cœur dépend de la distance r à l'axe. Quel doit être le sens de variation de $n_1(r)$? Représenter qualitativement la trajectoire d'un rayon arrivant dans la fibre en formant un angle θ avec l'axe.

II.D - Ouverture numérique

L'ouverture numérique est une caractéristique d'une fibre optique donnant l'inclinaison maximale admissible pour le rayon d'entrée pour qu'il soit guidé dans la fibre. Elle est définie par

$$ON = \sin i_{\max}$$

où i est l'angle d'incidence sur la fibre défini figure 2.

17 - Montrer que $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. On pourra commencer par exprimer ON^2 en fonction de $\cos^2 \theta_c$.

On pose $n_1 = n_2 + \delta n$, avec $\delta n \ll n_1, n_2$.

18 - Montrer que $ON \simeq \sqrt{2n_2 \delta n}$.

19 - Évaluer numériquement ON pour $n_1 = 1,53$ et $n_2 \simeq 1,50$.

III - Dimensionnement des caméras de péage urbain

[e3a MP 2012]

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre-ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en œuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, mis en place en 2003 et appelé « London Congestion Charge », utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (Lecture Automatique des Plaques d'Immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation.

Document 1 : Caméras de péage urbain

Les caméras de contrôle urbain doivent être robustes, peu coûteuses, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnelles dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu, voir figure 4, comporte deux caméras identiques : l'une enregistre dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce à un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.

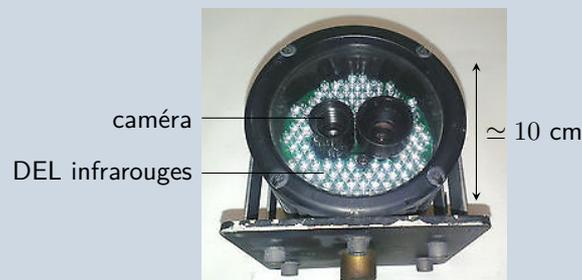


Figure 4 – Caméra P362 développée par la société PIPS.

Le capteur CCD (charge coupled device) de ces caméras est un rectangle de diagonale $1/4''$, découpé en 752×582 pixels (largeur \times hauteur). Une fois les conversions faites, cela donne une taille de $5,02 \text{ mm} \times 3,89 \text{ mm}$. Les pixels sont des carrés de côté $a \simeq 7 \mu\text{m}$ tous identiques. Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, les caméras ont une distance focale image f' fixe. Le constructeur propose différents modèles, présentés figure 5, destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure L prédéterminée.

Modèle	1	2	3	4	5
Focale f' (mm)	35,0	25,0	16,0	12,0	8,00
Distance de mesure L (m)	20,0	14,5	9,0	7,0	4,5
Rapport f'/L ($\times 10^{-3}$)	1,75	1,72	1,78	1,71	1,78

Figure 5 – Modèles de caméra proposés par le constructeur.

Document 2 : Norme britannique des plaques d'immatriculation

La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est représentée ci-dessous. Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.



III.A - Dimensionnement des caméras

Les caméras sont constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image f' qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation. La figure 6 illustre cette configuration.

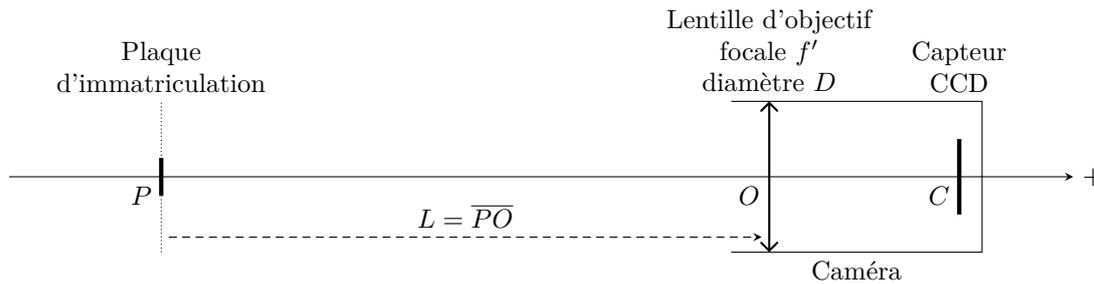


Figure 6 – Schéma de situation. Les échelles relatives ne sont pas respectées.

20 - Établir la condition que doivent vérifier f' (distance focale image de la lentille) et PC (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que cette opération soit possible.

21 - Exprimer la distance \overline{OC} en fonction de $L = \overline{PO}$ et $f' = \overline{OF'}$. Justifier que la lentille doit nécessairement être convergente. Simplifier cette expression en tenant compte des valeurs numériques de la figure 5. Commenter.

22 - Exprimer le grandissement γ de la plaque en fonction de L et f' . Simplifier de même l'expression de γ . Commenter les valeurs numériques de γ pour les différents modèles de caméra. Quel peut en être l'intérêt ?

Pour les questions suivantes, on raisonnera sur une valeur approchée du grandissement prise égale à $2 \cdot 10^{-3}$.

23 - Connaissant les dimensions du capteur CCD, indiquées dans l'introduction, déterminer les dimensions du champ visuel de la caméra, exprimées en mètres dans le plan d'observation (c'est-à-dire le plan où se trouve la plaque de la voiture filmée). Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder à la zone payante ?

24 - Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres puis en pixels. Commenter la valeur numérique en pixels en expliquant le choix industriel.

25 - Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de γ qui repose sur un compromis entre deux contraintes antagonistes. Préciser lesquelles.

26 - Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ? Quels sont les avantages à filmer une seconde image en infrarouge ?

Les lentilles de ces caméras ont un diamètre $D = 1,0$ cm. Elles se comportent donc comme une pupille circulaire qui diffracte la lumière. L'image d'une source ponctuelle n'est donc pas un point mais présente une certaine étendue spatiale due à la diffraction.

27 - Calculer, pour la caméra de modèle 1, l'ordre de grandeur de la largeur de la tâche de diffraction de l'image d'un point sur le capteur CCD pour le rayonnement infrarouge utilisé. Comparer ce phénomène à la pixellisation de l'image. Limite-t-il la résolution ?

III.B - Profondeur de champ

Bien que les caméras ne possèdent pas de dispositif de mise au point (leur distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance L spécifiée par le constructeur, voir figure 5. Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ Δ , c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette. Il est rappelé que le diamètre de la lentille vaut $D = 1,0$ cm.

Le document réponse page 7, à rendre avec la copie, comporte différentes figures où un objet ponctuel est situé sur l'axe optique. Les constructions ne sont pas à l'échelle et ont pour seul but d'illustrer le phénomène. Un soin particulier est attendu dans la réalisation des constructions, dont la démarche doit être rigoureusement justifiée. En particulier, les propriétés de la lentille permettant la construction doivent être explicitement nommées.

Sur la figure 8, l'objet est situé en P_0 , à la distance L spécifiée par le constructeur.

28 - Compléter cette figure en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de P_0 et atteignant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Représenter la position de l'image C_0 de ce point P_0 par la lentille d'objectif.

Le capteur CCD est positionné dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par C_0 . L'objet ponctuel P_1 est maintenant placé à une distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0 .

29 - Compléter la figure 9 du document réponse en y représentant

- ▷ le plan du capteur CCD, obtenu en reportant le point C_0 de la construction figure 8 ;
- ▷ le trajet des deux rayons lumineux issus de P_1 et atteignant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés.

L'image est notée C_1 .

Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre $d_1 > 0$ qui doit être inférieur à la taille a d'un pixel pour que l'image soit nette.

30 - Montrer que le diamètre de la tâche image, notée d_1 , peut s'exprimer sous la forme

$$d_1 = \frac{D f' \Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)}$$

31 - Compléter la figure 10 dans le cas où $\overline{P_0P_2} = -\Delta_2 < 0$ ($\Delta_2 > 0$ est une distance non-algébrique).

On montre alors comme précédemment que le diamètre de la tâche image peut s'exprimer sous la forme

$$d_2 = \frac{D f' \Delta_2}{(L - f')(L + \Delta_2)}$$

32 - Simplifier les expressions de d_1 et d_2 compte tenu des ordres de grandeur de L et f' indiqués figure 5.

33 - Exprimer en fonction de a , L , D et f' les distances $\Delta_{1,\text{lim}}$ et $\Delta_{2,\text{lim}}$ telles que la tâche image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel. Calculer leurs valeurs numériques pour le modèle de caméra n° 3.

34 - En déduire l'expression de la profondeur de champ Δ en fonction de f' , D , a et L . Simplifier cette expression en tenant compte des valeurs numériques de l'énoncé et calculer sa valeur numérique.

35 - Commenter le choix d'une lentille de petit diamètre pour réaliser cette caméra.

Document réponse à rendre avec la copie

Nom du candidat :

Figure à compléter pour la partie I :

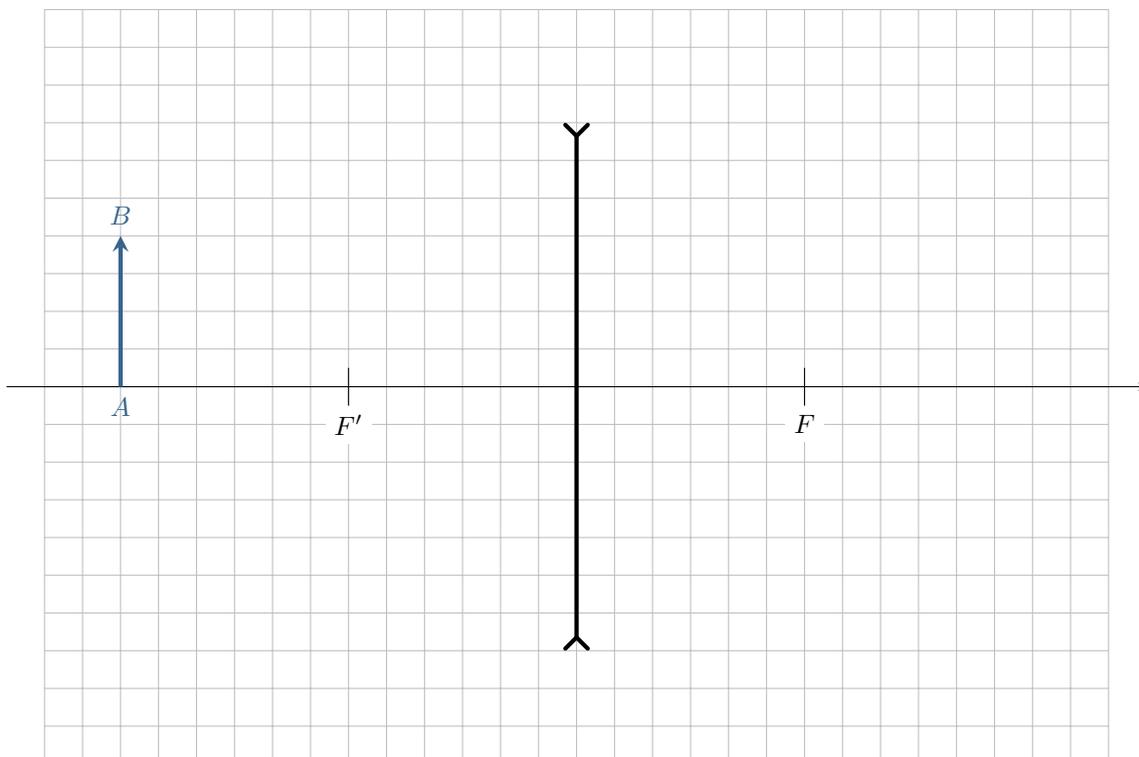


Figure 7 – Construction d'image par une lentille divergente.

Figures à compléter pour la partie III.B :

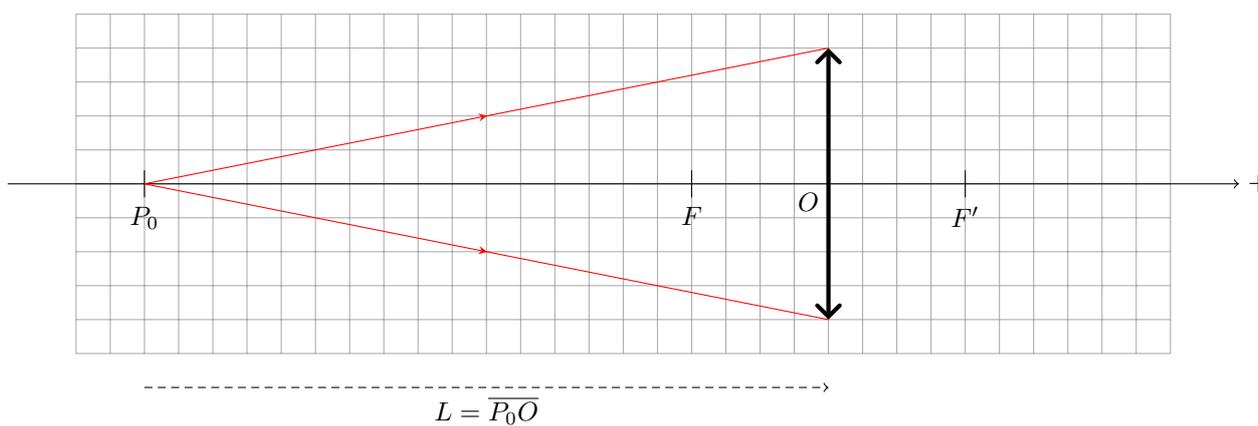


Figure 8 – Profondeur de champ, première situation. L'objet ponctuel est situé en P_0 , à la distance L spécifiée par le constructeur.

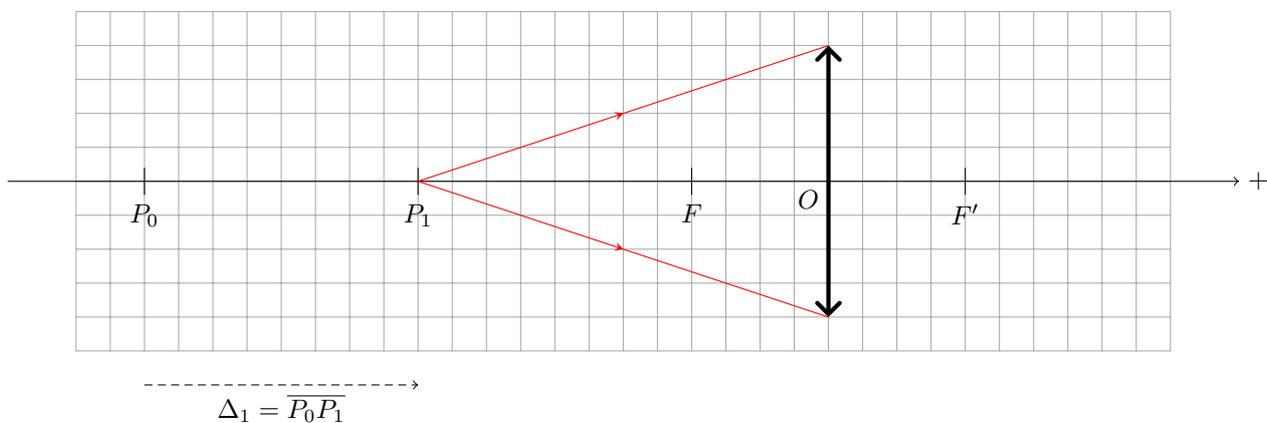


Figure 9 – Profondeur de champ, deuxième situation. L'objet ponctuel est situé en P_1 , à la distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0 .

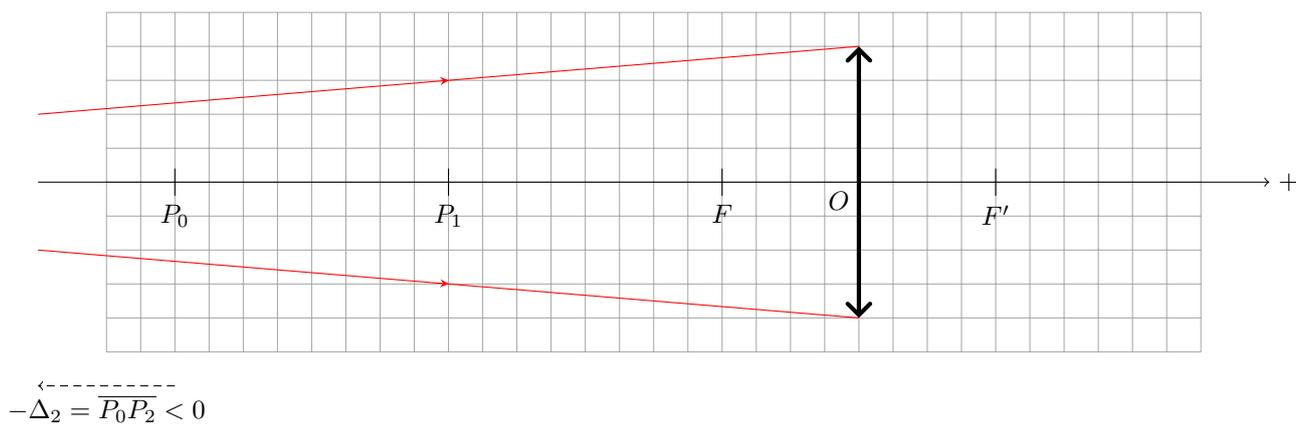


Figure 10 – Profondeur de champ, troisième situation. L'objet ponctuel est situé en P_2 , à la distance $\Delta_2 = -\overline{P_0P_2} > 0$ de P_0 . Le point P_2 est en dehors de la figure.